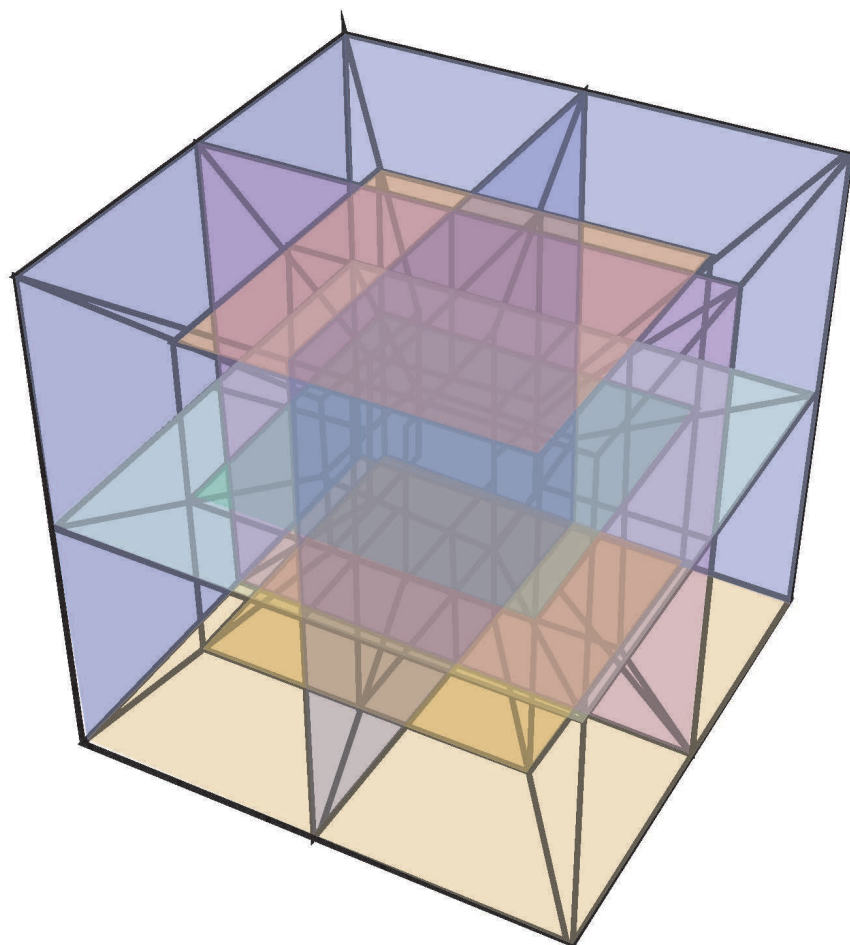


Solmu

Matematiikkalehti
3/2013

<http://solmu.math.helsinki.fi>



Solmu 3/2013

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

<http://solmu.math.helsinki.fi>

Päätoimittaja:

Markku Halmetoja, lehtori, Mäntän lukio

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti:

toimitus@solmu.math.helsinki.fi

Toimituskunta:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Sirkka-Liisa Eriksson, professori, Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, apulaisprofessori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Matti Lehtinen, dosentti, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, tutkijatohtori, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Hilkka Taavitsainen, lehtori, Ressun lukio

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Juha Lehtbäck, tutkijatohtori, juha.lehtback@jyu.fi, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, jorma.mattila@lut.fi, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, jorma.merikoski@uta.fi, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Petri Rosendahl, assistentti, petri.rosendahl@utu.fi, Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, matti.nuortio@oulu.fi, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, antti.viholainen@uef.fi, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

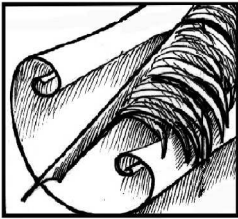
Numeroon 1/2014 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 2.1.2014 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus: Lyhyestä matematiikasta e-laskentoon (Markku Halmetoja)	4
Matematiikka kunniaan (Matti Tyynysniemi)	6
Hex-pelin matematiikkaa (Tuomas Korppi)	7
Kilpailumatematiikkaa ja matematiikkakilpailuja (Jorma Merikoski)	12
Kuusi haastavaa tehtävää: Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset Luxemburgissa 8.-14.4.2013 (Esa V. Vesalainen)	13
Vähän melkein kaikesta (Matti Lehtinen)	18
Sinin yhteenlaskukaava helposti (Jorma Merikoski)	20
Tieteen huipulla (Marjatta Näätänen)	23
Karamatan epäyhtälö (Markku Halmetoja)	24
Kesäkoulussa Moskovassa (Cliona Shakespeare)	29
Laskutikulla silmään (Lehtori K.)	30



Lyhyestä matematiikasta e-laskentoon

Pääkirjoitus

LUMA-keskuksen nettisivuilla pari vuotta sitten nimimerkki Negatiivin esittämä ajatus lukion lyhyen ja pitkän matematiikan yhdistämisestä on saamassa konkreettisia muotoja. Vuoden 2012 lopulla perustettu Pro lukio ry on lukion tulevaa tuntijakoa koskevassa kannanotossaan [1] päätenyt ajatukseen, että lukion matematiikka alkaisi kahdella kaikille yhteisellä kurssilla, minkä jälkeen oppimäärät eriytyisivät matemaattisluonnontieteellisesti suuntautuvaan laajaan matematiikkaan ja yhteiskunnallisesti suuntautuvaan yleiseen matematiikkaan. Suomen Lukiolaisten Liitto, jonka edustaja istuu opetushallituksen asettamassa tuntijakotyöryhmässä, on esittänyt samansuuntaisia ajatuksia. Pro lukio ry:n jäsenistö koostuu pääasiassa eteläsuomalaisten lukiodien rehtoreista ja kattavuus lie-nee alle kymmenesosa kaikista maamme lukioista. Yhdistys kuitenkin pyrkii edustamaan koko lukiokenttää suhteessa poliittisiin päättäjiin ja ylimpään kouluhal- lintoon. Sen kannanottojen painoarvoa on vaikea ar- vioida, mutta jos ja kun sen esittämät linjaukset ovat yhdensuuntaisia kouluasioista päättävien poliitikkojen ja virkamiesten keskuudessa kytevien ajatusten kanssa, niin niillä tietenkin on merkitystä.

Lukioissa, joihin tullaan yli yhdeksikön keskiarvoilla, voidaan ongelmitta opettaa kaikille yhteisesti nykyi- sen pitkän matematiikan kaksi ensimmäistä kurssia. Suurin osa lukioista ei kuitenkaan voi valita oppilai- taan ”parhaat-päältä”-periaatteella, vaan niihin tul- laan myös huomattavan vaatimattomilla valmiuksilla. Jos matematiikan opiskelu alkaa kahdella kaikille yh- teisellä kurssilla, niin niiden sisältöjen on oltava lähellä

nykyistä lyhyttä matematiikkaa. Se taas ei anna pit- kän matematiikan opiskelijoille tarvittavia laskennalli- sia valmiuksia jatkossa vastaan tulevien asioiden kun- nolliseen omaksumiseen. Tällöin välttämätöntä perus- laskentaa on opiskeltava varsinaisten pitkän matemati- kan kurssien yhteydessä, mikä auttamatta johtaa en- tistä enemmän oppimisen pinnallistumiseen. Käytän- nössä pitkän matematiikan opiskelun alkaminen myö- hästy puolella vuodella ja jää nykyistä huomattavasti suppeammaksi, mäkihyppytermejä käyttäen: ponnistus myöhästyy, hyppy ei saa ilmaa alleen ja jää lyhyeksi.

Viime aikoina on tiedotusvälineissäkin kiinnitetty hu- miota korkeakouluissa aloittavien opiskelijoiden hu- ontoneisiin matematiikan taitoihin. Aamulehdessä julkaistussa artikkelissa [2] todetaan, että Tampereen teknillisen yliopiston aloittavista joka kuudes joutuu alkajaisiksi matematiikan tukiopetukseen. Toimittajan haastattelema TTY:n matematiikan laitoksen johtaja, professori Seppo Pohjolainen toteaa, että ”yliopistolla olisi parempaakin tekemistä kuin kerrata lukion mate- matiikkaa”. Sopii toivoa, että korkeakoulut nyt lukion tuntijaon ollessa valmisteluvaiheessa ottavat selkeästi kantaa matematiikan oppimisen puolesta ja torjuvat kannanotoissaan mielettömät suunnitelmat kaikille lu- kiolaisille yhteisistä matematiikan kursseista.

Nyky-yhteiskunnassa miltei kaikki tarvitsevat oman elämänsä hallinnassa jonkin verran matemaattista osaamista, ja humanistisiltakaan aloilta tuskin löy- tyy lukion jälkeistä opiskelupaikkaa, jossa voisi välttää esimerkiksi tilastolliset menetelmät. Lukion tulevassa tuntijaossa ja opetussuunnitelmassa on siis ratkaistava

miten matematiikkaa tai laskentaa voi opettaa henkilöille, jotka eivät peruskoulussa viettämänsä yhdeksän vuoden aikana ole oppineet edes peruslaskutoimituksia muuttujan käsitteestä ja kirjaimilla laskemisesta puhumattakaan. Lukiossa luonnollisesti lyhyt matematiikka on tällaisille oppilaille ainoa oikea vaihtoehto. Sen valitsevat yleensä myös ne, joita matematiikka ei liiemmin kiinnosta mutta joilla ei ole omaksumisvaikeuksia. Oppilasjoukko on siis varsin heterogeeninen, mikä vaikeuttaa opetuksen suunnittelua. Kaikkien olisi saatava myöhemmässä elämässä tarvitsemiaan valmiuksia. Lyhyen matematiikan opetussuunnitelman laatiminen, oppimateriaalien valmistaminen ja opetus onkin haastavampaa kuin pitkän matematiikan opetuksen suunnittelu, sillä siinä voidaan edetä suoraviivaisesti kirjoituksessa [3] esitettyjä sisältöjä seuraten. Seuraavassa pohditaan lyhyen matematiikan oppimäärää ja opetusjärjestelyjä ainoastaan yleisellä tasolla.

Nykyinen lyhyt matematiikka ei kaikilta osin ole järkevä kokonaisuus eikä se anna riittäviä valmiuksia jatkoopinnoissa vastaan tulevien laskennallisten menetelmien omaksumiseen. Jo nimitys ”lyhyt matematiikka” pitää sisällään ajatuksen, että kyseessä on lyhennelmä ”pitkästä matematiikasta”, jonka tavoitteet ovat toiset ja yleishyödyllistä laskentaa korkeammalla. Siksi olisi parempi että määreet poistettaisiin, pitkää matematiikkaa kutsuttaisiin yksinkertaisesti matematiikaksi ja lyhyttä matematiikkaa vaikkapa laskennoksi. Lukion aloittava saisi siis valittavakseen matematiikan tai laskennon, tietenkin täydellä vaihto-oikeudella. Laskennon opetus on perustettava nykyistä kattavammin laskinten ja tietokoneiden varaan, joten oppiainetta olisi ehkä parempi kutsua *e-laskennoksi*. On nimittäin tunnustettava se tosiasia, että kaikki lukioon tulevat eivät opi peruslaskutoimituksia, lausekkeiden käsitteilyä eikä yksinkertaistenkaan yhtälöiden ratkaisemista. Nämä asiat on luonnollisesti käytävä opetuksessa läpi mutta niin, että oppilaat tekevät laskunsa miltei yksinomaan symbolista laskinta käyttäen. Oppimisen painopiste siirtyy lausekkeiden sieventelyistä ja yhtälöiden ratkaisemisesta niiden oikeinkirjoitukseen ja vastaus-ten järjestyksen arviointiin. Laskemisesta säästytvä aika voidaan käyttää ongelmien matemaattiseen mallinnukseen. Tämä voi jopa lisätä kiinnostusta matemaattisia asioita kohtaan. Todennäköisyyslaskennan, geometrian, trigonometrian ja jopa differentiaalilaskennan alkeet kuuluvat luonnollisesti e-laskennon oppimäärään, ja niissäkin hyödynnetään laskinta maksimaalisesti laskutekniset vaikeudet ohittaen. Syventävänä kurssina voidaan opiskella tilastollisia menetelmiä kuten nykyinkin. Vektorioppi olisi hyvä liittää tilastomatematiikkaan n -ulotteisena. Näin esimerkiksi korrelaatiokertoimen käsittelyyn saataisiin geometrista perspektiiviä. Toisena syventävänä kurssina voisi olla integraalilaskenta. Se tulisi esittää deskriptiivisesti ilman integraalifunktiota. Kurssilla yksinkertaisesti todettaisiin, että koordinaatistossa käyrän ja vaaka-akselin rajoitta-

ma pinta-ala voi esittää melkein mitä tahansa suurenta kappaleen kulkemasta matkasta todennäköisyyteen tai rakennusprojektin nielemän rahan määrään, minkä jälkeen tällaisia tilanteita voidaan mallintaa yksinkertaisissa tapauksissa ja laskea näin saatavat integraalit laskimella. Tästä olisi hyötyä ainakin niille, jotka päätyvät amk:n teknisille opintolinjoille tai kamppailevat humanististen tai yhteiskunnallisten alojen tilastokursseilla jatkuviin satunnaismuuttujiin perustuvien tilastollisten testien kanssa.

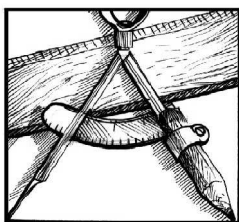
Oppituntien sujuvuuden kannalta on olennaista, että opetusryhmässä on kaikilla samanlainen laskin. Koulujen tulisi oppikirjatietojaan julkaistessaan ilmoittaa myös minkä merkisiä laskimia tullaan käyttämään. Oppikirjojen tekijöiden olisi laadittava sähköisistä materiaaleistaan yleisimmille laskinmerkeille räätälöidyt versiot. Ei liene ylivoimaista laskea samat esimerkit useammalla laskimella ja sijoittaa suoritusten pdf-versiot kustantajan sivuille oppilaiden nykyaikaisiin rihvelitauluihin ladattaviksi.

Matematiikan yhteiskunnallinen arvo ja merkitys on yleisesti tunnettua ja tunnustettua, minkä vuoksi tunnetaan oudolta, että korkeimman yleissivistävän koulun päättökokeen voi suorittaa osallistumatta jonkintasoisesta matematiikan kokeeseen. Sivistysvaltion tunnusmerkit eivät täyty, ellei matematiikka jossakin muodossa ole äidinkielen rinnalla ylioppilaskirjoitusten pakollisena osana. Pakollisuus toisi merkittävää ryhtiä opiskeluun. Oppimistulokset paranisivat kun olisi pakko opiskella. Pakko on tässä tulkittava lähinnä välttämättömyydeksi. Oppilaathan eivät ole koulussa asiakkaina vaan tekemässä työtä, jotta he voisivat aikanaan ottaa haltuunsa teknistyneen yhteiskuntamme monimutkaisine toimintoineen. Se edellyttää itse kultakin kykijensä mukaisia matemaattisia tai ainakin laskennallisia valmiuksia. Joutuuhan ajokortin suorittajakin opiskelemaan liikennesäännöt eikä kukaan ole siitä mieltään pahoittanut.

Viitteet

- [1] *Pro lukion yhdistyskokous 17.5.2013 hyväksytty kannanotto lukiouudistukseen*, http://peda.net/img/portal/2829003/Pro_Lukio_kannanotto_17.5.2013.pdf
- [2] *Joka kuudes teekkari joutuu heti kertaamaan*, Aamulehti 30.4.2013.
- [3] *Pitkän matematiikan opetussuunnitelmasta*, http://solmu.math.helsinki.fi/2013/2/paak_2_13.pdf

Markku Halmetoja



Matematiikka kunniaan

Matti Tyynysniemi

HS:n talouden ja politiikan toimittaja

Usein kuulee sanottavan, että matematiikka oli kouluaineista turhimpia, koska esimerkiksi algebraa ei ole tarvinnut kertaakaan koulun jälkeisessä elämässä. Laskutoimitukset hoituvat koneella.

Vähän sama asia olisi sanoa, että koulun hiihtotunnit olivat turhia, koska suksia ei nykypäivänä tarvita siirtymisiin.

Ihmiset nimittäin kyllä hiihtävät, kuntoillakseen. Nykyarki edellyttää ihmisiltä niin vähän fyysistä ponnistelua, että jos emme käyttäisi kehoamme myös pelkän kuntoilun tähden, huonosti kävisi.

Samalla tavalla aivojakin voisi olla tarpeen harjoittaa niiden itsensä tähden, vaikka tietokoneet ovat monessa tapauksessa poistaneet välittömän tarpeen ajatella itse. Hyvinvointimme perustuu viime kädessä kykyymme ajatella.

Nykyään on aiheellisesti muotia kysellä, millä eväillä Suomi vastedeskin pärjäisi kansainvälisessä kilpailussa. Katse kääntyy usein herkästi koulutukseen, koska se antaa mahdollisuuden vaikuttaa ihmisten taitoihin ja taipumuksiin.

Hallitusohjelma tarjoaa hyvää ajankuvaa: se lupasi vahvistaa peruskoulussa esimerkiksi taito- ja taideaineita sekä yhteiskunnallista kasvatusta. Ihan kiva, mutta koulupäivässä on rajallisesti tunteja, ja talouselämän sekä koko kansakunnan tarvitsema raaka osaaminen perustuu etupäässä muihin asioihin.

Matematiikan osaaminen tutkitusti vähenee, ja korkeakouluvaiheessa joudutaan aloittamaan aivan perusteista. Yksin ryhmätyötaitoisilla ”hyvillä tyypeillä” ei pitkälle pötkitä: pitäisi myös osata jotain.

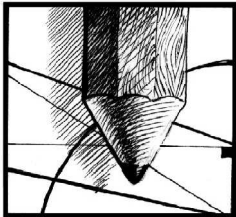
Matematiikka on paitsi keskeinen kansalaistaito myös kouluaineista se, joka parhaiten kehittää ajattelukykyä.

Parhaimmillaan matematiikassa unohdetaan laskutoimitukset ja ajatellaan abstrakteja asioita sekä niiden välisiä suhteita. Mikä yksittäinen taito on tärkeämpi? Kuka tahansa hyötyisi matematiikan ymmärryksestä ja harjoittelusta.

Draaman sun muiden sijaan kouluissa pitäisi lisätä matematiikan opetusta ja nostaa sen vaatimustasoa. Osana tätä pitäisi käyttää laajasti tasoryhmiä, jotka auttaisivat myös motivaatioon. On hieno tunne aidosti ymmärtää jokin asia, ja jokainen voisi kokea onnistumisen elämyksiä tasollaan.

Jos osaaajamme pystyvät vain mekaanisesti soveltamaan muiden hankkimaa tietoa ja kaavoja, on turha haaveilla innovaatioista. Oivallukset vaativat muutakin. Kaavan soveltaminen ei ole osaamisen merkki, sen johtaminen on.

Kirjoitus on julkaistu Helsingin Sanomissa 8.8.2013
<http://www.hs.fi/paakirjoitukset/a1375851810926>



Hex-pelin matematiikkaa

Tuomas Korppi

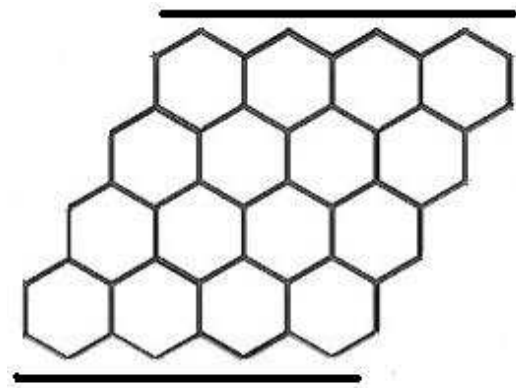
Johdanto

Hex on kahden pelaajan strategiapeli, jonka ovat keksineet toisistaan riippumatta matemaatikot Piet Hein ja taloustieteen Nobelin saanut John Nash¹. Peli on siitä mielenkiintoinen, että sitä on mahdollista analysoida matemaattisesti aika pitkälle, mutta ei kuitenkaan niin pitkälle, että käytännön pelaaminen olisi orjallista kaavojen seuraamista.

Tässä kirjoittelmassa esittelemme Hexin ja todistamme muutaman peliä koskevan teoreeman. Esityksemme perustuu osin teokseen Browne [1].

Hexin säännöt

Hexiä pelataan timantinmuotoisella pelilaudalla, jolla on kuusikulmioista koostuva ruudutus (nk. heksaruudutus). Kaksi vastakkaista pelilaudan sivua on merkitty mustiksi ja toiset kaksi vastakkaista sivua valkoisiksi. (Katso kuva 1.) Piet Hein suositteli peliin 11×11 kuusikulmiosta eli *heksasta* koostuvaa lautaa, joka on nykyisin yleisimmin käytetty, ja John Nash puolestaan 14×14 heksasta koostuvaa lautaa. Allekirjoittaneen suosikkikoko on 13×13 .



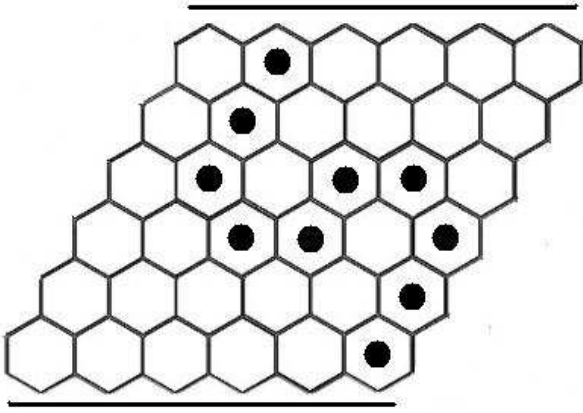
Kuva 1: 4×4 -lauta.

Toinen pelaaja pelaa mustilla pelinappuloilla ja toinen valkoisilla. Pelinappuloita oletetaan olevan tarpeeksi niin, että ne eivät voi loppua kesken.

Peli alkaa tyhjältä laudalta. Vuorollaan pelaaja asettaa yhden omanvärisensä pelinappulan johonkin pelilaudan vapaaseen kuusikulmioon.

Pelin voittaa se pelaaja, joka saa yhdistettyä omanvärisensä pelilaudan sivut omanvärisistä, vierekkäisissä heksoissa sijaitsevista nappuloista koostuvalla nappulaketjulla. Voittava ketju saa mutkitella kuinka paljon tahansa, kunhan se yhdistää sivut. (Katso kuva 2.) Laudan kulmaheksojen katsotaan kuuluvan kumpaankin viereiseen sivuun.

¹Anekdootin mukaan Nashin keksimänä peli tunnettiin nimellä *John* (englanninkielinen slangi-ilmaus vessalle), koska pelilautaa muistuttaa vessan lattian laatoitusta.



Kuva 2: Mustan voittopolku. Ylä- ja alalaidat on yhdistetty.

Täyden informaation pelit

Tarkoitamme täyden informaation pelillä lauta- tai vastaavaa peliä, joka toteuttaa kaikki seuraavat ehdot:

- Pelissä ei ole satunnaisuutta (kuten napanheittoa).
- Pelissä ei ole tietoa, jonka vain osa pelaajista tietäisi (kuten pelaajan kädessä olevat kortit).
- Pelaajat tekevät siirrot vuorotellen. (Pelissä ei siis ole kivi-sakset-paperi -pelin tyyppistä yhtäaikaista siirtojen valitsemista.)

Siis esimerkiksi shakki, go ja hex ovat täyden informaation pelejä.

Voittostrategialla tarkoitamme menetelmää, jota seuraamalla pelin voittaa varmasti. Tasapelistrategia tarkoittaa strategiaa, jota seuraamalla saa aikaan varmasti joko voiton tai tasapelin.

Voidaan todistaa seuraava teoreema. Todistus jätetään vaikeahkoksi harjoitustehtäväksi. Tehtävää tosin kannattaa yrittää vasta siinä vaiheessa, kun on lukenut tämän kirjoitelman loppuun ja saanut jonkinlaisen kuvan siitä, kuinka tällaisia asioita voidaan todistaa.

Teoreema 1. *Äärellisessä, kahden pelaajan täyden informaation pelissä jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia.*

Shakki on äärellinen peli, koska shakissa on sääntö, jonka mukaan peli on tasapeli, kun laudan asema on toistunut kolme kertaa. Näin ollen meillä on tulos, jonka mukaan shakissakin jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. Ei kuitenkaan tiedetä, mikä kyseisistä vaihtoehdoista pätee. On myös mahdollista (ja jopa luultavaa), että kyseiset strategiat ovat niin monimutkaisia, että ihmiset eivät koskaan tule tuntemaan niitä.

Edellisen tuloksen nojalla myös Hexissä jommalla kummalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. Hexistä tiedetään kuitenkin hiukan enemmänkin, ja tätä käsittelemme seuraavassa luvussa.

Teoreemalle saadaan helposti seuraava korollaari:

Korollaari 2. *Jos edellisessä teoreemassa peli ei voi päättyä tasapeliin, jommalla kummalla on voittostrategia.*

Huomautamme, että pelin äärellisyysehto on myös olennainen. On olemassa monimutkaisia joukko-opillisia kahden pelaajan täyden informaation pelejä, jotka toteuttavat seuraavat kaikki ehdot:

- Pelissä tehdään yhteensä ääretön jono siirtoja ja voittaja ratkaistaan tällaisen äärettömän siirtojonon perusteella.
- Jokainen peli päättyy jomman kumman pelaajan voittoon.
- Kummallakaan ei ole voittostrategiaa.

Jos tässä pelaajat ovat A ja B , jokaiselle A :n strategialle löytyy siis B :n strategia, joka voittaa sen, ja jokaiselle B :n strategialle löytyy A :n strategia, joka voittaa sen.

Hexin perustulokset

Tässä luvussa todistamme, että Hex-peli ei voi päättyä tasapeliin. Itse asiassa todistamme vahvemman tuloksen, jonka mukaan täyteen pelatulla laudalla toisella ja vain toisella pelaajalla on voittopolku. Todistamme myös, että Hexissä voittostrategia on pelin aloittajalla. Tämä tulos on kuitenkin teoreettinen olemassaolotulos, ja käytännön voittostrategiaa ei tunneta.

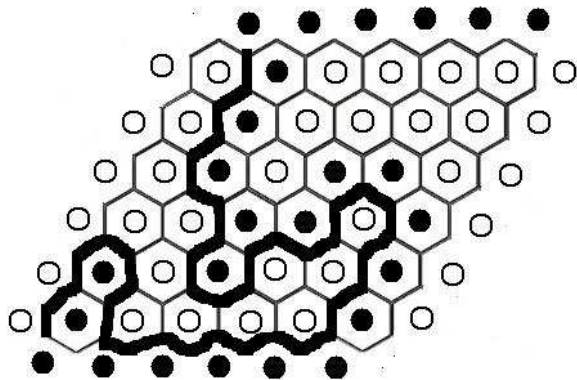
Teoreema 3. *Hex-peli ei voi päättyä tasapeliin.*

Todistus: Oletetaan, että lauta on pelattu täyteen. Osoitamme, että tässä tilanteessa toisella ja vain toisella pelaajalla on voittava nappulaketju. Teknisistä syistä oletamme, että myös laudan ulkopuolella on nappuloita, mustien sivujen vieressä mustia ja valkoisten sivujen vieressä valkoisia.

Oletetaan, että ala- ja yläsivut ovat mustia ja oikea ja vasen sivu valkoisia.

Muodostamme tässä todistuksessa polun, joka kulkee heksojen välisiä reunaviivoja pitkin niin, että kaikissa kohdissa polun vasemmalla puolella on valkea nappula ja polun oikealla musta nappula. Tässä siis oikea ja vasen määritellään suhteessa polkua kulkevaan henkilöön. Huomautamme, että jos olemme muodostaneet polkua n askelta ja tulleet kolmen heksan leikkauspisteeseen, voimme aina jatkaa polkua. Jos edessä on valkea nappula, jatkamme polkua oikealle, ja jos edessä on musta nappula, jatkamme polkua vasemmalle.

Aloitamme polun laudan vasemmasta alanurkasta. Jos siinä on valkoinen nappula, aloitamme sen alapuolelta (tällöin aloituspisteen alla on musta nappula laudan ulkopuolella), ja jos siinä on musta nappula, aloitamme sen vasemmalta puolelta (jolloin sen vasemmalla puolella on valkea nappula laudan ulkopuolella). Jatkamme polkua, kunnes törmäämme laudan ylä- tai oikeaan laitaan. Edellisen kappaleen perusteella polkua voidaan jatkaa näin. Jos törmäämme laudan ylälaitaan, polun oikealla puolella on voittava musta ketju, ja jos törmäämme oikeaan laitaan, polun vasemmalla puolella on voittava valkea ketju. Siis jommalla kummalla pelaajalla on voittava ketju. (Polusta katso kuva 3).



Kuva 3: Vahvennettuna polku, joka konstruoitiin Teoreeman 3 todistuksessa.

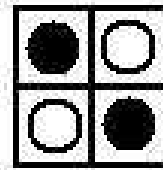
Polkumme tosiaan päättyy lopulta joko oikeaan tai ylälaitaan. Se ei nimittäin voi päättyä silmukkaan, koska tällöin silmukan lopussa olisi vääränvärisiä nappuloita ketjun oikealla tai vasemmalla puolen.

Perustelemme vielä sen, että polun toisella puolella on tosiaan voittava ketju. Oletetaan, että törmäsimme ylälaitaan. (Jos törmäsimme oikeaan laitaan, todistus menee samoin.) Jokaisen polkuun kuuluvan heksan sivun oikealla puolella on musta pelinappula. Koska kahdella peräkkäisellä polkuun kuuluvalla heksan sivulla on yhteinen kärki, yhteinen kärki on myös niillä peräkkäisillä heksoilla, joissa on mustat pelinappulat. Kyseisillä heksoilla on myös yhteinen sivu, koska heksalaudalla kahdella heksalla on yhteinen sivu, jos niillä on yhteinen kärki. Siis edellä mainittu musta ketju koostuu heksoista, joista kahdella peräkkäisellä on aina yhteinen sivu, joten kyseessä on voittoketju.

Lisäksi havaitsemme, että voittava ketju jakaa pelilaudan kahtia niin, että tilanne, jossa kummallakin on voittava ketju on mahdoton. $\square$

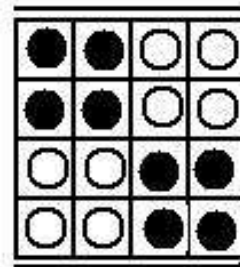
Todistuksessa mainitut seikat tarkoittavat sitä, että ainoa keino blokata vastustaja Hex-pelissä on muodostaa oma voittava ketju. Käytännön pelissä tämä tarkoittaa sitä, että Hexissä hyökkääminen (oman ketjun muodostaminen) ja puolustaminen (vastustajan estäminen) ovat yksi ja sama asia.

Todistuksemme käytti olennaisesti hyväkseen sitä, että lautamme on heksalauta. Tätä käytetään hyväksi siinä vaiheessa, kun todetaan, että polun jommalla kummalla puolella on voittava ketju. Neliöruuduista koostuvalla laudalla olisi mahdollista tehdä nk. ristileikkaus (kuva 4), joka estäisi voittavan ketjun syntymisen.



Kuva 4: Ristileikkaus.

Ristileikkauksen avulla on mahdollista tehdä neliöruuduilla pelattavalle Hex-pelille tasapelitilanne, joka on esitetty kuvassa 5.



Kuva 5: Ruutulaudalla Hex voi päättyä tasapeliin.

Teoreema 4. Hex-pelissä ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia.

Todistus: Oletetaan, että toisena pelaavalla on voittostrategia S ja johdetaan ristiriita. Ensimmäisenä pelaava muodostaa strategian S' , joka on muutoin sama kuin S , mutta siinä mustan ja valkoisen roolit on vaihdettu, ja lautaa on peilattu jomman kumman lävistäjän suhteen niin, että sivujen väriytykset vastaavat uusia pelaajien rooleja.

Nyt ensimmäisenä pelaava voi pelata seuraavasti: Hän tekee ensimmäisen siirron mielivaltaisesti. Tämän jälkeen hän pelaa strategialla S' kuvitellen, ettei ole tehnyt ensimmäistä siirtoaan. Jos hänen jossain kohti peliä täytyy tehdä S' :n mukaan ensimmäinen siirtonsa, hän lakkaa kuvittelemasta, ettei ole tehnyt ensimmäistä siirtoaan, tekee mielivaltaisen siirron ja kuvittelee jatkossa, ettei ole tehnyt uutta mielivaltaista siirtoaan. Jos hänen täytyy myöhemmin tehdä S' :n mukaan se siirto, jota hän ei kuvittele tehneensä, hän lakkaa kuvittelemasta...

Koska S on voittostrategia, sitä on myös S' . Koska siitä siirrosta, jota ensimmäinen pelaaja ei kuvittele tehneensä, ei ole ensimmäisenä pelaavalle missään tilanteessa haittaa, ensimmäisenä pelaava voittaa. Ristiriita sen kanssa, että toisena pelaavalla on voittostrategia.

Koska kyseessä on äärellinen peli, joka ei voi päättyä tasapeliin, jommalla kummalla on voittostrategia. Koska edellisen argumentin nojalla toisena pelaavalla ei ole voittostrategiaa, voittostrategia on ensimmäisenä pelaavalla. $\square$

Samanlaisella argumentilla voidaan näyttää, että missä tahansa äärellisessä kahden pelaajan täyden informaation pelissä, joka ei voi päättyä tasapeliin, jossa pelaajien roolit ovat symmetriset, eikä siirrosta ole missään tapauksessa siirron tekijälle haittaa, on ensimmäisenä pelaavalla voittostrategia. Jos muut ehdot pätevät, mutta peli voi päättyä myös tasapeliin, samanlaisella argumentilla voidaan näyttää, että joko ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia tai peli päättyy optimaalisella pelillä tasapeliin.

Tässä on huomattava, että ensimmäisen pelaajan voittostrategian olemassaolon todistaminen on puhdas olemassaolotodistus: Se kertoo, että ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia, mutta se ei kerro mitään siitä, millainen tuo voittostrategia on. Hexin tapauksessa sitä ei tiedetäkään, joten käytännön pelaaminen on mielekästä.

Reilun pelin aikaansaaminen

Kuten edellisessä luvussa totesimme, ensimmäisenä pelaavalla on teoreettinen etu. Pelikokemus on osoittanut, että ensimmäisenä pelaavalla on huomattava etu myös käytännön peleissä. Tämän johdosta Hex-pelin alussa käytetäänkin nk. kakunleikkaussääntöä (englanniksi *pie rule*), joka toimii seuraavasti:

- Ensimmäisenä pelaava tekee mustilla aloitussiirron.
- Tämän jälkeen toisena pelaava valitsee, pelaako hän mustilla vai valkoisilla.
- Tämän jälkeen peli jatkuu valkean pelaajan siirrolla ja sen jälkeen normaalisti vuorotellen värejä.

Tätä protokollaa noudattaen ensimmäisen mustan siirron ei kannata olla liian hyvä, vaan sellainen, että kummallakin on siirron jälkeen suunnilleen yhtä hyvät voitonmahdollisuudet. Kakunleikkaussääntö onkin saanut nimensä operaatiosta, jossa jaetaan kakku kahteen osaan niin, että ensimmäinen ruokailija leikkaa kakun kahtia ja toinen ruokailija valitsee kumman osan ottaa. Toinen osa jää halkaisijalle.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että käytettäessä Hexissä kakunleikkaussääntöä on toisena pelaavalla teoreettinen voittostrategia.

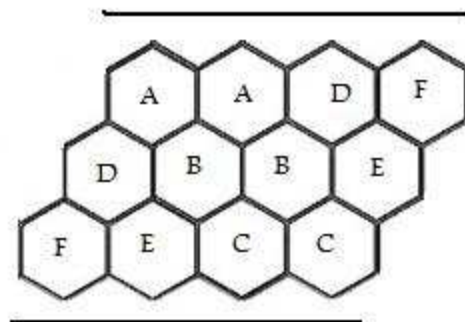
Jos toinen pelaajista on heikompi, ei kakunleikkaussääntöä yleensä käytetä, vaan heikompi pelaaja yksinkertaisesti aloittaa pelin. Hänellä on teoreettinen etu,

ja myös jonkinasteinen käytännön etu. Koska voittostrategiaa ei tunneta, ei etu ole paremmalle pelaajalle ylitysepääsemätön.

Voisi olla houkutteleva idea antaa heikommalle pelaajalle tasoitusta niin, että hän pelaa ylä- ja alalaitoja yhdistäen, ja lauta on tässä suunnassa kapeampi. Tämä idea ei kuitenkaan toimi, koska tällöin on olemassa tunnettu voittostrategia.

Teoreema 5. *Oletetaan, että meillä on Hex-lauta, joka on pystysuunnassa $n - 1$ heksan kokoinen ja vaakasuunnassa n heksan kokoinen. Tällöin ylä- ja alalaitoja yhdistävällä pelaajalla on tunnettu voittostrategia, vaikka hän pelaisi toisena.*

Todistus: Merkitään laudan heksat kirjaimilla kuten kuvassa 6.

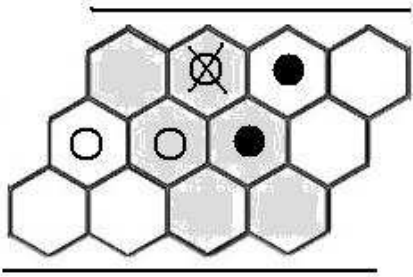


Kuva 6: Ylä- ja alasivuja yhdistävän voittostrategia.

Oletetaan, että ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaa toisena.

Nyt toisena pelaavan voittostrategia on se, että hän pelaa aina heksaan, missä on sama kirjain kuin vastustajan edellisessä pelaamassa heksassa. Todistamme, että tämä on voittostrategia.

Oletetaan, että toinen pelaaja pelaa tällä strategialla, ja tehdään vastaoletus, että ensimmäisenä pelaavalla on voittava ketju P . Oletamme, että ketju alkaa vasemmasta laidasta ja päättyy oikeaan laitaan. Voidaan olettaa, että voittoketju on minimaalinen niin, että se ei leikkaa itseään. Olkoon h ketjun ensimmäinen heksa, jossa ketju käy joidenkin oikeanpuoleisten heksojen A, B tai C kautta. Olkoon h' ketjun edellinen heksa. Koska h :ssa ja h' :ssa ei voi olla samaa kirjainta, on h yläviistoon h' :sta. Olkoon h' ketjun m :s nappula ja Q ketjun m ensimmäistä nappulaa. Olkoon R toisen pelaajan vastaukset Q :ta edustaviin siirtoihin yllä kuvaillulla voittostrategialla. Nyt Q ja R muodostavat ”pussin”, jonka sisälle h jää, eikä voittoketju voi edetä maaliinsa kulkematta sellaisen heksan läpi, jossa on R :n nappula (mikä on mahdotonta sääntöjen perusteella) tai Q :n nappula (mikä on mahdotonta, koska oletimme, ettei voittoketju leikkaa itseään.) (Pussi on kuvattu kuvassa 7.)



Kuva 7: Musta on pelannut valkean rastilla merkityn nappulan pussiin.

Siis ensimmäisenä pelaavalla ei voi olla voittoketjua. Koska peli ei voi päättyä tasapeliin, toisena pelaava voittaa, joten hänen strategiansa on voittostrategia.

Vaikka olemme yllä käsitelleet 4×3 -lautaa, nähdään helposti, että annettu argumentti yleistyy kaikille laudan koille $n \times (n - 1)$. $\square$

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että sama pätee myös siinä tapauksessa, että pysty- ja vaakasuuntien kokojen ero on enemmän kuin 1, sekä se, että sama pätee myös silloin, kun ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaaja aloittaa pelin.

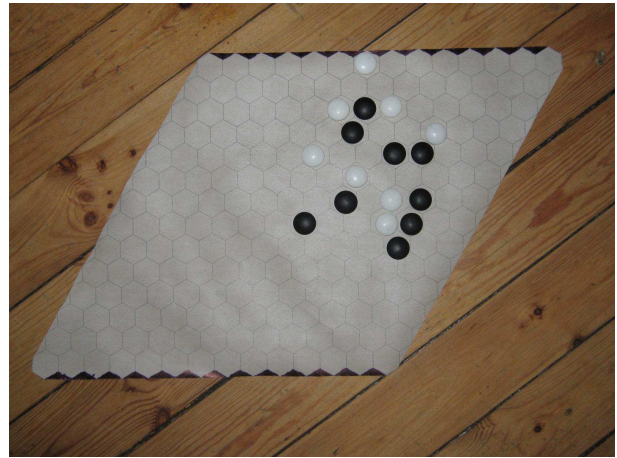
Mistä pelivälineet?

Siltä varalta, että lukijalle iski kipinä päästä pelaamaan, selitämme tässä luvussa, kuinka hankkia pelivälineet. Hex-settejä ei käsittääkseni myydä missään, joten pelivälineet joutuu valmistamaan itse.

Roolipelivälineitä myyvät kaupat myyvät tuotetta nimeltä Battle Mat. Se on ohut vinyylilauta, jossa on toisella puolella tavallinen ruudutus ja toisella puolella heksaruudutus. Siitä on helppo leikata halutun kokoinen Hex-lauta. Suomessa Battle Matia myy mm. Fantasiapelit (www.fantasiapelit.fi). Hex-nappuloina voidaan käyttää Go-pelin pelinappuloita eli "kiviä", joita Suomessa myy Gaimport (www.kolumbus.fi/gaimport/). Onnekkain yhteen-sattuman ansiosta Battle Mat, jossa on yhden tuuman kokoiset heksat, on juuri oikean kokoinen standardeille Go-kiville.

Koska Hexissä nappuloita ei koskaan siirretä tai poisteta laudalta, sitä voi pelata myös kynällä ja paperila. Tähän tarkoitukseen lautoja voi tulostaa Hex Wikistä (www.hexwiki.org/wiki/Printable_boards).

Internetissä Hexiä voi pelata esimerkiksi Little Golemissa (www.littlegolem.net) kirjepelin tahtiin. Little Golem tarjoaa 13×13 ja 19×19 -lautakoot.



Kuva 8: Tämän kirjoitelman ohjeilla toteutettu Hex-setti.

Pähkinöitä

1. Olkoon P äärellinen, kahden pelaajan täyden informaation peli, jossa tasapeli on mahdoton. Oletetaan, että P :ssä on kakunleikkaussääntö ensimmäisen siirron jälkeen. Osoita, että toisena pelaavalta on voittostrategia. (Voit olettaa tunnetuksi, että kaikissa kahden pelaajan äärellisissä täyden informaation peleissä, joissa tasapeli ei ole mahdollinen, on jommalla kummalla pelaajalla voittostrategia.)
2. Oletetaan, että Hexissä laudan pystykoko on pienempi kuin vaakakoko, ja ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaa toisena. Konstruoi ylä- ja alalaitoja yhdistävälle voittostrategia.
3. Sama kuin edellä, mutta ylä- ja alalaitoja yhdistävä aloittaa pelin.
4. Teoreeman 5 todistuksessa oletettiin, että voidaan valita voittoketju, joka ei leikkaa itseään. Osoita, että tämä on mahdollista. Osoita siis, että jos P' on voittoketju, joka leikkaa itseään, P' :n sisällä on voittoketju P , joka ei leikkaa itseään.
5. Osoita, että kaikissa kahden pelaajan äärellisissä täyden informaation peleissä jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. (Vihje: Induktio pelin mahdollisista lopputiloista taaksepäin.)

Viitteet

- [1] Browne, Cameron, *Hex Strategy: Making the Right Connections*, A K Peters Ltd, 2000.



Kilpailumatematiikkaa ja matematiikkakilpailuja

Jorma Merikoski

Tampereen yliopisto

Matti Lehtinen: Kilpailumatematiikan opas. Suomen matemaattinen yhdistys, valmennusjaosto, 2013.

”Olympiamatematiikkaan” eli Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtäväalueeseen kuuluu paitsi nk. perinteinen koulumatematiikka myös lukuteoria ja kombinatoriikka. Tämä koskee monia muitakin matematiikkakilpailuja, joten sikäli ”kilpailumatematiikka” ja ”olympiamatematiikka” tarkoittavat samaa.

Dosentti Matti Lehtisen pitkä ja monipuolinen ura tällä alalla alkoi jo vuonna 1965, kun hän osallistui kilpailijana 7. Kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin (Itä-)Berliinissä. Ura jatkui olympiavalmentajana, joukkueenjohtajana ja olympialaisten neuvottelukunnan jäsenenä, mutta laajeni myös toimintaan Pohjoismaisessa matematiikkakilpailussa, Baltian tie-matematiikkakilpailussa ja kotimaisessa lukiolaisten matematiikkakilpailussa. Lehtinen on aiemmin julkaissut tehtäväkokoelmat [1] ja [2]. Edellinen sisältää Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten 1959–74 tehtävät ratkaisuihin. Jälkimmäinen sisältää olympialaisten 1975–94 ja Pohjoismaisen matematiikkakilpailun 1987–94 tehtävät, kummatkin ratkaisuihin.

Kirjan [2] lopussa on ”Lyhyt olympiamatematiikan opas”. Uudessa kirjassa olympiamatematiikasta on tullut kilpailumatematiikka, ja lyhyestä oppaasta on tullut ”pitempi”, joka kattaa koko kirjan. Se rakentuu paljolti esimerkkien ja harjoitustehtävien varaan, joista useimmat ovat vanhoja kilpailutehtäviä. Nyt Lehtinen ei rajoitu vain Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten ja Pohjoismaisen matematiikkakilpailun tehtä-

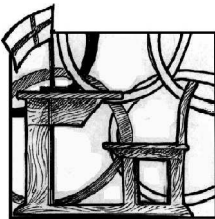
viin vaan käyttää erittäin laajaa lähdeaineistoa. Esimerkiksi tehtävien 34–39 lähteinä ovat Romanian matematiikkaolympialaiset 2009, Kanadan 1998, Leningradin 1990, Norjan Niels Henrik Abel -kilpailu 1966, Unkarin Eötvös-kilpailu 1899(!) ja Yhdysvaltojen matematiikkaolympialaiset 1977.

Lehtisen kirja on tarkoitettu olympiavalmennettavien harvalukuiselle joukolle. Mutta sopiiko se (lukiomatematiikan pitkän oppimäärän tietyn osan) kertaus- ja harjoituskirjaksi niillekin lukiolaisille, jotka eivät tavoittele olympiaedustusta vaan ”vain” laudatur-arvosanaa pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa? Kyllä sopii. Lisäksi kirja opettaa realismia sille, jolla on liian suuret luulot itsestään, ja itseluottamusta sille, joka on matemaattisesti lahjakas mutta vähättelee taitojaan. Nimittäin jotkin kilpailutehtävät ovat vaikeustasoltaan varsin kohtuullisia, ja onnistuminen niissä varmaan kannustaa. Kirja sopii myös niille opettajille, jotka haluavat ”kokeilla rajojaan”. Minäkin kokeilin vaihtelevalla menestyksellä.

Tämän kirjan nettiversio löytyy osoitteesta <http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/kilpmatopas.pdf>

Viitteet

- [1] M. Lehtinen, *Koululaisten kansainväliset matematiikkaolympialaiset*. Kirjayhtymä, 1974.
- [2] M. Lehtinen, *Matematiikan olympiakirja*. Weilin+Göös, 1995.



Kuusi haastavaa tehtävää: Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset Luxemburgissa 8.–14.4.2013

Esa V. Vesalainen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Luxemburgissa järjestettiin 8.–14.4.2013 toiset Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset. Kyseessä on vakava kansainvälinen kilpailu, jonka tarkoituksena on toimia haastavana, motivoivana ja ilahduttavanakin väliportaana tytöille, jotka tähtäävät kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin. Asiat ovat lähteneet liikkeelle lupaavasti: kilpailut ovat olleet erinomaisesti järjestettyjä ja palaute Suomen kilpailijoilta on ollut hyvin positiivista. Koska kilpailun taustaa ja luonnetta on käsitelty hyvin jo aiemmin tässä lehdessä [1, 2], seuraavassa on esitetty vain muutama oleellinen ja maininnanarvoinen asia ennen itse tehtäviä ja ratkaisuita.

Kilpailuun osallistui kaikkiaan 84 kilpailijaa 22 eri maasta. Koko kilpailussa parhaan tuloksen sai Yhdysvaltain vierailijajoukkueen Daniella Wang, joka myös jakoi ensimmäistä sijaa viime vuonna. Toiseksi parhaan tuloksen saavutti Turkin Berfin Şimşek, ja kolmanneksi parhaan Serbian Andela Sarkovic. Täydelliset tulokset löytyvät kilpailun kotisivuilta [3].

Suomea edustivat

- Pihla Karanko Ressun lukiosta,
- Katja Kulmala Meri-Porin lukiosta,
- Neea Palojärvi Päivölän kansanopiston matematiikkalinjalta, ja
- Ella Tamir Helsingin matematiikkalukiosta.

Pihla Karanko ja Katja Kulmala palkittiin kunniamainninoilla.

Joukkueen johtajana toimi Esa Vesalainen ja varajohtajana Jesse Jääsaari.

Kilpailun formaatti oli sama kuin viime vuonnakin. Yksi merkittävä ero kuitenkin oli: tänä vuonna kumpainakin kilpailupäivänä oli vain kolme tehtävää kun viime vuonna oli neljä. Syynä tähän oli, että näin tehtävien pisteytykseen tarvittiin vähemmän ihmisiä, millä on merkitystä koska pisteyttäjiä kutsutaan ulkomailta asti ja majoitustilaa oli niukasti. Toki pienemmällä määrällä tehtäviä pisteytyskin sujui sitten nopeammin. Joka tapauksessa kokeet olivat tänä vuonna saman mallisia kuin kansainvälisten matematiikkaolympialaistenkin kokeet: tehtävät 1 ja 4 ”helppoja”, tehtävät 2 ja 5 oleellisesti vaikeampia, ja tehtävät 3 ja 6 erityisen haastavia.

Todettakoon vielä mukavana yksityiskohtana, että tehtävissä oli mukana kontribuutio Suomestakin: tehtävä kaksi oli Matti Lehtisen ehdottama.

Ensimmäisen kilpailupäivän tehtävät

1. Kolmion ABC sivua BC jatketaan pisteen C toiselle puolelle sellaiseen pisteeseen D saakka, jolle $CD =$

BC . Sivua CA jatketaan pisteen A toiselle puolelle sellaiseen pisteeseen E saakka, jolle $AE = 2CA$. Osoita, että jos $AD = BE$, niin kolmio ABC on suorakulmainen.

2. Etsi kaikki kokonaisluvut m , joilla $m \times m$ -neliön voi pilkkoa viideksi suorakaiteeksi, joiden sivujen pituudet ovat kokonaisluvut $1, 2, \dots, 10$ jossakin järjestyksessä.

3. Olkoon n positiivinen kokonaisluku.

a) Osoita, että on olemassa $6n$ pareittain erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukko S , jonka minkä tahansa kahden alkion pienin yhteinen jaettava on enintään $32n^2$.

b) Osoita, että jokaisesta $6n$ pareittain erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukosta T löytyy kaksi alkioita, joiden pienin yhteinen jaettava on suurempi kuin $9n^2$.

Toisen kilpailupäivän tehtävät

4. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut a ja b , joilla löytyy kolme peräkkäistä kokonaislukua, joilla polynomin

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

arvot ovat kokonaislukuja.

5. Olkoon Ω kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Ympyrä ω sivuaa sivuja AC ja BC , ja se sivuaa ympyrää Ω sisäpuolelta pisteessä P . Eräs sivun AB suuntainen suora kulkee kolmion ABC läpi ja sivuaa ympyrää ω pisteessä Q .

Osoita, että $\widehat{ACP} = \widehat{QCB}$.

6. Lumikki ja seitsemän kääpiötä asuvat talossaan metsän siimeksissä. Kuudestatoista peräkkäisestä päivästä jokaisena eräät kääpiöt työskentelivät timanttikaivoksessa kun taas loput kääpiöt keräsivät metsässä marjoja. Kukaan kääpiöistä ei tehnyt minkään päivän aikana molempia töitä. Minä tahansa kahtena eri (ei välttämättä peräkkäisenä) päivänä ainakin kolme kääpiötä tekivät kukin molempia töitä. Lisäksi ensimmäisenä päivänä kaikki seitsemän kääpiötä työskentelivät timanttikaivoksessa.

Osoita, että jonakin näistä 16 päivästä kaikki seitsemän kääpiötä keräsivät marjoja.

Ratkaisut

Seuraavassa on yksi ja vain yksi ratkaisu jokaiseen tehtävään. Paljon lisää ratkaisuita ja variantteja löytyy virallisesta ratkaisuvihkosesta [4].

1. Peilataan piste A pisteen C suhteen, jolloin syntyy suunnikas $ABA'D$, jonka lävistäjien leikkauspiste on C . Nyt $A'B = AD = BE$, eli kolmio $\triangle A'BE$ on tasakylkinen. Lisäksi $AE = 2 \cdot AC$, ja $AC = A'C$, eli $AE = AA'$. Tästä seuraa, että A on kolmion $\triangle A'BE$ kärjestä B piirretyn korkeusjanan kantapiste, ja on oltava $BA \perp AC$.

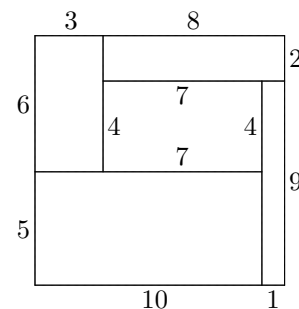
2. Koska yhden suorakaiteen eräs sivu on 10, ja sen on mahdollista $m \times m$ -neliön sisälle, on oltava $m \geq 10$.

Lisäksi, jos on $m > 10$, niin jokaisesta suorakaiteesta enintään kaksi sivua on $m \times m$ -neliön reunalla, ja jos tosiaan kaksi sivua on reunalla, niiden on oltava eripituisia. Toisaalta, $m \times m$ -neliön reunan jokainen osa kuuluu jonkin suorakaiteen sivuun, ja siis sen piirille $4m$ pätee

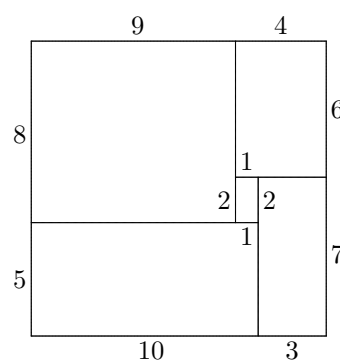
$$4m \leq 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55.$$

Täten $m < 14$. Siis on oltava $10 \leq m \leq 13$.

Pienellä kokeilemisella näkee, että arvot $m = 11$ ja $m = 13$ ovat mahdollisia (kts. kuvat 1 ja 2).



Kuva 1: Tehtävän 2 tapaus $m = 11$.



Kuva 2: Tehtävän 2 tapaus $m = 13$.

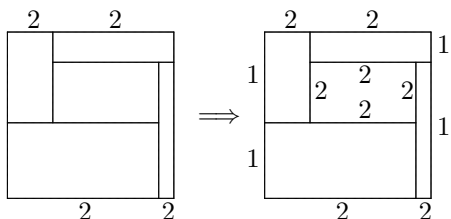
Tapauksen $m = 10$ näkee helpohkosti mahdottomaksi. Jollakin suorakaiteista, sanokaamme suorakaiteella R , on sivu, jonka pituus on 10. Jos R jakaisi 10×10 -neliön kahteen eri osaan, olisivat molemmat osat suorakaiteita, jotka molemmat olisi peitettävä kahdella suorakaiteella, joilla olisi vain eripituisia sivuja. Selvästi tämä on mahdotonta.

Siispä suorakaiteen R on oltava 10×10 -neliön reunalla. Nyt jokin suorakaide pitäisi peittää neljällä erikokoisella suorakaiteella. Ei ole vaikea vakuuttua siitä, että tämäkään ei ole mahdollista jos suorakaiteiden mitoissa ei ole yhtä pitkiä sivuja.

Lopuksi, mahdollisuuden $m = 12$ voi sulkea pois tarkastelemalla sivujen parillisuuksia. Ei ole vaikea vakuuttua siitä, että suorakaiteet on aseteltava neliön sisälle niin, että neliön jokainen sivu koostuu kahden eri suorakaiteen sivusta, ja jakautuu siis luonnollisesti kahteen osaan, ja että neliön sisällä on tasan yksi suorakaide joka ei kosketa neliön sivuja.

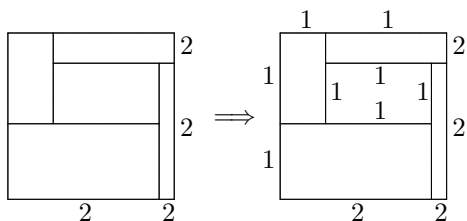
Neliön jokaisen sivun osat ovat samaa parillisuutta, ja koska parillisia ja parittomia pituuksia on käytettävissä vain viisi kumpaakin, on neliön kaksi sivua jaettava parillisen mittaisiin osiin, ja loput kaksi sivua jaettava parittoman mittaisiin osiin.

Jos parillisiin osiin jaetut neliön sivut olisivat vastakkaiset sivut, niin neliön sisälle jäävän nelikulmion kaikki sivut olisivat parillisen mittaisia, ja parillisen mittaisia sivuja olisi kuusi, mikä on mahdotonta (kts. kuva 3).



Kuva 3: Tehtävän 2 tapaus $m = 12$ johtaa ristiriitaan, jos neliössä vastakkaiset sivut jaetaan parillisen mittaisiin osiin.

Jos taas parillisiin osiin jaetut neliön sivut olisivat vierekkäiset sivut, niin neliön sisälle jäävän nelikulmion sivut olisivat parittomia, ja parittoman mittaisia sivuja olisi kuusi (kts. kuva 4), mikä on jälleen mahdotonta, ja olemme valmiit.



Kuva 4: Tehtävän 2 tapaus $m = 12$ johtaa ristiriitaan, jos neliössä vierekkäiset sivut jaetaan parillisen mittaisiin osiin.

3. a) Luonnollinen tapa aloittaa on kokeilla lukuja $1, 2, \dots, 6n$. Tämä ei kuitenkaan toimi, koska luvut $6n$ ja $6n - 1$ ovat yhteistekijättömiä, ja niiden pienin yhteinen jaettava on siis niiden tulo $36n^2 - 6n =$

$32n^2 + 2n(2n - 3)$, mikä on valitettavasti suurempi kuin $32n^2$ kun $n \geq 2$.

Luonnollinen seuraava yritys on harventaa joukkoa isompien lukujen päästä, niin, että joukon isot luvut ovat parillisia. Kokeilemisen jälkeen saattaa päätyä joukkoon

$$S = \{1, 2, \dots, 4n - 1, 4n, 4n + 2, 4n + 4, \dots, 8n\},$$

mikä siis sisältää luvut $1, 2, \dots, 4n$, ja parilliset luvut $4n + 2, 4n + 4, 4n + 6, \dots, 8n$.

Nimittäin, jos luvut $a \in S$ ja $b \in S$ ovat suurempia kuin $4n$, niin niiden pienin yhteinen jaettava on enintään puolet niiden tulosta, eli

$$[a, b] \leq \frac{ab}{2} \leq \frac{8n \cdot 8n}{2} = 32n^2.$$

Toisaalta, jos $a \in S$ on pienempi kuin $4n$, ja $b \in S$, niin niiden pienin yhteinen jaettava on pienempi kuin niiden tulo, eli

$$[a, b] \leq 4n \cdot 8n = 32n^2.$$

b) Ratkaisun ideana on unohtaa joukon T lukua $3n$ pienemmät elementit; joukosta T löytyy ainakin $3n + 1$ lukua, jotka ovat suuruudeltaan vähintään $3n$, sanokaamme luvut

$$3n \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{3n+1}.$$

Koska murtoluvut $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_{3n+1}}$ kuuluvat välille $\left[\frac{1}{a_{3n+1}}, \frac{1}{3n}\right]$, on joidenkin kahden niistä, sanokaamme lukujen $\frac{1}{a_i} < \frac{1}{a_j}$, etäisyyden oltava enintään $\frac{1}{3n}$ välin pituudesta. Nyt

$$0 < \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{3n} \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{a_{3n+1}} \right) < \frac{1}{9n^2}.$$

Koska erotuksen $\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i}$ pienin mahdollinen nimittäjä on lukujen a_i ja a_j pienin yhteinen jaettava, ja koska sen on oltava suurempi kuin $9n^2$, olemme valmiit.

4. Olkoot luvulle n kolme peräkkäistä mahdollista kokonaislukuarvoa $x - 1, x$ ja $x + 1$. Ratkaisun ydinajatuksena on todeta, että koska

$$(x - 1)^5 \equiv x^5 \equiv (x + 1)^5 \equiv -a \pmod{b},$$

jakaa luku b erotukset

$$(x + 1)^5 - x^5 = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1,$$

$$(x - 1)^5 - x^5 = -5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1,$$

ja

$$(x + 1)^5 - (x - 1)^5 = 10x^4 + 20x^2 + 2,$$

sekä niiden kaikki monikerrat, ja edelleen monikertojen summat ja erotukset. Luku b jakaa siis myös lausekkeet

$$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

$$-5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 20x^3 + 10x,$$

$$2(10x^4 + 20x^2 + 2) - x(20x^3 + 10x) = 30x^2 + 4,$$

$$3(20x^3 + 10x) - 2x(30x^2 + 4) = 22x,$$

ja lopuksi lausekkeen

$$22(5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) - (5x^3 + 10x^2 + 10x + 5) \cdot 22x = 22.$$

Täten luvun b on oltava jokin luvuista 1, 2, 11 ja 22.

Todetaan seuraavaksi, että luku b ei voi olla parillinen, koska luvut $(x+1)^5$ ja x^5 ovat välttämättä eri parillisuutta. Siis b on jompi kumpi luvuista 1 ja 11.

Tapauksessa $b = 1$ luku a voi olla mikä tahansa positiivinen kokonaisluku.

Tapauksessa $b = 11$ lasketaan viidensien potenssien jäännökset modulo 11:

$$\begin{array}{rcccccccccc} n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ n^5: & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

Tästä taulukosta nähdään, että luvun a arvo kelpaa täsmälleen silloin kun $a \equiv \pm 1 \pmod{11}$.

5. Olkoot ympyröiden ω ja Ω keskipisteet I ja O . Olkoon suoran CP ja ympyrän ω toinen leikkauspiste D , ja olkoon ℓ ympyrän ω pisteen D kautta kulkeva tangentti. Olkoon X suoran ℓ leikkauspiste ympyrän Ω kaaren AC kanssa, ja olkoon Y suoran ℓ leikkauspiste ympyrän Ω kaaren CB kanssa. Olkoon vielä E suorien AC ja ℓ leikkauspiste, ja Z pisteen A kautta kulkevan suoran ℓ suuntaisen suoran ja ympyrän Ω toinen leikkauspiste.

Kolmiot $\triangle PID$ ja $\triangle POC$ ovat tasakylkisiä, ja siis myös yhdenmuotoisia. Edelleen, koska $ID \perp \ell$, myös $OC \perp \ell$. Erityisesti kaaret XC ja CY ovat yhtä suuret, mistä vuorostaan seuraa, että kaaret AC ja CZ , ja niitä vastaavat kehäkulmat $\widehat{AC}$ ja $\widehat{CZ}$, ovat yhtä suuret. Nyt voimme todeta, että

$$\widehat{DEC} = \widehat{ZAC} = \widehat{CZ} = \widehat{AC} = \widehat{CBA}.$$

Nyt loppu on lähellä: todetaan, että peilauksessa kulman $\widehat{BCA}$ puolittajan CI suhteen suora ℓ kuvautuu suoralle, joka sekä sivuaa ympyrää ω että on yhden-suuntainen suoran AB kanssa. Lisäksi piste D kuvautuu pisteelle Q , ja täten $\widehat{QCB} = \widehat{ACD} = \widehat{ACP}$.

6. Olkoon V kaikkien erilaisten nollista ja ykkösistä muodostettujen seitsemän luvun mittaisten lukujen jono. Joukko V sisältää siis tasan $2^7 = 128$ jonoa. Nämä jonot merkitsevät eri työnjakojen yhden päivän aikana seuraavasti: Numeroimme kääpiöt luvuilla 1, 2, ..., 7, ja jonon i . luku on 0 tai 1 sen mukaan, työskentelikö i . kääpiö timanttien vai marjojen parissa. Erityisesti ensimmäisenä päivänä työnjako oli 0000000, koska kaikki työskentelivät timanttien parissa.

Kaikkiaan työnjaot tarkasteltavien kuudentoista päivän aikana muodostavat joidenkin kuudentoista jonon $d_1, \dots, d_{16} \in V$ kokoelman. Tiedämme, että yksi näistä jonoista on 0000000, ja niistä mitkä tahansa kaksi eri jonoa poikkeavat ainakin kolmessa eri kohdassa. Merkitsemme $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{16}\}$. Tehtävämme on siis todistaa, että joukko D sisältää jonon 1111111.

Nyt otamme käyttöön uuden käsitteen: sanomme, että jono $x \in V$ peittää jonon $y \in V$, jos x ja y poikkeavat enintään yhdessä kohdassa. Esimerkiksi jono 1011010 peittää jonot 1011010 ja 1010010 mutta ei jonoa 0001010. Jokainen jono peittää täsmälleen kahdeksan jonoa (mukaan lukien itsensä).

Olkoon $B_i \subseteq V$ niiden jonojen, jotka jono d_i peittää, joukko. Jokainen joukoista $B_1, B_2, \dots, B_{16}$ sisältää täsmälleen kahdeksan jonoa. Toisaalta, koska kahdella eri jonolla d_i ja d_j on ainakin kolme eriävää kohtaa, ei joukoilla B_i ja B_j ole yhteisiä elementtejä. Joukot $B_1, B_2, \dots, B_{16}$ sisältävät siis yhteensä $16 \cdot 8 = 128$ jonoa. Toisin sanoen, jokaisen jonon $x \in V$ peittää täsmälleen yksi jonoista $d \in D$.

Seuraavaksi määrittelemme toisenkin uuden käsitteen, painon. Jonon $x \in V$ paino on sen sisältämien ykkösten lukumäärä. Esimerkiksi jonon 1011010 paino on 4. Koska eräs jonoista, sanokaamme d_1 , on 0000000, vastaava joukko B_1 sisältää ainoan 0-painoisen jonon ja kaikki 1-painoiset jonot.

Mikään jonoista $d_2, \dots, d_{16}$ ei voi olla painoa 2, koska muutoin vastaava B_j sisältäisi myös 1-painoisia jonoja, ja siis yhteisiä elementtejä joukon B_1 kanssa. Siten kaikki $\binom{7}{2} = 21$ painoa 2 olevat jonot peittyvät niillä jonoista $d \in D$, jotka ovat painoa 3. Koska jokainen 3-painoinen jono peittää täsmälleen 3 painoa 2 olevaa jonoa, on jonoista $d \in D$ täsmälleen $\frac{21}{3} = 7$ kappaletta painoa 3.

Joukossa V on $\binom{7}{3} = 35$ painoa 3 olevaa jonoa, joista seitsemän kuuluu joukkoon D , ja loput 28 peittyvät joillakin 4-painoisilla jonoilla $d \in D$. Koska jokainen 4-painoinen jono peittää tasan 4 painoa 3 olevaa jonoa, kuuluu joukkoon D täsmälleen $\frac{28}{4} = 7$ kappaletta 4-painoisia jonoja.

Nyt olemme siis todenneet, että joukko D sisältää yhden 0-painoisen, seitsemän 3-painoista, ja seitsemän 4-painoista jonoa. Näiden lisäksi se sisältää vain yhden jonon d lisää, jonka on peitettävä kaikki 6- ja 7-painoiset jonot (koska mikään alemmpipainoisista joukon D elementeistä ei niitä peitä). Koska 6- ja 7-painoisia jonoja on kaikkiaan 8 kappaletta, on jonon d peitettävä vain ja ainoastaan kyseiset 8 jonoa.

Jonon d on oltava painoa 6 tai 7, koska se peittää jonon 1111111, eikä se voi olla painoa 6, koska muutoin se peittäisi 5-painoisia jonoja. Siis jono d on painoa 7, eli se on 1111111, ja olemme valmiit.

Viitteet

- [1] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Suomi lähettää joukkueen tyttöjen matematiikkakilpailuun*, Solmu 3/2011.
- [2] Ernvall-Hytönen, A.-M.: *Jännenelikulmioiden juhlaa – Tyttöjen matematiikkaolympialaisten tehtävä-satoa*, Solmu 3/2012.
- [3] *Scoreboard for EGMO 2013 in Luxembourg*, <https://www.egmo.org/egmos/egmo2/scoreboard/>.
- [4] Leytem, C., P. Haas, J. Lin, C. Reiher, ja G. Woeginger (toim.): *EGMO 2013. Problems with Solutions*, <https://www.egmo.org/egmos/egmo2/solutions.pdf>.

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I–IX tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

<http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html>

Opettajalle lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pynnön voi lähettää osoitteella

[marjatta.naatanen\(at\)helsinki.fi](mailto:marjatta.naatanen(at)helsinki.fi)

Ym. osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

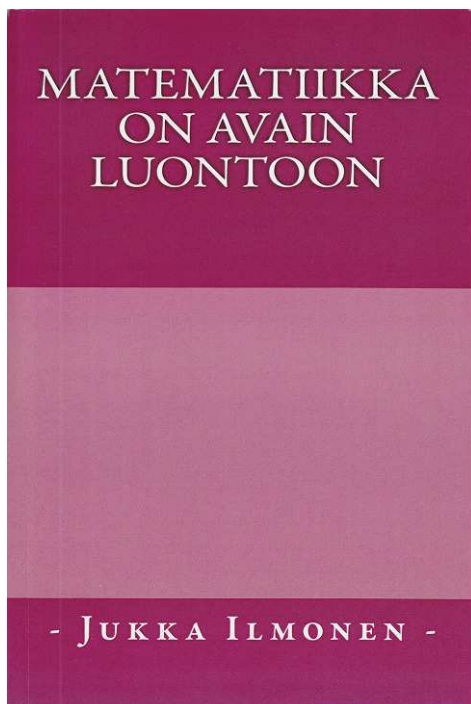
Lukuteorian diplomitehtävät



Vähän melkein kaikesta

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Jukka Ilmonen: Matematiikka on avain luontoon. 2013. ISBN 978-1482763225. 6 + 104 sivua.



Perinteisiin kustanteisiin ja painotuotteisiin tottuneen silmään Jukka Ilmonen *Matematiikka on avain luontoon* näyttää hiukan erikoiselta. Siinä nimiösivun kohdassa, jossa yleensä ilmoitetaan kustantaja, on teks-

ti *Kirja matematiikan ja luonnontieteiden ymmärtämiseksi*. Kirjan painopaikka on San Bernandino Kaliforniassa ja sitä voi ostaa verkkokauppa Amazonista hintaan 10 dollaria ja postikulut. Kirja on siis tuotettu Amazon-yhtymän *Create Space* -itsejulkaisupalvelussa. Kirjoittaja on toiminut Päivölän Kansanopiston matematiikkaan suuntautuneen internaattilukion opettajana.

Takakansi lupaa, että kirja antaa vastauksen kysymykseen, miksi matematiikka ja luonnontieteet ovat tärkeitä. Kirjaa suositellaan matematiikan tai luonnontieteiden opintoja aloittaville tai oppikirjaksi lukion ainerajat ylittävälle tiedekurssille.

Mutta mitä violettien kansien välissä on? Kirja jakautuu kolmeen päälukuun ja 12 alalukuun. Pääluvut ovat *Matematiikka on itsenäinen tiede* (30 sivua), *Luonnontieteissä sovelletaan matematiikkaa* (14 sivua) ja *Tiede ja tekniikka ihmisen käytössä* (33 sivua). Ensimmäinen luku esittelee lyhyesti matematiikan olemusta ja matematiikan ja laskennon eroa, siirtyy sitten eri kantaluviin perustuviin lukujärjestelmiin, matriisien kertolaskuun, matematiikan aksiomaattiseen rakennustapaan ja luonnollisten lukujen määrittelyyn Peanon aksioomien avulla. Tämän jälkeen se luonnehtii muutamia sanoja eräitä matematiikan osa-alueita. Toinen osa esittelee lyhyesti mittaamisen, eri luonnontieteet fysiikasta biologian kautta geotieteisiin (jotka Ilmonen suomentaa maantieteiksi) ja pohtii hiukan luonnontieteellisten teorioiden mallinomaisuutta. James Conwayn simulaatio *Game of Life* saa kolmisivuisen esittelyn. Kol-

mas osasto on lyhyt luettelonomainen matematiikan, luonnontieteen ja tekniikan historia historiantakaisista ajoista nykypäivään.

Jokaiseen alalukuun liittyy tehtäviä. Ne ovat erilaisia, toiset yksinkertaisia laskutehtäviä, toiset hyvinkin mielenkiintoisiin ajatteluprojekteihin kannustavia. Kirjan lopussa on vastausosasto. Monesti kirjoittajan ehdottaman vastauksen rinnalle tekee mieli ehdottaa muitakin vaihtoehtoja, ja tällaiset tehtävät voisivat esimerkiksi opetusryhmässä synnyttää mielenkiintoista ajatustenvaihtoa.

Pieneen sivumäärään (ja toistakymmentä sivua on aivan tyhjiä tai vain otsikkotekstin sisältäviä) ei kovin perusteellista tai syvällistä esitystä saa mahtumaan (vaikka tekijä on valinnut epämukavan pienen kirjasinkoon). Jos tuossa tilassa haluaa matematiikan ja luonnontieteen olemuksen ja yhteydet selvittää ja niiden merkityksen perustella, on varmaan pakosti hypättävä nopeasti asiasta toiseen ja kolmanteen. Luulen, että kirjan paras käyttötarkoitus olisi Ilmosen itsensäkin mainitsema tiedekurssin runko. Kurssissa voitaisiin sitten opettajan harkinnan mukaan mennä joissain kohdin vähän pintaa syvemmällekin. En oikein jaksa uskoa, että ennestään matematiikasta tai luonnontieteestä kiinnostumaton nuori lukisi Ilmosen kirjan tai muuttaisi mieltänsä pelkästään sen luettuaan. Ja kuinka monen käteen kirja yleensäkin tulee, kun sillä ei ole suomalaista markkinoijaa? Mutta lukion opettajalle, jolle Ilmosen kirja ei varmaan sinänsä kovin paljon uutta kerro, teos

saattaisi kuitenkin tarjota ihan mukavaa taustoitusta ja asioiden yhteyksistä muistuttamista. Ja sitten sen oivalluksen, että kun kokee omaavansa sanottavaa ja tarpeen sanoa, niin voi vaikka kirjoittaa kirjan. Julkaisihan Esko Valtaojakin hiljattain teoksen, jonka nimi on Kaiken käsikirja.

Tekevälle aina sattuu. Ilmosen kirjaankin on jäänyt jonkin verran kielen horjahtelua ja oikeinkirjoituksen kömmähdyksiä, ja jokunen asiavirhekin. Muutamia silmiin sattuneita: Luonnollisten lukujen joukko ja yhteenlasku eivät muodosta ryhmästruktuuria (s. 28): eihän joukon alkioilla (nollaa lukuun ottamatta) ole vasta-alkiota. Jos joku mittaa juoksumatkapakseen 100 metriä, niin ei ole perustetta sanoa, että merkitseviä numeroita on vain yksi (s. 36). Kyllä nollakin voi olla merkitsevä ja tässä yhteydessä melkoisen varmasti onkin. Aritmeettiset funktiot ovat pikemminkin kokonaislukuilla määriteltäviä kuin kokonaislukuarvoisia funktioita (s. 29). Logaritmitaulut ovat menneitä maailmaa, mutta kyllä niiden avulla kertolaskun $1234 \cdot 5678$ tulokselle saa paljon tarkemmankin likiarvon kuin 7000000 (s. 64). Työläisiä oli runsaasti jo ennen teollista vallankumousta (s. 67): eivät Egyptin pyramidit, Kiinan muuri tai Versailles'n palatsi itsestään kohonneet. *Concorde*-lentokoneelle ei sattunut lukuisia onnettomuuksia, vaan olennaisesti vain yksi (s. 78). Tehoa ei oikeastaan voi ilmoittaa yksiköllä kW tunnissa (s. 83). 30 ykkösellä kirjoitettava binääriluku ei ole $2^{30} + \dots + 2^1 + 2^0$ vaan $2^{29} + \dots + 2^1 + 2^0$ (s. 90).

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta <http://solmu.math.helsinki.fi/oppimateriaalit.html> löytyvät oppimateriaalit:

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Nääänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)



Sinin yhteenlaskukaava helposti

Jorma Merikoski

emeritusprofessori, Tampereen yliopisto

Aluksi

”Vanhassa lukiomatematiikassa” sinin yhteenlaskukaava

$$\sin(\phi + \theta) = \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta \quad (1)$$

(missä $\phi, \theta \in \mathbb{R}$) johdettiin keskitason lukiolaisen kannalta mutkikkaalla geometrisella tarkastelulla [7], jonka muunnos löytyy lähteestä [8]. Sitten tämä kaava johdettiin vektoreilla, mutta edelleen keskitason lukiolaiselle melko vaikeasti. Silloin tutkittiin kantavektorien kahden kierron yhdistämistä [5, 3] tai johdettiin aluksi kosinin yhteenlaskukaava skalaaritulon avulla [6]. Nykyisissä oppikirjoissa sinin yhteenlaskukaava ja muut vastaavat kaavat annetaan ilman perusteluja.

Voidaanko sinin yhteenlaskukaava johtaa helposti? Huomaamme, että voidaan. Ne lukijat, jotka eivät tiedä kompleksiluvuista mitään eivätkä tässä vaiheessa halua tietää, voivat sivuuttaa luvut Helppo tapa ja Vielä Eulerin kaavasta.

Helppo tapa

Matematiikan kiinnostavimpiin kaavoihin kuuluu *Eulerin kaava*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (2)$$

Tässä e on Neperin luku, i imaginaariyksikkö (siis $i^2 = -1$) ja θ reaaliluku. Jos z on kompleksiluku (siis

$z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$), niin e^z määritellään esimerkiksi sarjakehitelmänä

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (3)$$

Voidaan todistaa, että reaali- ja imaginaaliosien eksponenttifunktion kaikki laskusäännöt säilyvät.

Eulerin kaavan perusteella

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta. \quad (4)$$

Yhtälöparista (2), (4) saamme

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (5)$$

Jatkamme yksinkertaisella laskulla. Yhtälöiden (5) perusteella

$$\begin{aligned} \sin \phi \cos \theta &= \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{1}{4i} (e^{i\phi} e^{i\theta} + e^{i\phi} e^{-i\theta} - e^{-i\phi} e^{i\theta} - e^{-i\phi} e^{-i\theta}) \\ &= \frac{1}{4i} (e^{i(\phi+\theta)} + e^{i(\phi-\theta)} - e^{-i(\phi-\theta)} - e^{-i(\phi+\theta)}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(\phi+\theta)} - e^{-i(\phi+\theta)}}{2i} + \frac{e^{i(\phi-\theta)} - e^{-i(\phi-\theta)}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin(\phi + \theta) + \sin(\phi - \theta)). \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\cos \phi \sin \theta = \frac{1}{2} (\sin(\phi + \theta) - \sin(\phi - \theta)).$$

Koska $\sin(\phi - \theta) = -\sin(\theta - \phi)$, on siis

$$\begin{aligned}\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta &= \frac{1}{2}(\sin(\phi + \theta) + \sin(\phi - \theta)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sin(\phi + \theta) + \sin(\theta - \phi)) \\ &= \sin(\phi + \theta).\end{aligned}$$

Sinin yhteenlaskukaava (1) on näin todistettu.

Kirjoitettuani yllä olevan osoittautui, että lyhempi todistus [9, 10] saadaan soveltamalla yhtälön

$$e^{i(\phi+\theta)} = e^{i\phi}e^{i\theta}$$

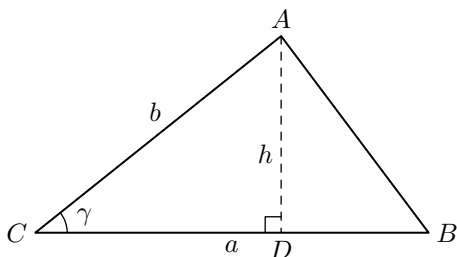
kumpaankin puoleen Eulerin kaavaa. Yksityiskohdat jätän lukijalle harjoitustehtäväksi. Päätin kuitenkin säilyttää alkuperäisen todistuksen, koska se sisältää ”bonuksena” kaavat (5), joissa sini ja kosini palaute-taan kiinnostavasti eksponenttifunktioon. Toisaalta tämä lyhempi tapa sisältää oikeastaan paremman ”bonuksen”: saadaan myös kosinin yhteenlaskukaava.

Helppo ja alkeellinen tapa

Edellinen todistus ei sovi lukioon, mutta satuin löytämään [1, s. 162] keskitason lukiolaisellekin kohtuullisen todistuksen. Kirjoittaja viittaa lähteeseen [2] ja arvelee, että todistus löytyy muualtakin mutta ei ole laajalti tunnettu.

Merkitsemme kolmion ABC sivuja ja kulmia tavanomaisesti, ja merkitsemme $\Delta(T)$:llä annetun kolmion T alaa. Kertaamme aluksi, miten $\Delta(T)$ saadaan, kun tunnetaan T :n kaksi sivua ja niiden välinen kulma. Olkoon sivun $BC = a$ vastainen korkeusjana $AD = h$. Koska $h = b \sin \gamma$, on

$$\Delta(ABC) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$



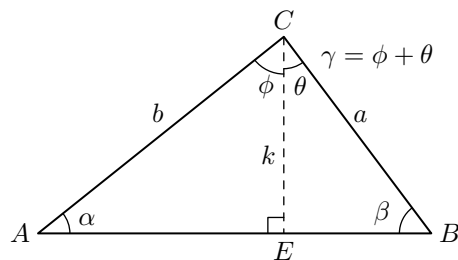
Johdamme nyt sinin yhteenlaskukaavan. Olkoon kolmion ABC sivun $AB = c$ vastainen korkeusjana $CE = k$. Merkitsemme $\angle ACE = \phi$ ja $\angle BCE = \theta$. Jos kulmat α ja β ovat teräviä, niin toisaalta

$$\Delta(ABC) = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \sin(\phi + \theta),$$

mutta toisaalta

$$\begin{aligned}\Delta(ABC) &= \Delta(ACE) + \Delta(BCE) \\ &= \frac{1}{2}bk \sin \phi + \frac{1}{2}ak \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}ba \cos \theta \sin \phi + \frac{1}{2}ab \cos \phi \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}ab(\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta).\end{aligned}$$

Näin saamme kaavan (1) tapauksessa $0 < \phi, \theta < \frac{\pi}{2}$. Tyydyimme siihen.



Jos α tai β on tylppä, niin vastaavalla tavalla saadaan sinin vähennyslaskukaava.

Vielä Eulerin kaavasta

Kompleksiluvun z sini ja kosini määritellään tavallisesti sarjakehitelminä

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots.\end{aligned}\tag{6}$$

Eulerin kaava voidaan havainnollisesti perustella sijoittamalla kaavoihin (3) ja (6) $z = i\theta$, tekemällä yksinkertaisia laskutoimituksia ja muuttamalla sarjojen termien järjestystä. Jätän nämä laskut lukijalle harjoitustehtäväksi.

Täsmällisen todistuksen esittäminen tällä tavalla vaatii kuitenkin perehtymistä kompleksianalyysiin. Nimittäin pitää tietää, miksi kyseiset sarjat suppenevat kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Lisäksi pitää tietää, miksi termien järjestystä saa muuttaa.

Mutta voidaanko Eulerin kaava perustella havainnollisesti pelkillä lukion tiedoilla? Voidaan ja monellakin tavalla, jotka tosin ovat edellistä mutkikkaampia. Silloinen lukiolainen Timo Kiviluoto [4] esitti kolme tapaa.

Lopuksi

Sinin ja kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavoilla on trigonometriassa erittäin keskeinen merkitys. Itse asiassa niistä ja parista lisäominaisuudesta saadaan koko trigonometria. Siis sini ja kosini voidaan määritellä paitsi sarjakehitelmillä myös tällä tavalla. Muitakin tapoja on olemassa.

Näiden kaavojen suuri merkitys ei näy nykyisissä opetussuunnitelmissa eikä oppimateriaaleissa. Kuten Halmetoja [3] jo ehdottikin, trigonometrian opiskelu pitäisi lukion pitkässä matematiikassa aloittaa ensin kertamalla perusmääritelmät ja sitten johtamalla nämä kaavat.

Kiitokset

Kiitän Markku Halmetojaa ja Pentti Haukkasta kirjoitustani parantaneista huomautuksista.

Viitteet

- [1] R. Askey, Mathematical content. – Kirjassa S. G. Krantz, *How to Teach Mathematics, Second*

Edition, Amer. Math. Soc., 1999, s. 161–171.

- [2] I. M. Gelfand and M. Saul, *Trigonometry*, Birkhäuser, 2001.
- [3] M. Halmetoja, Lukion trigonometriaa, Solmu 2012/1. <http://solmu.math.helsinki.fi/2012/1/trigonometriaa.pdf>
- [4] T. Kiviluoto, Eulerin kaavaa johtamassa, Solmu 2002/1. <http://solmu.math.helsinki.fi/2002/1/kiviluoto/>
- [5] Y. Lehtosaari, J. Leino ja P. Norlamo, *Laaja matematiikka 2, kurssit 5–8*, Kirjayhtymä, 1983.
- [6] H. Oinas-Kukkonen, J. Merikoski ja R. Niva, *Akseli 2, Matematiikan laaja oppimäärä*, Weilin+Göös, 2. p., 1984.
- [7] K. Väisälä, *Trigonometria*, 9. p., WSOY, 1967.
- [8] <http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/trig.pdf>
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/Proofs_of_trigonometric_identities
- [10] <http://mathworld.wolfram.com/TrigonometricAdditionFormulas.html>

Uutta Verkko-Solmun matematiikkadiplomisivulla

Diplomi IX sekä siihen liittyvät algebran kertaustehtävät ovat ilmestyneet osoitteessa

<http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html>



Tieteen huipulla

Marjatta Näätänen

Helsingin yliopisto

Olli Lehto: Tieteen huipulla. Lars Ahlforsin elämä. Suomen Tiedeseura, 2013.

Akateemikko Olli Lehto on eläkevuosinaan ansioitunut tiedemiesten elämäkertojen kirjoittajana. Viimeisin näistä käsittelee matemaatikko Lars Ahlforsia: Tieteen huipulla. Lars Ahlforsin elämä. Kustantaja on Suomen Tiedeseura, kirjaa voi ostaa Tiedekirjasta, Kirkkokatu 14, Helsinki, sähköposti tiedekirja@tsv.fi. Kuten muissakin Lehdon kirjoissa, pääsee lukija hyötymään Lehdon pitkästä, monipuolisesta kokemuksesta ja sekä suomalaisen että kansainvälisen tiede- ja kulttuuriympäristön omakohtaisesta tuntemisesta.

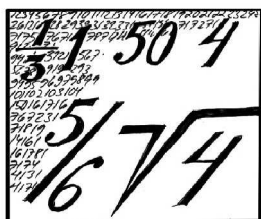
Kirjan tarkoituksena on ”tehdä Suomen tieteen loistava tähti Lars Ahlfors tunnetuksi suurelle yleisölle”. Ilman Lehdon kirjaa olisi todellakin mahdollista, että Ahlfors painuisi unohduksiin synnyinmaassaan. Suomalainen mediahan ei ole innokas kertomaan matemaatikkojen aikaansaannoksista - viihteellisyys kun ei sovi yhteen matematiikan kanssa. Tämä tosin saattaa olla lukijoiden aliarviointia, mutta joka tapauksessa tällainen on Suomen nykytilanne.

Ahlforsin elämä ja persoona olivat hyvin värikkäitä. Lehdon kertomus seurailee Ahlforsin henkilökohtaisia vaiheita, taustalla ihmisten kohtaloihin vaikuttaneet suuret poliittiset käänneet. Toinen maailmansota vaikutti Ahlforsinkin kohtaloon ratkaisevasti ja hän lähti Suomesta 1944. Hän asui useissa maissa, joten hänen kielitaitonsa ruotsi, suomi, saksa ja ranska oli tarpeen.

Englantia opiskeltiin 1930-luvun Suomessa paljon vähemmän kuin saksaa, mutta kun Ahlfors saapui Amerikkaan, hän jo käytti sujuvasti englantia, selittäen ”I came by boat”. Amerikassa Ahlfors viettikin lopulta yli 50 vuotta Harvardin yliopiston professorina ja emerituksena. Äitinsä kielen, suomen, hän halusi säilyttää ja onnistuikin siinä hämmästyttävän hyvin, vaikka puhui sitä vain harvoin. Kotikielenä oli englanti USA:han muuton jälkeen.

Matematiikassa ei jaeta Nobelin palkintoa, mutta sen sijaan poikkeuksellisen huomattavista saavutuksista matematiikassa jaetaan kansainvälisissä matemaatikkokongresseissa nelivuositain kahdesta neljään kultaista ns. Fieldsin mitalia, vuoteen 1962 saakka niitä jaettiin kaksi. Vuoden 1936 kongressissa Oslolla Ahlfors oli toinen mitalin saajista. Palkinnon arvon ymmärsi täysin Suomen Kuvalehti, joka julkaisi monisivuisen artikkelin ”Missä ovat maailman kuuluisimmat matemaatikot? – Suomessa”. Artikkelissa kerrottiin myös Rolf Nevanlinnasta.

Ahlfors on ainoa Fieldsin mitalin saanut suomalainen. Hän oli aktiivinen matemaatikko aina vanhuuteen asti, 85-vuotiaana hän osallistui viimeisen kerran matematiikan seminaariin Saksassa. Lehdon kirjasta lukija saa hyvän kuvan Ahlforsin vaiheikkaasta elämästä. Matematiikastakin kerrotaan, mutta nämä osat voi halutessaan ohittaa ilman ongelmia. Kirjaa voi lämpimästi suositella jokaiselle kansainvälisestä tiedemaailmasta ja Suomen lähihistoriasta kiinnostuneelle.



Karamatan epäyhtälö

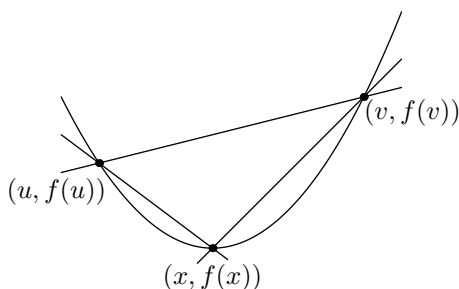
Markku Halmetoja

Mäntän lukio

Kirjoituksessa [2] perehdyttiin funktion konveksisyyteen ja tätä teemaa jatketaan nyt tutustumalla *Karamatan*¹ epäyhtälöön ja sen sovelluksiin. Lukijan mukavuutta ajatellen kertaamme aluksi konveksien funktioiden ominaisuuksia. Välillä I määritelty funktio f on konveksi, jos kaikilla $x, y \in I$ ja $\lambda \in]0, 1[$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (1)$$

Funktio f on aidosti konveksi, jos epäyhtälössä (1) yhtäsuuruus toteutuu ainoastaan silloin kun $x = y$. Konveksin funktion kuvaaja on alaspäin kupera. Voidaan todistaa, että funktio f on konveksi, jos ja vain jos



kaikilla $u, x, v \in I$, $u < x < v$, kuvioon piirrettyjen sekanttien kulmakertoimet toteuttavat kaksoisepäyhtälön

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x}. \quad (2)$$

¹Jovan Karamata (1902–1967), serbialainen matemaatikko.

²Johan Jensen (1859–1925), tanskalainen matemaatikko.

Jos ja vain jos yhtäsuuruudet eivät ole voimassa tässä epäyhtälöketjussa, niin f on aidosti konveksi. Toisen derivaatan positiivisuus on välttämätön ja riittävä ehto kahdesti derivoituvan funktion aidolle konveksisuudelle.

Karamatan epäyhtälö on kirjoituksessa [2] nähdyn Jensenin² epäyhtälön tavoin yleisepäyhtälö, jonka avulla voidaan todistaa monia muita epäyhtälöitä. Jensenin ja Karamatan epäyhtälöitä soveltaen lukiolainenkin voi periaatteessa johtaa uusia epäyhtälöitä tai löytää uusia todistuksia tunnetuille epäyhtälöille: on vain löydettävä konveksi funktio, jota kukaan ei ole ennen tullut ajatelleeksi näiden epäyhtälöiden yhteydessä. Karamatan epäyhtälön todistamiseksi tarvitsemme majoroinniksi kutsuttua $\mathbb{R}^n$:n vektorien välistä relaatiota. Vektoreista ei tarvitse tietää muuta kuin se, mitä ne ovat. Jos kuitenkin $\mathbb{R}^n$ tuntuu vieraalta, niin lukija voi silmäillä kirjoitusta [1]. Perehdymme aluksi majorointiin, minkä jälkeen todistamme Karamatan epäyhtälön ja lopuksi sovellamme sitä muutamissa esimerkitapauksissa.

Majoroinnista

Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $x_{[i]}$ tämän vektorin i :nneksi suurin koordinaatti. Siis

$$x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n-1]} \geq x_{[n]}.$$

Sanomme, että vektori $\mathbf{x}$ *majoroi* vektoria $\mathbf{y}$, jos

$$\begin{aligned} x_{[1]} &\geq y_{[1]}, \\ x_{[1]} + x_{[2]} &\geq y_{[1]} + y_{[2]}, \\ &\vdots \\ x_{[1]} + \dots + x_{[n-1]} &\geq y_{[1]} + \dots + y_{[n-1]}, \\ x_{[1]} + \dots + x_{[n]} &= y_{[1]} + \dots + y_{[n]}. \end{aligned}$$

Jos $\mathbf{x}$ majoroi $\mathbf{y}$:n, niin merkitsemme $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ tai $\mathbf{y} \prec \mathbf{x}$. Selvästi

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\succ \mathbf{x}, \\ \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \succ \mathbf{x} &\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \succ \mathbf{z} &\Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z} \end{aligned}$$

kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Jos $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, niin $\mathbf{x}$ *majoroi aidosti* $\mathbf{y}$:n.

Esim. 1 Jos $\mathbf{x} = (0, 3, 0)$, $\mathbf{y} = (1, 0, 2)$ ja $\mathbf{z} = (1, 1, 1)$, niin $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{z}$, sillä

$$3 \geq 2, \quad 3 + 0 \geq 2 + 1 \quad \text{ja} \quad 3 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0$$

ja

$$2 \geq 1, \quad 2 + 1 \geq 1 + 1 \quad \text{ja} \quad 2 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1.$$

Esim. 2 Jos n on positiivinen kokonaisluku, niin

$$\begin{aligned} (1, 0, \dots, 0) &\succ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0\right) \\ &\succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0\right) \\ &\succ \vdots \\ &\succ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Esim. 3 Jos $\bar{x}$ on vektorin $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ koordinaattien aritmeettinen keskiarvo, niin

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \succ (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \bar{\mathbf{x}}.$$

Karamatan epäyhtälö

Seuraavassa lauseessa muotoillaan ja todistetaan Karamatan epäyhtälö. Todistus seuraa lähteessä [3, s. 33-34] annettua.

Lause 1 (Karamatan epäyhtälö) Olkoot $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^n$ ja $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^n$, missä $a_i, b_i \in]\alpha, \beta[$ kaikilla $i = 1, 2, \dots, n$. Olkoon $f:]\alpha, \beta[\mapsto \mathbb{R}$ konveksi funktio. Jos $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$, niin

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) \geq \sum_{i=1}^n f(b_i). \quad (3)$$

Jos f on aidosti konveksi, niin yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Todistus Epäyhtälö on selvästi voimassa, jos $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Jos jollakin i :n arvolla $a_i = b_i$, voidaan termit $f(a_i)$ ja $f(b_i)$ jättää huomioimatta. Voimme siis olettaa, että $a_i \neq b_i$ kaikilla i :n arvoilla. Edelleen, koska epäyhtälö (3) on riippumaton vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ koordinaattien järjestyksestä, voimme rajoituksetta olettaa, että $a_1 \geq \dots \geq a_n$ ja $b_1 \geq \dots \geq b_n$. Koska f on konveksi, on erotusosamääristä

$$\frac{f(a_i) - f(b_i)}{a_i - b_i} = c_i$$

muodostuva jono $(c_i)_{i=1}^n$ kaksoisepäyhtälön (2) perusteella vähenevä. Aktiivinen lukija selvittänee tämän väitteen yksityiskohtaisesti. Merkitään

$$A_k = \sum_{i=1}^k a_i \quad \text{ja} \quad B_k = \sum_{i=1}^k b_i$$

kaikilla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ja sovitaan, että

$$A_0 = B_0 = 0.$$

Koska $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$, on $A_n = B_n$ ja $A_i \geq B_i$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Saamme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(a_i) - \sum_{i=1}^n f(b_i) &= \sum_{i=1}^n (f(a_i) - f(b_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (a_i - b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (A_i - A_{i-1} - B_i + B_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (A_i - B_i) - \sum_{i=1}^n c_i (A_{i-1} - B_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i (A_i - B_i) - \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} (A_i - B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i (A_i - B_i) - \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1} (A_i - B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1}) (A_i - B_i) \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

mistä (3) seuraa. Koska $a_i \neq b_i$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$, on $A_i > B_i$ vähintään yhdellä i :n arvolla, ja jos f on aidosti konveksi, niin jono $(c_i)_{i=1}^n$ on aidosti vähenevä. Summassa (4) on tällöin vähintään yksi positiivinen termi, joten tämä summa on positiivinen, koska kaikki termit ovat ei-negatiivisia. Yhtäsuuruusehto seuraa tästä.

Huomautus Jos konveksi funktio f on kasvava, niin lauseen ehto $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ voidaan lieventää muotoon

$$\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i \quad \text{kaikilla} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

sillä erotusosamäärät c_i , erityisesti c_n , ovat ei-negatiivisia (ks. todistuksen yhtälöketju). Yhtäsuuruusehto säilyy samana.

Sovelluksia

Aloitamme sovellukset näyttämällä, miten Karamatan epäyhtälön avulla voi laatia tehtäviä. Näimme edellä (esim. 2), että jos $n \in \mathbb{Z}_+$, niin

$$(1, 0, 0, \dots, 0) \succ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right),$$

ja tiedämme, että jos $a > 1$, niin eksponenttifunktio $f(x) = a^x$ on aidosti konvekksi. Karamatan epäyhtälön premissit ovat siis voimassa. Saamme

$$a^1 + a^0 + \dots + a^0 \geq a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{n}} + \dots + a^{\frac{1}{n}},$$

mikä sievenee muotoon

$$a - 1 \geq n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right). \quad (5)$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $n = 1$. Siioittamalla a :n paikalle luvut 2, e ja $1 + \frac{1}{n}$, saadaan sopivasti sievennellen tehtävä:

Osoita, että jos $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \geq 2$, niin

- a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$,
- b) $\frac{e-1}{n} > e^{\frac{1}{n}} - 1$,
- c) $n + \frac{1}{n} > n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Väitteet **a)** ja **c)** todistuvat lukiomatematiikalla, sillä ne seuraavat triviaalisti binomiteoreemasta. Väite **b)** seuraa helposti e-kantaisen eksponenttifunktion sarjakehitelmästä, joka tosin ei kuulu lukion oppimäärään mutta lienee tuttu monelle matematiikkaa harrastavalle lukiolaiselle.

Kadelburg [4] kirjoittaa matematiikkaolympialaisten epäyhtälötehtävistä, että niiden laatijat luultavasti käyttävät mm. Karamatan epäyhtälöä tehtäviä konstruoidessaan ja keksivät elementaariset, puhtaasti koulumatematiikkaan perustuvat ratkaisut myöhemmin. On selvää, että tehtävää ei voi käyttää kilpailussa, ellei alkeismatematiikkaan perustuvaa ratkaisua ole näköpiirissä. Alkeellisen ratkaisun löytäminen edellyttää usein huomattavaa nokkeluutta ja rajoitettu ratkaisuaika lisää vielä suorituksen vaatavuutta. Luultavasti ainakin joidenkin matematiikkaolympialaisiin osallistuvien maiden kansallisissa valmennustimeissa opitaan myös Karamatan epäyhtälö tavanomaisempien menetelmien lisäksi, sillä sitä voi luonnollisesti käyttää myös ratkaisemiseen. Seuraavana esimerkkinä on Jugoslavian olympiajoukkueen karsintatehtävä [3, s. 41-42] vuodelta 1969.

Esim. 4 Todista: Jos reaali-luvuille a_i ja b_i on

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0,$$

$$b_1 \geq a_1,$$

$$b_1 b_2 \geq a_1 a_2,$$

$$\vdots$$

$$b_1 b_2 \dots b_n \geq a_1 a_2 \dots a_n,$$

niin

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Lukujen logaritmit toteuttavat ehdon

$$\sum_{i=1}^k \ln a_i \leq \sum_{i=1}^k \ln b_i$$

kaikilla $k = 1, 2, \dots, n$, joten väite seuraa välittömästi siitä, että funktio $f(x) = e^x$ on konvekksi ja kasvava.

Esim. 5 [3, s. 35] Todista: Jos $a, b, c > 0$, niin

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ja

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq \sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}.$$

Molemmissa epäyhtälöissä vallitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos $a = b = c$.

Epäyhtälöt ovat symmetrisiä muuttujien suhteen, joten voimme rajoituksetta olettaa, että $a \geq b \geq c$. Tällöin

$$(a+b, b+c, c+a) \prec (2a, 2b, 2c).$$

Väitökset seuraavat Karamatan epäyhtälöstä soveltamalla sitä aidosti konvekseihin funktioihin $f(x) = x^{-1}$, $x > 0$, ja $g(x) = -\sqrt{x}$. Aktiivinen lukija voi miettiä, miten nämä epäyhtälöt yleistyvät mielivaltaiselle määrälle positiivisia lukuja.

Esim. 6 Karamatan epäyhtälön avulla saadaan yksinkertainen todistus aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon väliselle epäyhtälölle eli $\mathcal{AG}$ -epäyhtälölle. Olkoon $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ja $\mathcal{A}$ niiden aritmeettinen keskiarvo. Tällöin

$$(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Funktio $g(t) = -\ln t$, $t > 0$, on aidosti konvekksi, sillä $g''(t) = t^{-2} > 0$. Karamatan epäyhtälöä soveltaen saadaan

$$-\ln \mathcal{A} - \ln \mathcal{A} - \dots - \ln \mathcal{A} \leq -\ln x_1 - \ln x_2 - \dots - \ln x_n,$$

mikä sievenee muotoon

$$n \ln \mathcal{A} \geq \ln(x_1 x_2 \dots x_n),$$

ja edelleen

$$\ln \mathcal{A} \geq \frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \dots x_n) = \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \ln \mathcal{G},$$

mistä väite seuraa. Yhtäsuuruusehto seuraa funktion g aidosta konveksisuudesta.

Esim. 7 [3, s. 42] Todistettava: Jos $a, b, c > 0$, niin

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc. \quad (6)$$

Epäyhtälö on symmetrinen muuttujien suhteen, joten voimme rajoituksetta olettaa, että $a \geq b \geq c > 0$. Tällöin epäyhtälön (6) vasemman puolen tekijöiden suurusjärjestys on

$$a + b - c \geq a + c - b \geq b + c - a,$$

ja ainostaan pienin näistä luvuista voi olla ei-positiivinen. Jos $b + c - a \leq 0$, niin (6) on voimassa koska $abc > 0$. Voimme siis olettaa, että $b + c - a > 0$. Selvästi

$$a + b - c \geq a$$

$$(a + b - c) + (a + c - b) \geq a + b$$

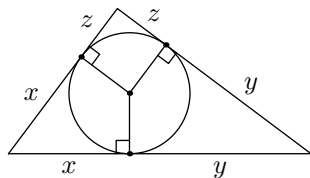
$$(a + b - c) + (a + c - b) + (b + c - a) = a + b + c$$

eli $(a + b - c, a + c - b, b + c - a) \succ (a, b, c)$. Funktio $g(x) = -\ln x$ on aidosti konveksi, joten Karamatan epäyhtälöä soveltaen saadaan

$$-\ln(a + b - c) - \ln(b + c - a) - \ln(c + a - b) \geq -\ln a - \ln b - \ln c,$$

mistä väite seuraa. (Epäyhtälö (6) on voimassa myös ehdolla $a, b, c \geq 0$, sillä jos esimerkiksi $c = 0$, niin sen vasen puoli pelkistyy muotoon $-(a + b)(a - b)^2$ ja oikea puoli on 0.)

Epäyhtälöllä (6) on mielenkiintoinen sovellus kolmioihin. Kolmion sisään piirretty ympyrä sivutkoon kolmion sivuja a, b, c pisteissä, jotka jakavat ne kuvion



osoittamalla tavalla osiin

$$a = x + y, \quad b = y + z \quad \text{ja} \quad c = z + x.$$

Näistä yhtälöistä seuraa

$$x = \frac{1}{2}(a + c - b) (> 0),$$

$$y = \frac{1}{2}(a + b - c) (> 0),$$

$$z = \frac{1}{2}(b + c - a) (> 0).$$

Kertomalla keskenään $\mathcal{AG}$ -epäyhtälöt

$$2\sqrt{xy} \leq x + y, \quad 2\sqrt{yz} \leq y + z, \quad 2\sqrt{zx} \leq z + x$$

saadaan

$$8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x),$$

mikä on sama kuin esimerkiksi 7 yleisemmällä edellytyksillä todistamamme epäyhtälö (6). Heronin kaavan mukaan kolmion pinta-alan Δ neliö

$$\Delta^2 = p(p - a)(p - b)(p - c),$$

missä $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, ja koska (6) on voimassa, on

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{1}{16}(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \\ &\leq \frac{1}{16}abc(a + b + c). \end{aligned} \quad (7)$$

Saatu arvio on tarkempi kuin näissä yhteyksissä yleensä esitetty

$$\Delta^2 \leq \frac{p^4}{27} = \frac{(a + b + c)^4}{432}, \quad (8)$$

sillä $\mathcal{AG}$ -epäyhtälön perusteella

$$abc \leq \frac{1}{27}(a + b + c)^3,$$

joten

$$\frac{1}{16}abc(a + b + c) \leq \frac{1}{16 \cdot 27}(a + b + c)^4 = \frac{1}{432}(a + b + c)^4.$$

Arvio (8) perustuu pelkästään kolmion piirin pituuteen, kun taas arviossa (7) tarvitaan piirin lisäksi tieto kolmion sivujen pituuksien tulosta. Molemmissa arvioissa yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos kolmio on tasasivuinen.

Karamatan epäyhtälön avulla voidaan relaatiota

$$(a + b - c, a + c - b, b + c - a) \succ (a, b, c)$$

hyödyntäen todistaa äärettömän monta kolmion sivujen välistä epäyhtälöä. Jos näet f on aidosti konveksi funktio, niin

$$f(a + b - c) + f(a + c - b) + f(b + c - a) \geq f(a) + f(b) + f(c).$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a = b = c$. Esimerkiksi, jos $n (\geq 2)$ on kokonaisluku, niin positiivisille luvuille määritelty funktio $f(x) = x^{-n}$ ja ei-negatiivisille luvuille määritelty funktio $g(x) = -\sqrt[n]{x}$ ovat aidosti konvekseja, joten

$$(a + b - c)^{-n} + (a + c - b)^{-n} + (b + c - a)^{-n} \geq a^{-n} + b^{-n} + c^{-n}$$

ja

$$\sqrt[n]{a + b - c} + \sqrt[n]{a + c - b} + \sqrt[n]{b + c - a} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}.$$

Lähteessä [4, s. 101] mainitaan, että vuonna 1996 Aasian ja Tyynenmeren alueen olympialaisissa oli tehtävänä todistaa tämä g -funktioista saatava epäyhtälö tapauksessa $n = 2$, mikä siis Karamatan epäyhtälön avulla todistuu vaivatta. Elementaarinen todistus on työläämpi.

Esim. 8 [3, s. 44] Vuoden 2000 matematiikkaolympialaisissa oli tehtävänä todistaa epäyhtälö

$$\left(x - 1 + \frac{1}{y}\right)\left(y - 1 + \frac{1}{z}\right)\left(z - 1 + \frac{1}{x}\right) \leq 1, \quad (9)$$

kun $x, y, z > 0$ ja $xyz = 1$. Annetuista ehdoista seuraa, että on olemassa positiiviset luvut a, b, c siten, että

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c}, \quad z = \frac{c}{a}.$$

Sijoittamalla nämä epäyhtälöön (9) saadaan yhtäpitävästi

$$\left(\frac{a}{b} - 1 + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c} - 1 + \frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a} - 1 + \frac{b}{a}\right) \leq 1,$$

mikä positiivisella luvulla abc kertoen pelkistyy esimerkiksi 7 olevaksi epäyhtälöksi.

Myös seuraava Jensenin epäyhtälön erikoistapaus todistuu helposti.

Esim. 9 Olkoon f välillä I määritelty konveksi funktio ja $x_1, \dots, x_n \in I$. Olkoon edelleen $\bar{x}$ lukujen x_i aritmeettinen keskiarvo. Koska

$$(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

seuraa Karamatan epäyhtälöstä

$$f(\bar{x}) + f(\bar{x}) + \dots + f(\bar{x}) \leq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n),$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(\bar{x}) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}f(x_1) + \dots + \frac{1}{n}f(x_n).$$

Viimeisenä esimerkkinä todistamme Petrovićin³ epäyhtälön. Kadelburg [3, s. 36–37] todistaa se suoraan konveksisuuden määritelmän avulla, mutta Karamatan epäyhtälöä käyttäen saadaan lyhyempi todistus ja pieni täydennyskin.

Lause 2 (Petrovićin epäyhtälö) Jos $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ja $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ on konveksi funktio, niin

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) \leq f(x_1 + \dots + x_n) + (n-1)f(0).$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos f on enintään astetta 1 oleva polynomifunktio.

Todistus Koska luvut x_i ovat ei-negatiivisia, on voimassa

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ kpl}}) \succ (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Karamatan epäyhtälöstä seuraa

$$f(x_1 + \dots + x_n) + \underbrace{f(0) + \dots + f(0)}_{n-1 \text{ kpl}} \geq f(x_1) + \dots + f(x_n),$$

mikä sievenee todistettavaksi epäyhtälöksi. Yhtäsuuruusehto on ilmeinen.

Karamatan epäyhtälön tai esimerkiksi 9 olevan epäyhtälön avulla saadaan summalle

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

myös alaraja. Jos $\bar{x}$ on lukujen $x_1, \dots, x_n$ aritmeettinen keskiarvo, niin $(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \prec (x_1, x_2, \dots, x_n)$, joten

$$f(\bar{x}) + f(\bar{x}) + \dots + f(\bar{x}) \leq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n).$$

Jos siis $x_1, \dots, x_n \geq 0$ ja $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ on konveksi, niin

$$nf(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq f(x_1 + \dots + x_n) + (n-1)f(0).$$

Tapauksessa $f(x) = -\sqrt{x}$ saadaan epäyhtälöt

$$\sqrt{n} \sqrt{\frac{n+1}{2}} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < n \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Tämä arvio on kuitenkin hyödytön, sillä triviaalissa arviossa

$$n < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < n\sqrt{n}$$

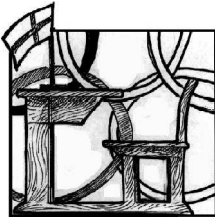
rajat ovat paremmat.

Kiitän emeritusprofessori Jorma Merikoskea kirjoittaneeni täsmentäneistä kommentteista.

Viitteet

- [1] M. Halmetoja, Epäyhtälöistä, osa 1, Solmu 2/2010. http://solmu.math.helsinki.fi/2010/2/epayhtaloista_osa1.pdf
- [2] M. Halmetoja, Epäyhtälöistä, osa 2, Solmu 3/2010. http://solmu.math.helsinki.fi/2010/3/epayhtaloista_osa2.pdf
- [3] Z. Kadelburg, D. Đusić, M. Lukić, I. Matić, Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead and some applications, *Teaching Math.* 8 (2005), 31–45.
- [4] Z. Kadelburg, Some classical inequalities and their applications to olympiad problems, *Teaching Math.* 14 (2011), 97–106.

³Mihailo Petrović (1868–1943), serbialainen matemaatikko.



Kesäkoulussa Moskovassa

Cliona Shakespeare

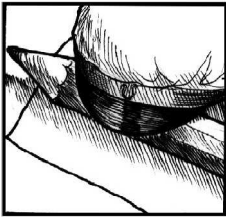
Kesäkuun toisena päivänä 26 suomalaista nuorta lähivät Leo Tolstoi -junalla Moskovaa kohti Opetushallituksen Venäjä-ohjelman puitteissa. Seuraavana päivänä ryhmä ohjaajineen saapui Moskovaan ja kohtasi jo takaiskun, kun bussi oli kuljettajan sairauskohtauksen takia kolme tuntia myöhässä. Bussi saapui kuitenkin paikalle ja pääsimme Moskovan alueen valtiolliseen yliopistoon syömään. Ensimmäinen päivä meni asuntolaan ja yliopiston alueeseen tutustuessa, illalla taas tutustuimme toisiimme paremmin.

Opetusmenetelmät ja sisällöt poikkesivat suomalaisen lukion käytännöistä. Fysiikan tunneilla opettajan tekemästä kokeesta siirryimme käsittelemään jotain aiheeseen liittyvää – Newtonin kehdosta siirryimme käsittelemään törmäyksiä, putoavasta avoimesta vesipullostasta virtausdynamiikkaa. Aiheet kattoivat koko lukion fysiikan, ja menivät välillä käsittelyltään opetussuunnitelmasta eteenpäin. Matematiikan tunneilla käsitelimme laatikkoperiaatteen lisäksi parillisuutta ja väriä. Konstruoinimme kolmiulotteisia kappaleita leikkaavia pintoja ohjelmalla the Geometer's Sketchpad. Vierasluennoitsijat puhuivat tähtitieteestä, raketeista, ja Venäjän valmennusfysiikasta. Jälkimmäisessä yksi käsitelty kysymys oli, minä ajanhetkenä sammakon kannattaa hypätä, että se pääsisi halkaisijaltaan suuren metallirullan yli, jos metallirulla pyöri sammakkoa kohti ja on juuri ja juuri tarpeeksi ohut, että sammakko pääsee sen yli.

Pedagogiikaltaan opettajat erosivat suuresti keskiverosta lukion opettajasta: välillä opettajat kokosivat kysymyksen mahdollisia vastauksia taululle ja pitivät äänestyksen siitä, mikä oli ihmisten mielestä oikea vastaus. Tällä demonstroititiin, että tiede ei ole demokraattinen prosessi. Fysiikan tunneilla opettaja muun muassa antoi meidän ampua paineilmalla toimivaa pullorakettia ja demonstroi leikkirahalla, ettei kastunut paperi pala. Raketeista puhuva vierasluennoitsija antoi meidän sytyttää rakettien sytytyslankoja.

Kävimme myös yliopiston ulkopuolella: Korolevin kaupungissa tutustuimme Venäjän avaruuslentojen johtokeskukseen, suljetussa Zvezdnyin kaupungissa tutustuimme kosmonauttien valmennuskeskukseen ja jutelimme kosmonautti Sergei Zalyutinin kanssa, Zhukovskin kaupungissa tutustuimme lentokonesimulaattoreihin ja pienoismallien rakentamiseen, ja Moskovan alueella me kävimme Sirkuksessa, Kremlissä ja Varpusvuorilla.

Kesäkoulu oli huippukokemus: me kaikki saimme uusia ystäviä uuden tiedon kera, ja saimme ainutlaatuisen mahdollisuuden tutustua venäläiseen kulttuuriin. Paikallinen väestö oli ystävällistä, ja ruokaa ja vettä oli tarjolla ylen määrin. Venäjän kieltäkin oppi muutaman uuden sanan verran. Kun me viidentenätoista päivänä lähdimme paluujunasta, kaikilla oli tippa silmässä. Kannattiko osallistua? Ehdottomasti.



Laskutikulla silmään

Lehtori K.

Jatketaan Solmussa 3/2012 ollutta tarinaa muinaisista ylioppilastehtävistä. Tutkittavaksi jäi vuoden 1903 kevään kuudentena kysymyksenä ollut yhtälöryhmä

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ bx + ay + cz = d \\ cx + by + az = d, \end{cases}$$

missä kertoimet a , b ja c oletetaan keskenään erisuuriksi. Kirjassa [1], ja myös Kalle Väisälän kuuluisassa oppikirjassa [2], tehtävän ratkaisuksi annetaan

$$x = y = z = \frac{d}{a + b + c},$$

mikä tietenkin toimii vain silloin, kun $a + b + c \neq 0$. Muussa tapauksessa on kaksi vaihtoehtoa: i) jos $d \neq 0$, niin yhtälöryhmällä ei ole ollenkaan ratkaisua, ja ii) jos $d = 0$, niin ratkaisu on $x = y = z = t$, missä t on mielivaltainen reaaliluku. Nykylukion vektorikurssin suorittanut ymmärtää tämän ratkaisun geometrisestikin: ryhmän yhtälöt esittävät xyz -koordinaatiston kolmea tasoa, joiden yhteiset pisteet muodostavat origon kautta kulkevan suoran

$$(x, y, z) = t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entisaikojen koulumatematiikassa ei nähtävästi ainaakaan yhtälöiden osalta paljoakaan perustettu matemaattisesta täsmällisyydestä. Tietynlainen looginen tarkkuus alkoi ns. uuden matematiikan myötä 1970-luvulla. Jotakin hyvääkin siitä kokeilusta siis saatiin!

Koeviikon alkaessa lehtori etsi lukemattomista kirjoistaan lapsille sopivia tehtäviä, ja käteen osui taas tämä

mainio yo-tehtävien kokoelma [1] ja siitä vuoden 1934 keväällä kysytty kakkostehtävä:

Piste P liikkuu vakinaisella nopeudella pitkin x -akselia origoa kohti, kunnes se saapuu pisteeseen Q , josta se nopeudella, joka on puolet edellisestä, jatkaa matkansa y -akselilla olevaa annettua pistettä R kohti. Missä kohdassa pisteen Q tulee sijaita, jotta piste P mahdollisimman pian saapuisi pisteeseen R ? Piirrä kuvio ja merkitse pisteen Q oikea paikka.

Mutta tähän on ääriarvotehtävä! Miten niitä käsiteltiin 30-luvulla, kun differentiaalilaskentaa alettiin lukioissa opiskella vasta sotien jälkeen? Lehtorikin joutui tovin raapimaan loputtoman koulunkäynnin kovettamaa luunkuoriaistaan kysymystä mieltiessään. Tuon ajan lukiolaisille ongelma lienee ollut helppo, sillä tehtäväkokoelman [1] ratkaisuosastossa annetaan ainoastaan vastauksena oleva piste Q ja opastetaan merkitsemään se x -akselille ”geometrisesti oikein”. Jääköön tehtävä aktiivisen lukijan pohdittavaksi ehdolla, että ratkaisussa ei saa soveltaa ns. korkeampaa matematiikkaa! Lehtori palaa asiaan jossakin myöhemmässä Solmussa.

Viitteet

- [1] R. Laurén, E. Kannisto, *Matemaattiset tehtävät ylioppilastutkinnossa vuosina 1895–1935*, kahdeksas painos, Gummerus osakeyhtiö, 1935.
- [2] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 2, pitempi kurssi*, kahdeksas painos, WSOY 1966.