Harmoninen sarja

Pekka Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Lukiomatematiikan sarjoja koskeva osuus rajoittuu käytännössä geometrisiin summiin ja niiden raja-arvoina saataviin geometrisiin sarjoihin. Geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$$

onkin siinä mielessä harvinainen ja hyödyllinen sarja, että sen osasummille voidaan johtaa yksinkertainen lauseke:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} aq^k &= a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n \\ &= \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}, \text{ kun } q \neq 1.\end{aligned}$$

Tämän avulla sarjan summaksi eli osasummien raja-arvoksi saadaan lauseke

$$\frac{a}{1-q},$$

kun $-1 < q < 1$ tai $a = 0$.

Toisaalta yleisempi sarjojen suppenemisen käsittely ei vaadi juurikaan enempää: sarja suppenee, jos sen osasummilla on (äärellinen) raja-arvo. Lisäksi pelkkään geometriseen sarjaan rajoittuminen johtaa melko yleiseen virhepäätelmään, josta näyttää olevan vaikea luopua edes 1. vuoden yliopistotason matematiikan kurssien aikana. Geometrinen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun sen yleinen termi aq^k lähestyy nollaa, kun $k \to \infty$. Tämä ehto ei kuitenkaan takaa sarjan suppenemista yleisemmässä tilanteessa.

Tunnetuin esimerkki on harmoninen sarja, jolla tarkoitetaan ääretöntä summaa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots.$$

Harmonisen sarjan yleinen termi $1/k$ lähestyy nollaa, mutta siitä huolimatta sarjan summa ei ole äärellinen! Tämän kirjoituksen tarkoitus on esittää lyhyt alkeellinen perustelu tälle väitteelle. Suurin ongelma harmonisen sarjan käsittelyssä on se, ettei osasummille eli *harmonisille luvuille*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

voida johtaa sellaista yksinkertaista lauseketta, jonka raja-arvoa voitaisiin suoraan tutkia. Päättelyn esitiedoiksi riittänee jonkinlainen intuitiivinen käsitys lukujonon suppenemisesta. Kirjoituksen lopussa on kaksi tehtävää, joissa aihetta käsitellään kahdella eri tavalla.

Lause. Harmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

hajaantuu, vaikka sarjan yleisen termin raja-arvo on nolla.

PERUSTELU. Sarjan kahdelle peräkkäiselle termille pätee

$$\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}>\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k}$$

kaikilla $k \geq 2$. Tarkastellaan $2n$ ensimmäisen termin summaa H_{2n} ja ryhmitellään kaksi peräkkäistä termiä yhteen toisesta parista alkaen. Arvoilla $n \geq 2$ saadaan yllä mainitun epäyhtälön avulla (k on aina parillinen)

$$\begin{aligned}
H_{2n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n} \\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+ \\
&\qquad \cdots+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right) \\
&> 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\frac{2}{8}+\cdots+\frac{2}{2n} \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} \\
&= H_n+\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

koska toinen 1/2-termeistä jää ylimääräiseksi. Kun siis summan termien määrä kaksinkertaistuu, niin summan arvo kasvaa luvulla 1/2, eikä summien raja-arvo voi olla äärellinen. Hieman täsmällisemmin: Jos osasummat H_n suppenevat kohti reaalilukua H, niin parillisilla osasummilla H_{2n} on sama raja-arvo ja yllä olevan perusteella

$$H=\lim_{n\to\infty} H_{2n} \geq \lim_{n\to\infty}\left(H_n+\frac{1}{2}\right)=H+\frac{1}{2}.$$

Tämä on ristiriita, joten sarjan osasummat kasvavat kohti ääretöntä.

Huomautus. Koska $H_1 = 1$, niin yllä olevasta epäyhtälöstä seuraa (intuitiivisellä päättelyllä tai matemaattisella induktiolla) myös arvio

$$H_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}. \tag{1}$$

Tähän epäyhtälöön perustuu vanhin tunnettu päättely harmonisen sarjan hajaantumisesta; vrt. tehtävä 1.

Todettakoon vielä lopuksi, että integraalilaskennan avulla voidaan johtaa approksimaatio $H_n \approx \ln n$. Tähän palataan myöhemmissä Solmun numeroissa.

Tehtävä 1. Perustele epäyhtälö (1) suoraan ryhmittelemällä osasumman termit peräkkäisiin ryhmiin (toisesta termistä 1/2 alkaen), joiden pituudet ovat 1, 2, 4, 8, ... ja 2^{n-1}. Osoita, että kunkin ryhmän summa on vähintään 1/2. Tämä päättely on peräisin Nicole Oresmelta (1323–1382).

Tehtävä 2. Osoita, että

$$\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{3}{k}$$

kaikilla $k \geq 2$. Päättele tämän avulla, että $H_{3n+1} > H_n + 1$ kaikilla $n \geq 1$. Tämä päättely on peräisin Pietro Mengolilta (1626–1686).

Kiitokset: Kiitän Markku Halmetojaa ja Matti Lehtistä viitteisiin ja historiaan liittyvistä kommenteista.

Lisätietoja ja vihjeitä tehtävien ratkaisuihin seuraavista linkeistä:

Oresme: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Oresme.html`

Mengoli: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mengoli.html`
Katso myös J. Michael Steele: The Cauchy-Schwarz Master Class. An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities. Cambridge University Press, 2004, s. 99.

Wikipedia: `http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(mathematics)`

Pekka Alestalo: Tiiliä pinoon `http://solmu.math.helsinki.fi/2010/2/tiilet.pdf`