

Hex-pelin matematiikkaa

Tuomas Korppi

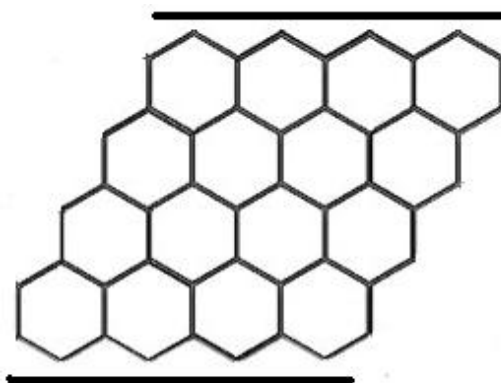
Johdanto

Hex on kahden pelaajan strategiapeli, jonka ovat keksineet toisistaan riippumatta matemaatikot Piet Hein ja taloustieteen Nobelin saanut John Nash¹. Peli on siitä mielenkiintoinen, että sitä on mahdollista analysoida matemaattisesti aika pitkälle, mutta ei kuitenkaan niin pitkälle, että käytännön pelaaminen olisi orjallista kaavojen seuraamista.

Tässä kirjoittelmassa esittelemme Hexin ja todistamme muutaman peliä koskevan teoreeman. Esityksemme perustuu osin teokseen Browne [1].

Hexin säännöt

Hexiä pelataan timantinmuotoisella pelilaudalla, jolla on kuusikulmioista koostuva ruudutus (nk. heksaruudutus). Kaksi vastakkaista pelilaudan sivua on merkitty mustiksi ja toiset kaksi vastakkaista sivua valkoisiksi. (Katso kuva 1.) Piet Hein suositteli peliin 11×11 kuusikulmiosta eli *heksasta* koostuvaa lautaa, joka on nykyisin yleisimmin käytetty, ja John Nash puolestaan 14×14 heksasta koostuvaa lautaa. Allekirjoittaneen suosikkikoko on 13×13 .



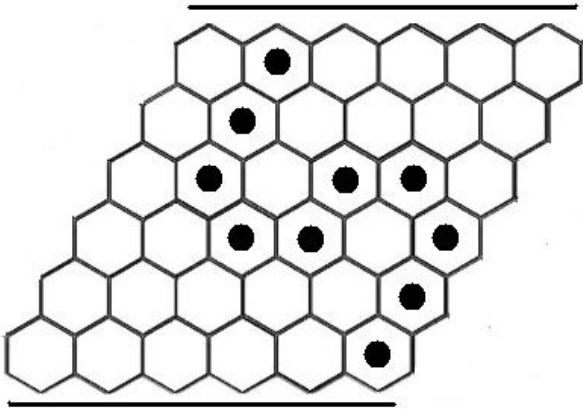
Kuva 1: 4×4 -laut.

Toinen pelaaja pelaa mustilla pelinappuloilla ja toinen valkoisilla. Pelinappuloita oletetaan olevan tarpeeksi niin, että ne eivät voi loppua kesken.

Peli alkaa tyhjältä laudalta. Vuorollaan pelaaja asettaa yhden omanvärisensä pelinappulan johonkin pelilaudan vapaaseen kuusikulmioon.

Pelin voittaa se pelaaja, joka saa yhdistettyä omanvärisensä pelilaudan sivut omanvärisistä, vierekkäisissä heksoissa sijaitsevista nappuloista koostuvalla nappulaketjulla. Voittava ketju saa mutkitella kuinka paljon tahansa, kunhan se yhdistää sivut. (Katso kuva 2.) Laudan kulmaheksojen katsotaan kuuluvan kumpaankin viereiseen sivuun.

¹Anekdootin mukaan Nashin keksimänä peli tunnettiin nimellä *John* (englanninkielinen slangi-ilmaus vessalle), koska pelilautaa muistuttaa vessan lattian laatoitusta.



Kuva 2: Mustan voittopolku. Ylä- ja alalaidat on yhdistetty.

Täyden informaation pelit

Tarkoitamme täyden informaation pelillä lauta- tai vastaavaa peliä, joka toteuttaa kaikki seuraavat ehdot:

- Pelissä ei ole satunnaisuutta (kuten nopanheittoa).
- Pelissä ei ole tietoa, jonka vain osa pelaajista tietäisi (kuten pelaajan kädessä olevat kortit).
- Pelaajat tekevät siirrot vuorotellen. (Pelissä ei siis ole kivi-sakset-paperi -pelin tyyppistä yhtäaikaista siirtojen valitsemista.)

Siis esimerkiksi shakki, go ja hex ovat täyden informaation pelejä.

Voittostrategialla tarkoitamme menetelmää, jota seuraamalla pelin voittaa varmasti. Tasapelistrategia tarkoittaa strategiaa, jota seuraamalla saa aikaan varmasti joko voiton tai tasapelin.

Voidaan todistaa seuraava teoreema. Todistus jätetään vaikeahkoksi harjoitustehtäväksi. Tehtävää tosin kannattaa yrittää vasta siinä vaiheessa, kun on lukenut tämän kirjoitelman loppuun ja saanut jonkinlaisen kuvan siitä, kuinka tällaisia asioita voidaan todistaa.

Teoreema 1. *Äärellisessä, kahden pelaajan täyden informaation pelissä jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia.*

Shakki on äärellinen peli, koska shakissa on sääntö, jonka mukaan peli on tasapeli, kun laudan asema on toistunut kolme kertaa. Näin ollen meillä on tulos, jonka mukaan shakissakin jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. Ei kuitenkaan tiedetä, mikä kyseisistä vaihtoehdoista pätee. On myös mahdollista (ja jopa luultavaa), että kyseiset strategiat ovat niin monimutkaisia, että ihmiset eivät koskaan tule tuntemaan niitä.

Edellisen tuloksen nojalla myös Hexissä jommalla kummalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. Hexistä tiedetään kuitenkin hiukan enemmänkin, ja tätä käsittelemme seuraavassa luvussa.

Teoreemalle saadaan helposti seuraava korollaari:

Korollaari 2. *Jos edellisessä teoreemassa peli ei voi päättyä tasapeliin, jommalla kummalla on voittostrategia.*

Huomautamme, että pelin äärellisyysehto on myös olennainen. On olemassa monimutkaisia joukko-opillisia kahden pelaajan täyden informaation pelejä, jotka toteuttavat seuraavat kaikki ehdot:

- Pelissä tehdään yhteensä ääretön jono siirtoja ja voittaja ratkaistaan tällaisen äärettömän siirtojonon perusteella.
- Jokainen peli päättyy jomman kumman pelaajan voittoon.
- Kummallakaan ei ole voittostrategiaa.

Jos tässä pelaajat ovat A ja B , jokaiselle A :n strategialle löytyy siis B :n strategia, joka voittaa sen, ja jokaiselle B :n strategialle löytyy A :n strategia, joka voittaa sen.

Hexin perustulokset

Tässä luvussa todistamme, että Hex-peli ei voi päättyä tasapeliin. Itse asiassa todistamme vahvemman tuloksen, jonka mukaan täyteen pelatulla laudalla toisella ja vain toisella pelaajalla on voittopolku. Todistamme myös, että Hexissä voittostrategia on pelin aloittajalla. Tämä tulos on kuitenkin teoreettinen olemassaolotulos, ja käytännön voittostrategiaa ei tunneta.

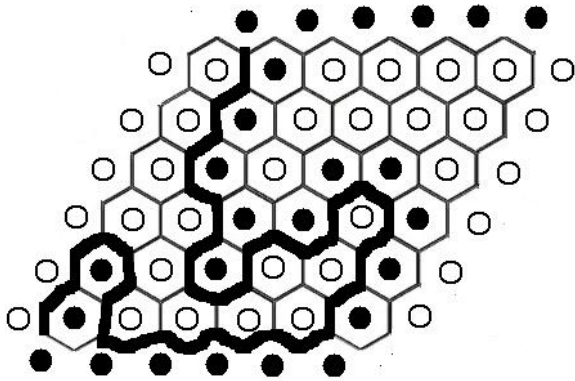
Teoreema 3. *Hex-peli ei voi päättyä tasapeliin.*

Todistus: Oletetaan, että lauta on pelattu täyteen. Osoitamme, että tässä tilanteessa toisella ja vain toisella pelaajalla on voittava nappulaketju. Teknisistä syistä oletamme, että myös laudan ulkopuolella on nappuloita, mustien sivujen vieressä mustia ja valkoisten sivujen vieressä valkoisia.

Oletetaan, että ala- ja yläsivut ovat mustia ja oikea ja vasen sivu valkoisia.

Muodostamme tässä todistuksessa polun, joka kulkee heksojen välisiä reunaviivoja pitkin niin, että kaikissa kohdissa polun vasemmalla puolella on valkea nappula ja polun oikealla musta nappula. Tässä siis oikea ja vasen määritellään suhteessa polkua kulkevaan henkilöön. Huomautamme, että jos olemme muodostaneet polkua n askelta ja tulleet kolmen heksan leikkauspisteeseen, voimme aina jatkaa polkua. Jos edessä on valkea nappula, jatkamme polkua oikealle, ja jos edessä on musta nappula, jatkamme polkua vasemmalle.

Aloitamme polun laudan vasemmasta alanurkasta. Jos siinä on valkoinen nappula, aloitamme sen alapuolelta (tällöin aloituspisteen alla on musta nappula laudan ulkopuolella), ja jos siinä on musta nappula, aloitamme sen vasemmalta puolelta (jolloin sen vasemmalla puolella on valkea nappula laudan ulkopuolella). Jatkamme polkua, kunnes törmäämme laudan ylä- tai oikeaan laitaan. Edellisen kappaleen perusteella polkua voidaan jatkaa näin. Jos törmäämme laudan ylälaitaan, polun oikealla puolella on voittava musta ketju, ja jos törmäämme oikeaan laitaan, polun vasemmalla puolella on voittava valkea ketju. Siis jommalla kummalla pelaajalla on voittava ketju. (Polusta katso kuva 3).



Kuva 3: Vahvennettuna polku, joka konstruoitiin Teoreeman 3 todistuksessa.

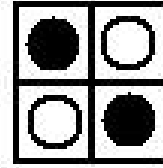
Polkumme tosiaan päättyy lopulta joko oikeaan tai ylälaitaan. Se ei nimittäin voi päättyä silmukkaan, koska tällöin silmukan lopussa olisi vääränvärisiä nappuloita ketjun oikealla tai vasemmalla puolen.

Perustelemme vielä sen, että polun toisella puolella on tosiaan voittava ketju. Oletetaan, että törmäsimme ylälaitaan. (Jos törmäsimme oikeaan laitaan, todistus menee samoin.) Jokaisen polkuun kuuluvan heksan sivun oikealla puolella on musta pelinappula. Koska kahdella peräkkäisellä polkuun kuuluvalla heksan sivulla on yhteinen kärki, yhteinen kärki on myös niillä peräkkäisillä heksoilla, joissa on mustat pelinappulat. Kyseisillä heksoilla on myös yhteinen sivu, koska heksalaudalla kahdella heksalla on yhteinen sivu, jos niillä on yhteinen kärki. Siis edellä mainittu musta ketju koostuu heksoista, joista kahdella peräkkäisellä on aina yhteinen sivu, joten kyseessä on voittoketju.

Lisäksi havaitsemme, että voittava ketju jakaa pelilaudan kahtia niin, että tilanne, jossa kummallakin on voittava ketju on mahdoton. \square

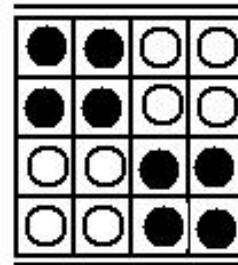
Todistuksessa mainitut seikat tarkoittavat sitä, että ainoa keino blokata vastustaja Hex-pelissä on muodostaa oma voittava ketju. Käytännön pelissä tämä tarkoittaa sitä, että Hexissä hyökkääminen (oman ketjun muodostaminen) ja puolustaminen (vastustajan estäminen) ovat yksi ja sama asia.

Todistuksemme käytti olennaisesti hyväkseen sitä, että lautamme on heksalauta. Tätä käytetään hyväksi siinä vaiheessa, kun todetaan, että polun jommalla kummalla puolella on voittava ketju. Neliöruuduista koostuvalla laudalla olisi mahdollista tehdä nk. ristileikkaus (kuva 4), joka estäisi voittavan ketjun syntymisen.



Kuva 4: Ristileikkaus.

Ristileikkauksen avulla on mahdollista tehdä neliöruuduilla pelattavalle Hex-pelille tasapelitilanne, joka on esitetty kuvassa 5.



Kuva 5: Ruutulaudalla Hex voi päättyä tasapeleihin.

Teoreema 4. Hex-pelissä ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia.

Todistus: Oletetaan, että toisena pelaavalla on voittostrategia S ja johdetaan ristiriita. Ensimmäisenä pelaava muodostaa strategian S' , joka on muutoin sama kuin S , mutta siinä mustan ja valkoisen roolit on vaihdettu, ja lautaa on peilattu jomman kumman lävistäjän suhteen niin, että sivujen väriytykset vastaavat uusien pelaajien rooleja.

Nyt ensimmäisenä pelaava voi pelata seuraavasti: Hän tekee ensimmäisen siirron mielivaltaisesti. Tämän jälkeen hän pelaa strategialla S' kuvitellen, ettei ole tehnyt ensimmäistä siirtoaan. Jos hänen jossain kohti peliä täytyy tehdä S' :n mukaan ensimmäinen siirtonsa, hän lakkaa kuvittelemasta, ettei ole tehnyt ensimmäistä siirtoaan, tekee mielivaltaisen siirron ja kuvittelee jatkossa, ettei ole tehnyt uutta mielivaltaista siirtoaan. Jos hänen täytyy myöhemmin tehdä S' :n mukaan se siirto, jota hän ei kuvittele tehneensä, hän lakkaa kuvittelemasta...

Koska S on voittostrategia, sitä on myös S' . Koska siitä siirrosta, jota ensimmäinen pelaaja ei kuvittele tehneensä, ei ole ensimmäisenä pelaavalle missään tilanteessa haittaa, ensimmäisenä pelaava voittaa. Ristiriita sen kanssa, että toisena pelaavalla on voittostrategia.

Koska kyseessä on äärellinen peli, joka ei voi päättyä tasapeliin, jommalla kummalla on voittostrategia. Koska edellisen argumentin nojalla toisena pelaavalla ei ole voittostrategiaa, voittostrategia on ensimmäisenä pelaavalla. \square

Samanlaisella argumentilla voidaan näyttää, että missä tahansa äärellisessä kahden pelaajan täyden informaation pelissä, joka ei voi päättyä tasapeliin, jossa pelaajien roolit ovat symmetriset, eikä siirrosta ole missään tapauksessa siirron tekijälle haittaa, on ensimmäisenä pelaavalla voittostrategia. Jos muut ehdot pätevät, mutta peli voi päättyä myös tasapeliin, samanlaisella argumentilla voidaan näyttää, että joko ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia tai peli päättyy optimaalisella pelillä tasapeliin.

Tässä on huomattava, että ensimmäisen pelaajan voittostrategian olemassaolon todistaminen on puhdas olemassaolotodistus: Se kertoo, että ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia, mutta se ei kerro mitään siitä, millainen tuo voittostrategia on. Hexin tapauksessa sitä ei tiedetäkään, joten käytännön pelaaminen on mielekästä.

Reilun pelin aikaansaaminen

Kuten edellisessä luvussa totesimme, ensimmäisenä pelaavalla on teoreettinen etu. Pelikokemus on osoittanut, että ensimmäisenä pelaavalla on huomattava etu myös käytännön peleissä. Tämän johdosta Hex-pelin alussa käytetäänkin nk. kakunleikkaussääntöä (englanniksi *pie rule*), joka toimii seuraavasti:

- Ensimmäisenä pelaava tekee mustilla aloitussiirron.
- Tämän jälkeen toisena pelaava valitsee, pelaako hän mustilla vai valkoisilla.
- Tämän jälkeen peli jatkuu valkean pelaajan siirrolla ja sen jälkeen normaalisti vuorotellen värejä.

Tätä protokollaa noudattaen ensimmäisen mustan siirron ei kannata olla liian hyvä, vaan sellainen, että kummallakin on siirron jälkeen suunnilleen yhtä hyvät voitonmahdollisuudet. Kakunleikkaussääntö onkin saanut nimensä operaatiosta, jossa jaetaan kakku kahteen osaan niin, että ensimmäinen ruokailija leikkaa kakun kahtia ja toinen ruokailija valitsee kumman osan ottaa. Toinen osa jää halkaisijalle.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että käytettäessä Hexissä kakunleikkaussääntöä on toisena pelaavalla teoreettinen voittostrategia.

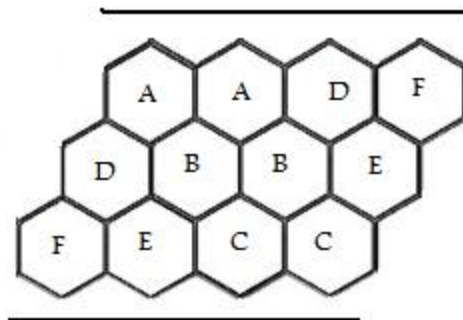
Jos toinen pelaajista on heikompi, ei kakunleikkaussääntöä yleensä käytetä, vaan heikompi pelaaja yksinkertaisesti aloittaa pelin. Hänellä on teoreettinen etu,

ja myös jonkinasteinen käytännön etu. Koska voittostrategiaa ei tunneta, ei etu ole paremmalle pelaajalle ylitsepääsemätön.

Voisi olla houkutteleva idea antaa heikommalle pelaajalle tasoitusta niin, että hän pelaa ylä- ja alalaitoja yhdistäen, ja lauta on tässä suunnassa kapeampi. Tämä idea ei kuitenkaan toimi, koska tällöin on olemassa tunnettu voittostrategia.

Teoreema 5. *Oletetaan, että meillä on Hex-lauta, joka on pystysuunnassa $n - 1$ heksan kokoinen ja vaakasuunnassa n heksan kokoinen. Tällöin ylä- ja alalaitoja yhdistävällä pelaajalla on tunnettu voittostrategia, vaikka hän pelaisi toisena.*

Todistus: Merkitään laudan heksat kirjaimilla kuten kuvassa 6.

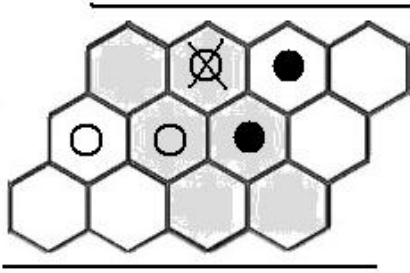


Kuva 6: Ylä- ja alasivuja yhdistävän voittostrategia.

Oletetaan, että ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaa toisena.

Nyt toisena pelaavan voittostrategia on se, että hän pelaa aina heksaan, missä on sama kirjain kuin vastustajan edellisessä pelaamassa heksassa. Todistamme, että tämä on voittostrategia.

Oletetaan, että toinen pelaaja pelaa tällä strategialla, ja tehdään vasta oletus, että ensimmäisenä pelaavalla on voittava ketju P . Oletamme, että ketju alkaa vasemmasta laidasta ja päättyy oikeaan laitaan. Voidaan olettaa, että voittoketju on minimaalinen niin, että se ei leikkaa itseään. Olkoon h ketjun ensimmäinen heksa, jossa ketju käy joidenkin oikeanpuoleisten heksojen A , B tai C kautta. Olkoon h' ketjun edellinen heksa. Koska h :ssa ja h' :ssa ei voi olla samaa kirjainta, on h yläviistoon h' :sta. Olkoon h' ketjun m :s nappula ja Q ketjun m ensimmäistä nappulaa. Olkoon R toisen pelaajan vastaukset Q :ta edustaviin siirtoihin yllä kuvaillulla voittostrategialla. Nyt Q ja R muodostavat ”pussin”, jonka sisälle h jää, eikä voittoketju voi edetä maaliinsa kulkematta sellaisen heksan läpi, jossa on R :n nappula (mikä on mahdotonta sääntöjen perusteella) tai Q :n nappula (mikä on mahdotonta, koska oletimme, ettei voittoketju leikkaa itseään.) (Pussi on kuvattu kuvassa 7.)



Kuva 7: Musta on pelannut valkean rastilla merkityn nappulan pussiin.

Siis ensimmäisenä pelaavalla ei voi olla voittoketjua. Koska peli ei voi päättyä tasapeliin, toisena pelaava voittaa, joten hänen strategiansa on voittostrategia.

Vaikka olemme yllä käsitelleet 4×3 -lautaa, nähdään helposti, että annettu argumentti yleistyy kaikille laudan koille $n \times (n - 1)$. \square

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että sama pätee myös siinä tapauksessa, että pysty- ja vaakasuuntien kokojen ero on enemmän kuin 1, sekä se, että sama pätee myös silloin, kun ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaaja aloittaa pelin.

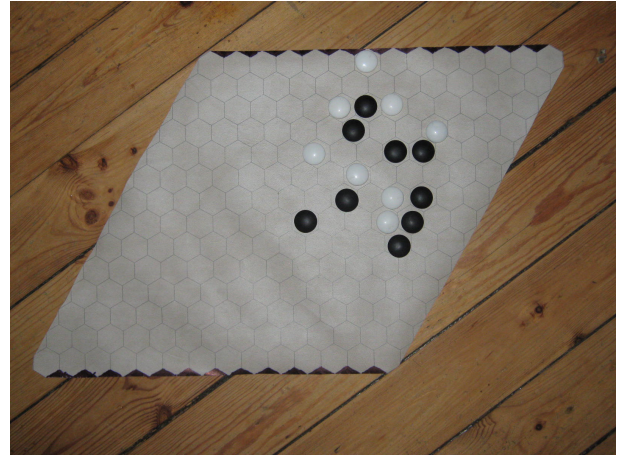
Mistä pelivälineet?

Siltä varalta, että lukijalle iski kipinä päästä pelaamaan, selitämme tässä luvussa, kuinka hankkia pelivälineet. Hex-settejä ei käsittäkseni myydä missään, joten pelivälineet joutuu valmistamaan itse.

Roolipelivälineitä myyvät kaupat myyvät tuotetta nimeltä Battle Mat. Se on ohut vinyylilauta, jossa on toisella puolella tavallinen ruudutus ja toisella puolella heksaruudutus. Siitä on helppo leikata halutun kokoinen Hex-lauta. Suomessa Battle Matia myy mm. Fantasiapelit (www.fantasiapelit.fi). Hex-nappuloina voidaan käyttää Go-pelin pelinappuloita eli "kiviä", joita Suomessa myy Gaimport (www.kolumbus.fi/gaimport/). Onnekkiaan yhteensattuman ansiosta Battle Mat, jossa on yhden tuuman kokoiset heksat, on juuri oikean kokoinen standardeille Go-kiville.

Koska Hexissä nappuloita ei koskaan siirretä tai poisteta laudalta, sitä voi pelata myös kynällä ja paperila. Tähän tarkoitukseen lautoja voi tulostaa Hex Wikistä (www.hexwiki.org/wiki/Printable_boards).

Internetissä Hexiä voi pelata esimerkiksi Little Golemissa (www.littlegolem.net) kirjepelin tahtiin. Little Golem tarjoaa 13×13 ja 19×19 -lautakoot.



Kuva 8: Tämän kirjoitelman ohjeilla toteutettu Hex-setti.

Pähkinöitä

1. Olkoon P äärellinen, kahden pelaajan täyden informaation peli, jossa tasapeli on mahdoton. Oletetaan, että P :ssä on kakunleikkaussääntö ensimmäisen siirron jälkeen. Osoita, että toisena pelaavalla on voittostrategia. (Voit olettaa tunnetuksi, että kaikissa kahden pelaajan äärellisissä täyden informaation peleissä, joissa tasapeli ei ole mahdollinen, on jommalla kummalla pelaajalla voittostrategia.)
2. Oletetaan, että Hexissä laudan pystykoko on pienempi kuin vaakakoko, ja ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaa toisena. Konstruoi ylä- ja alalaitoja yhdistävälle voittostrategia.
3. Sama kuin edellä, mutta ylä- ja alalaitoja yhdistävä aloittaa pelin.
4. Teoreeman 5 todistuksessa oletettiin, että voidaan valita voittoketju, joka ei leikkaa itseään. Osoita, että tämä on mahdollista. Osoita siis, että jos P' on voittoketju, joka leikkaa itseään, P' :n sisällä on voittoketju P , joka ei leikkaa itseään.
5. Osoita, että kaikissa kahden pelaajan äärellisissä täyden informaation peleissä jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. (Vihje: Induktio pelin mahdollisista lopputiloista taaksepäin.)

Viitteet

- [1] Browne, Cameron, *Hex Strategy: Making the Right Connections*, A K Peters Ltd, 2000.