Kilpailutehtäviä geometriasta

Heikki Pokela
Tapiolan lukio

Edellisten tehtävien (Solmu 2/2013) ratkaisuja

Baltian tie -joukkuematematiikkakilpailussa kysyttiin seuraavaa funktionaalitehtävää. Tehtävä on siis vuodelta 1992, kuten tehtävänannosta saattaa päätellä.

Olkoon $a = \sqrt[1992]{1992}$*. Kumpi luvuista*

$$a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \quad \textit{vai } 1992$$

on suurempi? Yhtälön vasemmalla puolella on 1992 kappaletta a-kirjaimia.

Ratkaistaan tehtävä sisäkkäisten funktioiden avulla. Merkitään $f(x) = a^x$, joka on eksponenttifunktiona kasvava, sillä kantaluvuksi tässä määritelty $a = \sqrt[1992]{1992} > 1$. $1992 > \sqrt[1992]{1992}$, joten kasvavuudesta seuraa $f(1992) > a$ (ja $f(1992) = 1992$). Nyt saadaan pääteltyä, että

$$\begin{aligned} 1992 &= \underbrace{f(f(f(\ldots f(1992)\ldots)))}_{1992 \text{ kpl}} \\ &> f(f(f\ldots f(a)\ldots)) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}, \end{aligned}$$

joten 1992 on suurempi.

Pohjoismaisessa matematiikkakilpailussa vuonna 1991 ensimmäisenä tehtävänä kysyttiin seuraavaa. Myös tässä vuosiluku on mukana tehtävänannossa, eikä sillä ole olennaista merkitystä ratkaisun rakenteeseen – joskus toki voi olla.

Määritä luvun

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \ldots + 2^{5^{1991}}$$

kaksi viimeistä numeroa, kun luku kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä.

Vaikka tehtävässä on kysymys usean luvun summan numeroista, lienee syytä aloittaa tarkastelemalla yksittäisten 2^{5^k}-termien viimeisiä numeroita. Helposti nähdään, että termi on 32, jos $k = 1$, ja pienen laskemisen jälkeen havaitaan termin päättyvän numeroihin 32 myös, kun $k = 2$. Voidaan siis epäillä tämän olevan totta kaikilla k:n arvoilla. Todistetaan induktiolla: kun $k = 1$, $2^{5^1} = 32$. Seuraavaksi oletetaan, että 2^{5^k} on muotoa $100r + 32$. Silloin

$$2^{5^{k+1}} = (2^{5^k})^5 = (100r + 32)^5 = 100s + 32^5.$$

Viimeinen yhtäsuuruus edellisessä tulee binomikaavasta, sillä avattaessa sulkulauseke kaikissa muissa termeissä paitsi viimeisessä (32^5) luku 100 on vähintään yhden kerran tekijänä. Tarkastellaan viimeinen termi muodossa $(30 + 2)^5$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &30^5 + 5 \cdot 30^4 \cdot 2 + 10 \cdot 30^3 \cdot 4 \\ &\qquad + 10 \cdot 30^2 \cdot 8 + 5 \cdot 30 \cdot 16 + 32 = 100t + 32. \end{aligned}$$

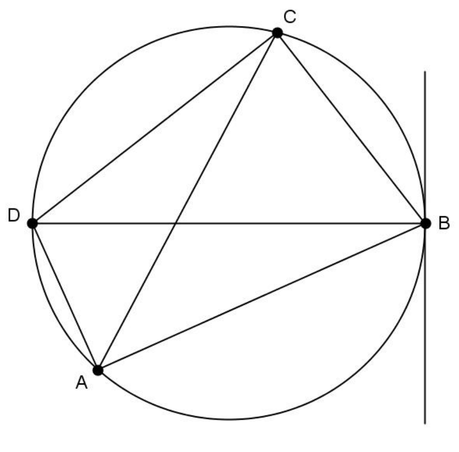
Luvut r, s ja t ovat positiivisia kokonaislukuja. Induktio on valmis. Koska tehtävänannon summassa jokaisen termin viimeiset numerot ovat 32, summan kaksi viimeistä numeroa saadaan lukujen 1991 ja 32 tulosta eli viimeiset kaksi numeroa summassa ovat 12.

Lukuteorian aihealueelta kilpailuissa induktio ja kongruenssin laskusäännöt ovat ehkä useimmin tarpeen. Myös parillisuus, alkulukujen ominaisuudet ja Fermat'n pieni lause kuuluvat perustyövälineistöön.

Kilpailugeometrian alkeita

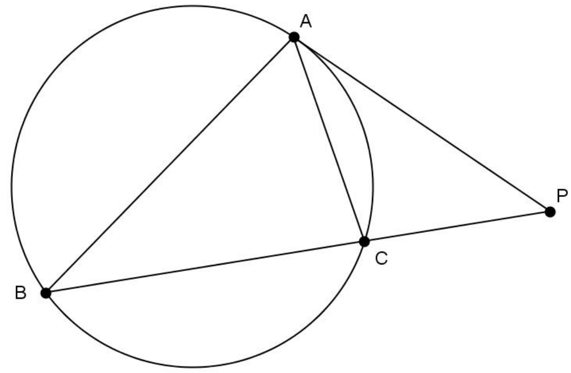
Geometrialla on matematiikkakilpailuissa vankka asema. Useiden maiden opetussuunnitelmissa tasogeometrian väittämien todistamiseen panostetaan huomattavasti suomalaista (nyky)koulujärjestelmää enemmän. Tasogeometriaa pidetään edelleen verrattomana koulumatematiikan osa-alueena, jolla pohjustetaan matematiikan rakenteiden ymmärtämistä.

Pitkän matematiikan kurssilla 3 tutustutaan kehäkulmien perusominaisuuksiin, jotka oletetaan tässä tunnetuiksi. Osa aktiivisista lukiolaisista on opiskellut aihepiiriä jo yläkoulussa. Osoitetaan jatkoa varten kolmion minkä tahansa kulman yhtäsuuruus viereisen kulman ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän tangentin välille.



Kehäkulmatarkastelun perusteella kolmion ABC kulma $\angle ACB = \angle ADB$, missä D on valittu kehältä siten, että jana DB on ympyrän halkaisija. Tällöin kolmio ADB on suorakulmainen ja pisteeseen B piirretty ympyrän tangentti on kohtisuorassa janan DB kanssa. Koska $\angle DBA = \frac{\pi}{2} - \angle ADB$, janan AB ja tangentin välinen kulma on oltava yhtä suuri kuin $\angle ADB$ – ja yhtä kuin $\angle ACB$.

Pisteen potenssi on paitsi hyödyllinen työkalu tasogeometrian tehtävissä myös melko helppo johtaa. Piirretään ympyrän ulkopuolisesta pisteestä P tangentti ympyrälle. Merkitään tangenttipistettä A:lla ja piirretään lisäksi pisteestä P jana mielivaltaiseen ympyrän pisteeseen B. Merkitään janan ja ympyrän toista leikkauspistettä C:llä.



Tangenttikulmalle pätee edellisen perusteella $\angle CBA = \angle CAP$, joten kolmiot PAB ja PCA ovat yhdenmuotoisia (kk). Vastinsivujen verrannosta

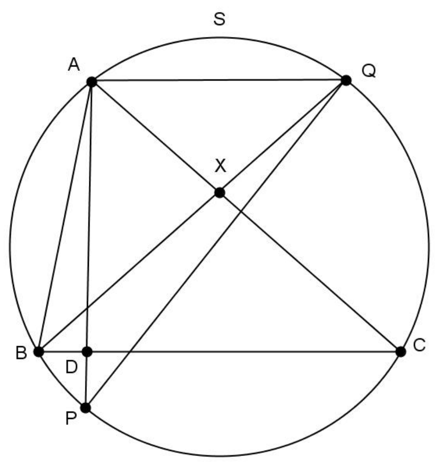
$$\frac{PC}{PA} = \frac{PA}{PB}$$

saadaan $PA^2 = PC \cdot PB$.

MAOL-alkukilpailun 2013 välisarjan geometrian tehtävä

Lukion toisen vuosikurssin oppilaiden sarjassa neljäntenä tehtävänä oli varsin perinteinen ympyräoppiin liittyvä ongelma.

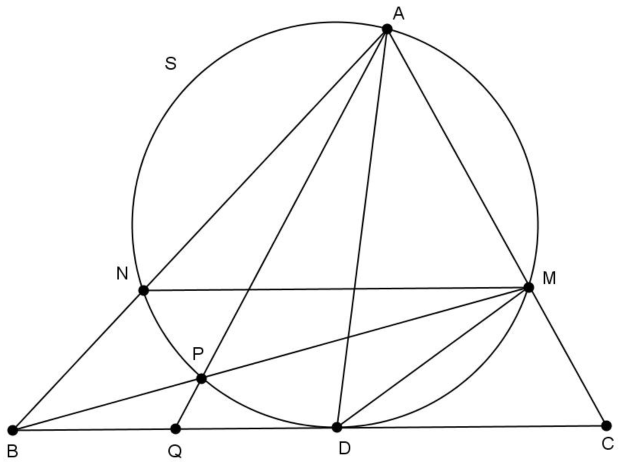
Kolmiolle ABC pätee $AB < AC$. Olkoon tämän kolmion ympäri piirretty ympyrä S. Pisteestä A piirretty kohtisuora janalle BC kohtaa ympyrän S uudestaan pisteessä P. Piste X sijaitsee janalla AC, ja janan BX jatke kohtaa ympyrän S pisteessä Q. Osoita, että jos $BX = CX$, niin PQ on ympyrän S halkaisija.



Ehto $BX = CX$ tekee kolmiosta BXC tasakylkisen, joten $\angle XCB = \angle XBC = \angle CAQ$, missä viimeisin yhtäsuuruusmerkki saadaan kehää CQ vastaavista kehäkulmista. Samankohtaisista kulmista voimme päätellä, että $BC \parallel AQ$. Koska jana AP on kohtisuorassa janaa BC vastaan, kulman $\angle PAQ$ on myös oltava suora. Suorakulmaisena kolmiona APQ:n hypotenuusa PQ on välttämättä ympyrän halkaisija.

Geometriaa Lähi-idästä

Kolmion ABC kulman $\angle BAC$ puolittaja kohtaa sivun BC pisteessä D. Oletetaan, että ympyrä S, jonka tangentti on jana BC pisteessä D, kulkee pisteen A kautta. Lisäksi ympyrä S leikkaa janat AC ja AB pisteissä M ja N, vastaavasti. Jana BM leikkaa ympyrän pisteessä P ja janan AP jatke kohtaa janan BC pisteessä Q. Osoita, että AQ on kolmion ABD keskijana. (Kilpailutehtävä Iranista 1999.)



Kuvan ympyrän sisällä kaarta AM vastaavat kehäkulmat ovat keskenään yhtä suuria, joten riittää saada yksi niistä lausutuksi kolmion ABC kulmien avulla. Aiemmin esitetyn perusteella $\angle DAM = \frac{1}{2}\angle A = \angle MDC$. Saamme

$$\begin{aligned}\angle ADM &= \angle ADC - \angle MDC\\ &= (\pi - \angle CAD - \angle DCA) - \angle MDC\\ &= (\pi - \frac{1}{2}\angle A - \angle C) - \frac{1}{2}\angle A\\ &= \pi - \angle A - \angle C = \angle B.\end{aligned}$$

Kehä- ja ristikulmien sekä edellisen avulla $\angle BPQ = \angle APM = \angle ADM = \angle B$. Kahden yhtäsuuren kulman perusteella kolmiot ABQ ja BPQ ovat yhdenmuotoisia, joten niille pätee vastinsivujen verranto

$$\frac{BQ}{QA} = \frac{QP}{BQ},$$

mistä saadaan $BQ^2 = QP \cdot QA$. Aiemmin esitetyn pisteen potenssin perusteella $QD^2 = QP \cdot QA$, eli yhdistämällä tulokset $BQ = QD$, joten AQ on kolmion ABD keskijana.

Kotitehtävä

Aktiiviselle lukiolaiselle jätetään ratkottavaksi vanha sveitsiläinen kilpatehtävä:

Kaksi ympyrää leikkaavat toisensa pisteissä M ja N. Valitaan ensimmäiseltä ympyrältä mielivaltainen piste A, joka ei ole M tai N. Suorat AM ja AN leikkaavat toisen ympyrän myös pisteissä B ja C, vastaavasti. Osoita, että ensimmäiselle ympyrälle pisteeseen A piirretty tangentti on yhdensuuntainen suoran BC kanssa.

Ratkaisu esitettäneen jossakin tulevassa Solmussa.

Kehäkulmien ominaisuuksien, yhdenmuotoisuuden ja pisteen potenssin lisäksi tasogeometriasta matematiikkakilpailuihin harjoittelevan lukiolaisen kannattaa opetella ainakin Menelaoksen ja Cevan lauseet. Myös kolmion merkillisten pisteiden ominaisuuksien todentaminen on mahdollista koulumatematiikan keinoin. Materiaalia oppimisen tueksi on saatavissa nykyään melko runsaasti Solmun verkkosivuilta, esimerkiksi edellä mainitut lauseet löytyvät osoitteesta `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/nimigeom.pdf`

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta `http://avoinoppikirja.fi` löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.