MAA YO K2013 ja symbolinen laskin Ratkaisut laati JuLe/LYLL

Tämä tutkielma on tehty, jotta selviäisi, mikä merkitys symbolisella laskimella on pitkän matematiikan yo-tehtävien ratkaisussa tällä hetkellä. Tulos on yllättävä, ellei peräti järkyttävä. Jopa 9 tehtävistä ratkeaa suoraan laskimen avulla ilman, että laskija joutuu tekemään juurikaan omia johtopäätöksiä. Mihin on matematiikan opetus menossa? Lopussa on kommentteja aiheeseen liittyen.
Ratkaisut on tehty TI nSpire CX CAS –laskimella, suomenkielinen käyttöjärjestelmä, vain perustoiminnot käytössä. Tehtävistä laskettu vain ne, joista selviää ilman suurempaa ajattelutoimintaa, kunhan laskimen käyttö on hallinnassa.

Panu Ruoste, rehtori
Lohjan Yhteislyseon lukio

Ratkaisut MA yo K2013:

1. a) $(x-4)^2=(x-4)(x+4)$ $\quad$ |Laskin Solve

$x=4$

b) $\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}<-\frac{2}{15}x$ $\quad$ |Laskin Solve

$x<\frac{21}{22}$

c) Suoran pisteet ovat (1,7) ja (2,4).

Suoran yhtälö on $y=-3x+10$. $\quad$ |Laskimesta syöttämällä pisteet.

x-akselin leikkauspiste on $(3,33;0)$. $\quad$ |Laskimen kuvaajalta.

Siis leikkauspisteessähän $y=0$!

Tarkka leikkauspiste saadaan yhtälöstä

$0=-3x+10$ $\quad$ |Laskin Solve

$x=\frac{10}{3}$

Leikkauspiste on $\left(\frac{10}{3},0\right)$.

---

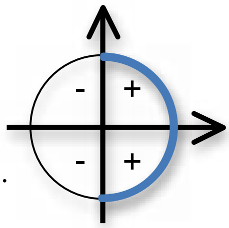
2. a) $f(x)=\sin 3x \qquad f'\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{3}{2}$ $\quad\vert$ Laskin Derivointi

b) $\overline{a}=4\overline{i}+\overline{j}-7\overline{k} \qquad \overline{b}=2\overline{i}-3\overline{j}-5\overline{k}$

$\overline{a}-b=2\overline{i}+4\overline{j}-2\overline{k}$ $\quad\vert$ Laskin Vektoritoiminto

$\left|\overline{a}-b\right|=2\sqrt{6}$ $\quad\vert$ Laskin Vektorin pituus

c) $\cos\alpha=\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\quad\vert$ Laskin. Harmillisesti cos-merkki menee vahingossa oikein.



cos

---

3. a) $\begin{cases} a=\frac{1}{b} \\ \frac{a+b}{2}=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-(\sqrt{3}-2) \\ b=\sqrt{3}+2 \end{cases}$ tai $\begin{cases} a=\sqrt{3}+2 \\ b=-(\sqrt{3}-2) \end{cases}$ $\quad\vert$ Laskin Solve

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=6$ molemmissa tapauksissa. $\quad\vert$ Laskin

b) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=x+y,\ x,\ y>0$ $\quad\vert$ Laskin (Domain-toiminto ei osaa kertoa määrittelyjoukkoa oikein).

---

4. Tehtävässä joutuu tekemään aluksi päätelmiä. Ei onnistu suoraan laskimella. Tehtävä on siis hyvin onnistunut. Tosin alkupäättelyn jälkeen lopputulos saadaan suoraan laskimesta.

---

5. $f(x)=(x^2-x-5)\cdot e^{-x},\ x\geq 0$

Suurin arvo on $f(4)=7e^{-4}(\approx 0{,}128)$ $\quad\vert$ Laskin Fmax

Pienin arvo on $f(0)=-5$ $\quad\vert$ Laskin Fmin

---

6. Toistokoe, toistoja 12 kpl, $P(\mathrm{O}) = 0,33$ ja $P(\mathrm{B}) = 0,17$.

a) Onnistumisia 0, 1, 2, ..., 9 kpl, onnistumisen tn $p = 0,33$

$$P(\text{korkeintaan 9 O-ryhmäläistä}) = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_9 = 0,999505 \approx 0,9995$$

b) Onnistumisia 3 tai 4 kpl, onnistumisen tn $p = 0,17$.

$$P(\text{3 tai 4 B-ryhmäläistä}) = p_3 + p_4 = 0,295172 \approx 0,295$$

(a ja b –kohdissa laskimen BinomPdf-toiminto, laskijan ei tarvitse ymmärtää, miten binomitodennäköisyys lasketaan)

---

7. Tehtävä on hyvin onnistunut, koska laskimella ei saa sitä suoraan laskettua ainakaan palikkatoiminnoilla. Ratkaisultaan yksinkertainen, mutta haastava.

---

8. a) $\begin{cases} y_1 = 12x^3 - 36x \\ y_2 = -12x^2 + 36x \end{cases}$

Käyrien leikkauspisteet ovat $(-3,-216)$, $(0,0)$ ja $(2,24)$. | Laskin Solve

b) $A = \int_{-3}^{0} (y_1 - y_2)\,dx + \int_{0}^{2} (y_2 - y_1)\,dx = 253$ | Laskin
Laskimen kuvaajasta päätelty
käyrien järjestys.

---

9. Laskin ei osaa ratkaista yhtälöä tarkasti, eikä myöskään kerro jaksoja. Mutta opastaa kyllä suomeksi, että saattaa löytyä muitakin ratkaisuja laskimen antamien likiarvojen lisäksi.

---

10. Tehtävä on hyvä, mutta vaativa. Vaatii laskijalta ihan ikiomaa ajattelua ja ymmärrystä.

---

11. Jono $\ln 2$, $\ln(2^x - 2)$, $\ln(2^x + 2)$ on aritmeettinen, kun peräkkäisten termien erotus on vakio:

$(d =)$ $\ln(2^x - 2) - \ln 2 = \ln(2^x + 2) - \ln(2^x - 2)$ | Laskin Solve

$$x = \frac{\ln 6}{\ln 2}$$

---

12. $y = \cos x,\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

a) $A(t) = 2 \cdot t \cdot \cos t,\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ | Tämä pitää keksiä ihan itse, mutta onneksi on todella selvä kuva tehtävänannossa

b) $A'(t) = 2\cos t - 2t \sin t,\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ | Laskin

Derivaatan nollakohta saadaan haarukoimalla:
A' on jatkuva ja $A'(0,861)$ sekä $A'(0,859)$ ovat eri merkkiset,
joten nollakohta löytyy 2 desimaalin tarkkuudella näiden t:n arvojen välistä:

$t \approx 0,86$ | Laskimen Solvella tämäkin on tietysti todellisuudessa etsitty.

. c) $A(t) = 2 \cdot t \cdot \cos t,\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, maksimiarvo on

$A(0,860334) = 1{,}12219 \approx 1{,}1$ | Laskin FMax

---

13. Tehtävä on melko helppo, b-kohdan perustelut vaativat hieman pohdintaa.
Hyvä tehtävä, ei suju laskimella suoraan ainakaan perustoiminnoilla.

---

14. $P(x) = x^2 + x - 2$

a) $P(x) = (x-1)(x+2)$ | Laskin Factor

b) $\dfrac{1}{P(x)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$

$\dfrac{1}{P(x)} = \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{1}{3(x+2)}$ | Laskin Expand eli "Laajenna". Pitäisi tietysti olla "Sievennä".

$\dfrac{1}{P(x)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{x-1} + \dfrac{-\frac{1}{3}}{x+2}$

joten $A = \dfrac{1}{3}$ ja $B = -\dfrac{1}{3}$.

c) $\int \frac{1}{P(x)}dx = \frac{-\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}{3} + C = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) + C,\ x \geq 2,\ C \in \mathbb{R}$ | Laskin

d) $\int_2^\infty \frac{1}{P(x)}dx = \frac{2\ln 2}{3}$ | Laskin

---

15. Vaatii omaa ajattelua. Ei suju laskimella suoraa näppäilemällä, kuten suurin osa tehtävistä. Hyvä ja vaativa tehtävä.

Kommentteja liittyen symbolisen laskimen käyttöön lukiomatematiikassa

Onko tämä nyt sitten matematiikkaa? Pitkän matematiikan yo-kokeessa peräti 9 tehtävää voi laskea suoraan laskimella käyttämättä hiukkaakaan omaa päätään. Ainoa, mitä vaaditaan on yksinkertainen nappulatekniikka ja laskimen mukana tulleen 40-sivuisen suomenkielisen ohjeen sivujen 2-29 muutamien esimerkkien harjoittelu jossain opiskelun lomassa. Mikäli koetilanteessa aivan kaikki ei muistu mieleen, niin laskin kyllä auliisti opastaa, ja ihan halutulla kielellä, myös suomeksi. Jos lisänä on pieni päättelykyky, voi helposti täydentää tehtävien ratkaisut sellaisiksi, että niistä saa ihan reilusti pisteitäkin. Kokeen maksimipistemäärä on 66. Edellä olevista 9 tehtävästä on mahdollista saada 57 pistettä laskimen avustuksella. Haloo!

Miten toteutuu opiskelijoiden tasavertainen kohtelu? Osalla opiskelijoista on tällainen menestyksen mahdollistama laskin. Osa heistä jopa on opetellut sitä käyttämään. Muilla ei tällaista luvallista lunttausmenetelmää ole, syynä esimerkiksi taloudelliset seikat, tekniikkapelko, opettajan esimerkki/asenne tms. Mikäli taas yo-tehtävät laaditaan niin, että estetään laskimen suora käyttö (vertaa edellä tehtävät 4, 7, 9, 10, 13 ja 15), niistä tulee samalla aivan liian vaativia suurimmalle osalle laskijoista.

Jos laskimen on tarkoitus olla apuväline ja opiskelijan on määrä itse tuottaa ”oleelliset välivaiheet” tehtävänsä ratkaisuun, niin heti tulee mieleen kaksi ongelmaa: Laskimen avustuksella nuo välivaiheet on kohtuullisen helppo arpoa, kun on jo suuntaviivat selvitetty muutamalla näppäimen painalluksella. Osa laskimista pystyy jopa antamaan vaadittavat välivaiheet. Toiseksi, onko kohtuullista jättää opiskelijan pääteltäväksi, mitkä ovat kulloinkin vaadittavat oleelliset välivaiheet? Eiväthän sitä nykyisin tiedä opettajakaan, kun aiheeseen liittyviä kattavia ohjeita ei ole eikä sellaisia varmasti voi ollakaan olemassa. Ei niitä ainakaan kukaan osaa aukottomasti soveltaa.

Lukion matematiikan opiskelijoilla on nykyisin suuria vaikeuksia aivan peruslaskutoimituksissa: murtoluvut, yhtälön ja epäyhtälön ratkaisu, yhdistetyn funktion derivointi jne. Hyvin harva osaa esimerkiksi jakaa luvun toisella käyttäen ala-asteella opittua ja sittemmin laskimen rutiininomaisen käytön takia täysin unohdettua jakokulmaa. Samoin tulee laskimen myötä käymään hyvin monelle muullekin aivan oleelliselle perusmatematiikan osa-alueelle. Jos kuvitelmissa on, että laskimen avustuksella laskurutiineihin ennen kulunut aika voidaan käyttää itse ongelmien ratkaisuun, niin tämä on täyttä puppua. Laskimen myötä nimittäin katoaa myös kyky ratkoa niitä ongelmia, koska matemaattinen ajattelutaito surkastuu ja muuttuu laitteistoriippuvuudeksi. Jo nyt monelle ylivoimainen lausekkeiden sieventäminen tulee olemaan katoavien taitojen listan kärkipäässä.

Laskimen myötä tulee yleistymään vastauskeskeinen matemaattisten ongelmien ratkaisumalli: tärkeintä on lopputulos eikä se, miten siihen päädytään. Matemaattisen ymmärryksen ja loogisen päättelyn kehittymisen kannalta kuitenkin paljon tärkeämpää on ymmärtää ongelman luonne ja siihen liittyvä matemaattinen problematiikka. Vastaus tulee sitten siinä sivutuotteena ja kylkiäisenä tulee aimo annos rutiinia ja kykyä selviytyä uusista vastaantulevista haasteista. Ja jos ymmärryksen löytymisen jälkeen vastaus on vähän pielessä, niin korjaaminen on pikku juttu, jos matemaattinen perusta on kunnossa.

Pikaisena korjausliikkeenä olisi syytä harkita sitä, että osa pitkän matematiikan kursseista suoritetaan ilman minkään tyypin laskimen apua. Valitsemalla tehtävien ja harjoitusten lukuarvot sopivasti, voi ratkaisuista selvitä ilman teknisiä apuneuvoja. Jos laskimettomuus aiheuttaa hankaluuksia, niin sitten otettakoon käyttöön aivan perusmallin funktiolaskimet, jotka esimerkiksi koulu voisi hankkia yo-kirjoituksia varten. Kustannukset ovat alle 10 euroa laskimelta, joten kenenkään talous ei tähän kaadu. Jotta itse matematiikan osaaminen korostuisi, voisi myös matematiikan ylioppilaskirjoituksista suorittaa esimerkiksi alkuosan ilman laskinta. Kun puolet kokeesta on selvitetty, palautetaan alkupään tehtävät ja noudetaan uudet sekä tarvittava laskin.

Nykyinen symbolisen laskimen käyttö johtaa siihen, että opiskelija tehtävää ratkaistessaan kysyy ensin oikeat vastaukset laskimelta ja sen jälkeen naamioi laskun näyttämään siltä, että hän on itse selvittänyt ongelman. Onko tässä tarkoitus huijata opiskelijaa itseään, koetehtävän korjaajaa vai kansainvälisiä osaamistutkimuksia tekevää suurta maailmaa? Lopputuloksena tulee joka tapauksessa olemaan se, että jo nykyisellään heikko matemaattinen osaaminen vähenee entisestään. Jos se on tavoite, niin sitten ollaan oikealla tiellä.

Lohjan Yhteislyseon lukio
matemaattisten aineiden lehtorit

FL Jukka Lehtonen

FM Samuli Heikinaho

FM Sari Korte

FT Sara Lehtovuori

FM Erkki Mustonen

FM Olavi Nurmi

FM Tapio Nygren

FM Esa Ritvanen

Lisätietoja:
Jukka Lehtonen
jukka.lehtonen@lohja.fi