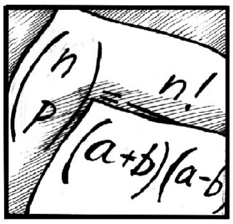

Ihan vääriä järjestyksiä!

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Elli Mikkosen ongelma ja sen historiaa

Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton Dimensio-lehden numerossa 6/2013 on Kajaanin lukion lehtorin Jorma Myllylän kirjoitus *Kombinaatio-oppia luonnollisesti.* Se on hyvä kuvaus matemaattisen ongelman ratkaisun löytymisen vaiheista.

Myllylä kertoo, että kun hän opettaa todennäköisyyslaskennan kurssia, niin aluksi oppilaat saavat miettiä todennäköisyyteen liittyviä kysymyksiä, joista muotoutuu tehtäviä. Kun kurssi etenee ja keinoja opitaan, niin tehtäviin alkaa löytyä ratkaisuja. Viimeksi pidetyn kurssin alussa Myllylän oppilas Elli Mikkonen oli esittänyt mielenkiintoisen ongelman: ”Joukko ihmisiä kirjoittaa nimensä lappuun, laput sekoitetaan ja samat ihmiset ottavat kukin yhden lapun. Millä todennäköisyydellä kukaan ei saa omaa lappuaan?” Lehtori Myllylä oli arvioinut tehtävän aika vaativaksi. Asian yksinkertaistamiseksi hän täsmensi kysymyksen niin, että ihmisiä on kahdeksan.

Myllylä oli ongelmaa mietiskellyt, mutta se ei ollut helposti auennut. Niinpä hän oli ruvennut kyselemään kollegoiltaan, ja Mika Kemppainen olikin kertonut Myllylälle ratkaisun. Se oli palautuskaava, ja Myllylän tyydytykseksi kaava antoi samat vastaukset pienille ihmismäärille kuin mihin Myllylä oli mahdolliset tapahtumat laskemalla päätynyt. Palautuskaavan antama todennäköisyys näytti ihmisten lukumäärän kasvaessa nopeasti konvergoivan kohti lukua 0,367879441, ja kun Myllylä kokeili laskimellaan, niin hän huomasi, että tuon luvun luonnollinen logaritmi on jokseenkin tasan -1. Todennäköisyys lähestyy siis lukua $\frac{1}{e}$! Myllylän kolleega Kemppainen oli sitten tuonut esiin tämän numeerisen havainnon varmistavan todistuksenkin, mutta sitä ei Dimension kirjoituksessa esitetty.

Elli Mikkonen ei ole ensimmäinen tämän kysymyksen esittäjä. Itseäni vastaan se taisi tulla ensimmäisen kerran 1960-luvun puolivälissä, kun Helsingin yliopiston matematiikan opiskelijoiden ainejärjestö Limeksen Sykloidi-lehdessä oli artikkeli ”Eulerin ongelma väärin postitetuista kirjeistä”. Siinä kertomus on jotenkin sellainen, että on joukko eri henkilöille osoitettuja kirjeitä ja osoitteilla varustettuja kirjekuoria, mutta postituksen sotkee lukutaidoton henkilö, joka laittaa joka kuoreen umpimähkään yhden kirjeen, tietämättä, kenelle se oli tarkoitettu. Miten suurella todennäköisyydellä kaikki kirjeet menevät väärille henkilöille? Samanarvoinen kysymys on, miten todennäköisesti ainakin yksi kirje lähetetään tarkoitetulle vastaanottajalle. Toisinaan tätä ongelmaa kutsutaan *narikkaongelmaksi.* Tällöin kertomus koskee herrasmiehiä, jotka ovat jättäneet (silinteri)hattunsa naulakkoon, mutta naulakonhoitaja on sotkenut numerolaput ja palauttaa hatut umpimähkään.

Ilmeisesti ongelman lähtökohtana, niin kuin todennäköisyyslaskennassa usein, on ollut uhkapeli. Ranskalainen matematiikko *Pierre Rémond de Montmort* (1678–1719) oli yksi varhaisimpia todennäköisyyslaskennan uranuurtajia. Vuonna 1708 hän julkaisi *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* eli *Tutkielma uhkapelien analysoinnista* -nimisen kirjan. Siinä hän käsitteli peliä nimeltä *treize* eli kolmetoista, jossa kortteja käännetään sekoitetusta pakasta samalla laskien yksi, kaksi, kolme jne. Laskemista jatketaan, kunnes pakasta kääntyy samannumeroinen kortti kuin sanottavana oleva numero. Kirjassaan Montmort esitti mm. kysymyksen siitä, miten todennäköinen on tällainen tapahtuma. de Montmort ratkaisi itse ongelmansa, mutta myös sveitsiläiseen Bernoullien matemaatikkosukuun kuulunut ja kuuluisan setänsä *Jakob Bernoullin* (1654–1705) johdolla todennäköisyyslaskentaa opiskellut *Nicolaus Bernoulli* (1678–1759) esitti ongelmalle ratkaisun. Kyllä ongelmasta sitten suuri *Leonhard Eulerkin* (1707–83) kirjoitti, niin kuin vanhan lehtijutun otsikko antaa ymmärtää. Hän julkaisi ratkaisunsa vuonna 1753 artikkelissa *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*. Euler ei ollut tietoinen de Montmortin ratkaisusta. Eulerin asetelmassa on kaksi pelaajaa, A ja B, ja kumpikin kääntää pakasta kortteja samaan tahtiin. Jos kortit ovat joka kerran eri kortteja, A voittaa, mutta jos jonkin kerran molemmat pelaajat kääntävät saman kortin yhtä aikaa, B voittaa.

Kaksi ratkaisua

Narikkaongelman voi ratkaista eri tavoin. Esitetään niistä kaksi. Seuraava Myllylän kirjoitusta myötäilevä jakso on lainattu Suomen matemaattisen yhdistyksen Valmennusjaoston aineistosivulta (`http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/aiheet`) löytyvästä kombinatoriikkaesityksestä.

”Monellako tavalla esineet $a_1, a_2, \ldots, a_k$ voidaan sijoittaa lokeroihin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ niin, että a_i ei ole lokerossa A_i millään i, $1 \le i \le k$?

Ratkaisu. Jos kysytty lukumäärä on $f(k)$, niin $f(1) = 0$ ja $f(2) = 1$. Oletetaan, että $f(k)$ tunnetaan, kun $k \le n$, ja tarkastellaan sijoittelua, kun esineitä ja lokeroita on $n+1$. Oletetaan, että a_{n+1} on sijoitettu lokeroon A_j, $j \le n$. Sellaisia väärinsijoitteluja, joissa a_j on sijoitettu lokeroon A_{n+1}, on $f(n-1)$ kappaletta. Sellaisia väärinsijoitteluja, joissa a_j ei ole lokerossa A_{n+1}, on $f(n)$ kappaletta. Koska A_j voidaan valita n:llä eri tavalla, $f(n+1) = n(f(n) + f(n-1))$. Mutta nyt $f(n+1) - (n+1)f(n) = nf(n-1) - f(n) = (-1)(f(n) - n(f(n-1))$ ja edelleen $f(n+1) - (n+1)f(n) = (-1)^{n-1}(f(2) - 1 \cdot f(1) = (-1)^{n-1}$ tai $f(n) - nf(n-1) = (-1)^{n-2} = (-1)^n$. Tämän yhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$\frac{f(n)}{n!} - \frac{f(n-1)}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Kun edelliset yhtälöt kirjoitetaan arvoilla $n = 2, 3, \ldots$, k ja lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$\frac{f(k)}{n!} - \frac{f(1)}{1!} = \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!},$$

jonka voi sieventää muotoon

$$f(k) = k!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\right).$$

(Sulkeissa oleva summa lähestyy raja-arvoa $e^{-1} \approx 0{,}368$, kun $k \to \infty$.)” Sulkeissa oleva summa on juuri todennäköisyys tapahtumalle, jossa jokainen esine on joutunut ”väärään” lokeroon.

Toinen varsin erilainen tapa löytää Elli Mikkosen ongelman ratkaisu perustuu niin sanottuun *summan ja erotuksen periaatteeseen.* Jos halutaan tietää, montako sellaista lukujen $1, 2, \ldots, n$ järjestystä on, joissa yksikään luku ei ole omalla paikallaan, voidaan menetellä niin, että vähennetään kaikkien järjestysten lukumäärästä, joka on $n!$, kaikkien sellaisten järjestysten, joissa ainakin jokin luku on suuruusjärjestyksen mukaisella paikallaan, määrä. Miten se onnistuu? Ajatellaan kaikkia sellaisia järjestyksiä, joissa luku k on k:ntena. Kaikki loput $n-1$ lukua voivat olla missä järjestyksessä tahansa, joten näitä järjestyksiä on $(n-1)!$ kappaletta. Kun k voi olla mikä hyvänsä n:stä luvusta, niin tällaisia järjestyksiä, joissa yksi luku on paikallaan, näyttäisi olevan $n \cdot (n-1)! = n!$ kappaletta, ja kun tämä vähennetään kaikkien järjestysten määrästä $n!$, saadaan nolla! Tämä ei käy. Vika on siinä, että niiden järjestysten joukossa, joissa k on paikallaan, on myös järjestyksiä, joissa jokin muu luku on paikallaan, ja tällaiset järjestykset ovat tulleet lasketuksi kaksi kertaa. Jokaista paria a, b, $a \ne b$, kohden on vähennetty kahdesti kaikki ne järjestykset, joissa sekä a että b ovat paikallaan. Tällaisten järjestysten määrä pitää lisätä summaan. Pareja on tunnetusti $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ kappaletta, ja kun muut $n-2$ lukua saavat olla missä järjestyksessä vain, niin kuhunkin paikallaan olevaan pariin liittyy $(n-2)!$ eri järjestystä.

Olisiko hakemamme lukumäärä siis

$$n! - n! + \frac{n!}{2!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)?$$

Ei sentään: jos a, b, c ovat kolme eri lukua, niin ne järjestykset, joissa kaikki kolme ovat paikallaan, ovat tulleet vähennetyiksi kunkin yksittäisen paikallaan pysyneen luvun kohdalla ja lisätyiksi jokaisen kolmen parin a, b, a, c ja b, c kohdalla. Kaikki kuhunkin kolmikkoon liittyvät $(n-3)!$ järjestystä on siis vähennettävä. Kolmikkoja on $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ kappaletta, joten uusi tarkempi ehdotus niiden järjestysten lukumääräksi, joissa kaikki luvut ovat väärillä paikoilla, on

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right).$$

Mutta kun jatketaan ja otetaan huomioon paikallaan pysyvät nelikot, viisikot jne., tullaan lopulta tarkkaan lukumäärään

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$