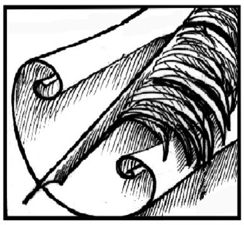

Pitkän matematiikan opetussuunnitelmasta

Pääkirjoitus

Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen johtaja, professori Mats Gyllenberg kuuluu jossakin yhteydessä sanoneen, että ”yhtään ihmiskunnan suurista ongelmista ei ratkaista ilman matematiikan apua”. Ajatusta voi täydentää toteamalla, että tuskin on olemassa yhtään tällaista ongelmaa, jonka ratkaisemisessa tarvittava matematiikka ei tavalla tai toisella pohjautuisi edellisen Solmun pääkirjoituksessa [1] lukion pitkän matematiikan opetussuunnitelman pohjaksi ehdottamaani asialistaan. Seuraavassa pohditaan tätä seitsemän kohdan ohjelmaa hieman yksityiskohtaisemmin. Sen sisältö vastaa suurelta osin nykyistä opetussuunnitelmaa, mutta asiat ovat oppimisen ja myös fysiikan kannalta paremmassa järjestyksessä. Nykyiset valtakunnalliset syventävät kurssit sisältyvät karsittuina esittämääni pakolliseen oppimäärään.

1. Opiskelu alkaa reaalilukujen laskulakien ja ominaisuuksien esittelyllä. Verrannollisuus ja prosenttilaskut kerrataan harjoitustehtävissä. Pääsisältönä on perehtyminen algebrallisten, eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuuksiin. Niihin liittyvien lausekkeiden, yhtälöiden ja epäyhtälöiden käsittely suoritetaan samassa laajuudessa kuin nykyisinkin. Lasketaan myös funktioiden ja lukujonojen raja-arvoja. Tämä ei raskauta oppimäärää, vaan pikemminkin lisää ymmärrystä esimerkiksi rationaalifunktioiden määrittelyehdoista. Määritellään funktion jatkuvuus ja todetaan jatkuvan funktion perusominaisuudet. Juurifunktiot ja potenssi, missä eksponenttina ei ole kokonaisluku, käsitellään ennen eksponenttifunktioon perehtymistä. Logaritmien osalta keskitytään pääasiassa Briggsin logaritmiin, mutta johdetaan myös kantaluvun vaihtosääntö. Luonnollinen logaritmi opiskellaan myöhemmin analyysin yhteydessä. Käänteisfunktioita käsitellään esimerkkien kautta.

2. Logiikka ja lukuteoria otetaan osaksi pakollista oppimäärää, sillä, kuten monet ovat todenneet, matematiikan opetuksen on seurattava aikaansa. Logiikan alkeet, induktio, Boolen algebra ja joukko-opin peruskäsitteet ovat kongruenssiopin lisäksi tämän osion keskeisiä asioita. Sovelluksina esitellään lukuteoriaan perustuvia salakirjoitusjärjestelmiä, erityisesti RSA-algoritmi. Sivustolla `http://avoinoppikirja.fi` oleva oppikirja [2] kattaa suunnilleen nämä asiat.

3. Suora ja epäsuora todistus on opittu edeltävässä logiikan osiossa, joten valmiudet deduktiiviseen geometrian opiskeluun ovat olemassa. Päättelyn pohjaksi annetaan tiettyjä selviöinä pidettäviä lauseita. Eräiden Eukleideen-Hilbertin aksioomien lisäksi niitä ovat mm. samankohtaisia kulmia koskeva lause sekä kolmioiden yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuslauseet. Tarkoituksena ei ole problematisoida intuitiivisesti selviä totuuksia vaan näyttää muutaman esimerkin avulla, miten väittämät todistuvat loogisesti tietyistä perusteista lähtien. Pääasiana on oppia soveltamaan algebraa ja yhdenmuotoisuutta geometrisissa ongelmissa. Monikulmioiden pinta-aloja johdetaan suorakulmiosta lähtien. Yleisempien kappaleiden tilavuudet annetaan valmiina, joskin eräitä niistä voi johtaa kirjoituksessa [3] esitetyllä tavalla. Opitaan sini- ja kosinilauseet, ja tässä yhteydessä laajennetaan trigonometristen funktioiden määritelmät mielivaltaisille kulmille. Vektoreita tarkastellaan alustavasti jo nyt määrittelemällä niiden summa ja erotus, luvulla kertominen ja yhdensuuntaisuus, miltä pohjalta voidaan käsitellä vektorin jakaminen tasossa komponentteihin. Vektorioppi antaa perspektiiviä eräille geometrian lauseille ja niitä tarvitaan myös fysiikassa. Sen opiskelu on helpompaa, jos hallitsee kulloinkin tarvittavat matemaattiset käsitteet. Lukiossa matematiikan on kuljettava fysiikan edellä.

Nämä kolme asiakokonaisuutta muodostavat ensimmäisen lukiovuoden oppimäärän. Opettajalla on oltava mahdollisuus oman harkintansa mukaan kiihdyttää tai hidastaa etenemisnopeutta opettamansa ryhmän tarpeita vastaavaksi. Matematiikan opiskelu tulisikin järjestää jaksottomaksi käsittämään viisi tai kuusi oppituntia viikossa koko lukuvuoden ajan, onhan pitkä matematiikka sen valinneille äidinkielen ohella koulun tärkein oppiaine. Aikaa käytetään pikemminkin syvyyssuunnassa tapahtuvaan opiskeluun, joten perusasiat ehditään käymään läpi kaikkialla lukuvuoden loppuun mennessä. Tällöin esimerkiksi koulun vaihto ei aiheuta merkittäviä ongelmia. Luultavasti eräissä muissakin oppiaineissa on tarvetta palata jaksottomaan opiskeluun. Koulun hallinnon on tässä joustettava, sillä sen tehtävähän on taata oppimisen edellytykset eikä tuhota niitä opetusta byrokratisoimalla.

4. ja **5.** Trigonometria, kompleksiluvut, vektorioppi ja analyyttinen geometria muodostavat monin tavoin toisiinsa kietoutuvan kokonaisuuden, joka on parasta aloittaa vektoreilla. Opiskellaan aluksi muotoa $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ olevien vektorien yhteen- ja vähennyslasku, reaaliluvulla kertominen, pituus ja yhdensuuntaisuus. Trigonometriset funktiot on jo määritelty yksikköympyrän avulla, joten radiaaniin tutustumisen jälkeen voidaan todistaa kosinin ja sinin yhteen- ja vähennyslaskukaavat, kuten kirjoituksessa [4] on tehty. Trigonometristen funktioiden perusominaisuuksien johtamisen jälkeen päästään perehtymään yhtälöihin sekä ilman derivointia ratkeaviin ääriarvotehtäviin. Kompleksiluvut esitetään xy-tason lukupareina, joille määritellään alussa opitun vektorilaskennan lisäksi kertolasku. Luonnollisesti opitaan myös kompleksiluvun tavanomainen esitystapa, napakoordinaattiesitys ja de Moivren kaava. Polynomien jaollisuusoppi täydennetään algebran peruslauseen avulla. Vektorilaskentaa voidaan nyt jatkaa esittelemällä aluksi xyz-koordinaatisto tavanomaisine kantavektoreineen. Komponenttiesitysten rinnalle otetaan koordinaattiesitykset ja niiden avulla suoritettavat laskutoimitukset. Määritellään skalaaritulo ja todistetaan sitä koskevat laskusäännöt. Määritellään vektoritulo ja annetaan sitä koskevat laskusäännöt ilman todistuksia. Esitetään suuntaissärmiön tilavuus skalaarikolmitulon itseisarvona. Analyyttisen geometrian osuus aloitetaan xy-tason suoran vektoriyhtälöllä, joka voidaan saman tien todeta dimensiosta riippumattomaksi. Vektoriyhtälöstä johdetaan suoran parametriyhtälö ja siitä edelleen tavanomainen yhtälö. Kulmakertoimeen ja sen trigonometriseen merkitykseen päästään suuntavektorin avulla. Johdetaan xy-tason suoran normaaliyhtälö vaatimalla, että annetun pisteen kautta kulkeva suora on kohtisuorassa tunnettua vektoria vastaan. Samalla tavalla saadaan xyz-koordinaatiston tasolle normaaliyhtälö. Johdetaan kaava pisteen etäisyydelle xy-tason suorasta ja xyz-koordinaatiston tasosta. Hyödynnetään vektoreita mahdollisimman tehokkaasti kaikissa muissakin suoria ja tasoja koskevissa kysymyksissä. Lineaarisia yhtälöryhmiä ratkaistaan sekä algebrallisesti että geometrisesti. Toisen asteen käyriä käsitellään nykyistä perusteellisemmin. Ellipsi, paraabeli ja hyperbeli määritellään yhdenmukaisesti uraominaisuuden kautta ja niille johdetaan parametriesityksiä. Niiden tangentteja määritetään tavanomaisen diskriminanttitarkastelun lisäksi laskemalla käyrien sekanttien kulmakertoimien raja-arvoja. Näin saadaan differentiaalilaskennan perusajatus kirkastettua niin, ettei se välittömästi katoa muodollisten derivoimissääntöjen alle.

6. Todennäköisyyslaskenta aloitetaan kombinatoriikan alkeilla. Binomilause todistetaan (ks. [5]), sillä sitä tarvitaan myöhemmin myös potenssin derivoimissääntöä johdettaessa. Tilastollisen aineiston keskiarvo ja keskihajonta käsitellään, koska niitä tullaan tarvitsemaan normaalijakauman yhteydessä. Joukko-opin käsitteet ja merkinnät tulevat luontevasti käyttöön todennäköisyyttä määriteltäessä ja laskusääntöjä johdettaessa. Todennäköisyyslaskennan keskeistä sisältöä geometrisen, tilastollisen ja ehdollisen todennäköisyyden lisäksi ovat äärellisiin kenttiin liittyvät diskreetit satunnaismuuttujat. Niiden todennäköisyysjakaumista esitetään myös massatulkinta, mikä selkiyttää odotusarvon ja varianssin käsitteitä. Toistokokeisiin liittyvien tehtävien yhteydessä kertautuvat eksponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuudet.

Opiskelun precalculusvaihe on näin saatu päätökseen, ja on luotu luja pohja korkeamman matematiikan opiskelulle. Sen voi aloittaa jo toisen opiskeluvuoden keväällä välittömästi todennäköisyyslaskennan tultua käsitellyksi. Aikataulut ovat järjestelykysymyksiä.

7. Analyysin opiskelu aloitetaan derivaatan määritelmällä, jonka soveltamista harjoitellaan perusteellisesti. Yleisten derivoimissääntöjen todistamisen jälkeen päädytään johtamaan alkeisfunktioiden derivaatat. Samalla harjoitellaan myös integraalifunktion muodostamista, kuten opetussuunnitelmaehdotuksessa [6] esitetään. Näiden laskutoimitusten opiskelu samanaikaisesti estänee niiden sekaantumisen myöhemmissä opinnoissa. Luonnollisesti integrointitekniikkaa on harjoiteltava vielä erikseen ennen määrätyn integraalin käsittelyä. Funktion kulkuun liittyvät asiat perustellaan väliarvolauseen avulla. Tavanomaisten sovellusten lisäksi käsitellään yhtälön numeerinen ratkaiseminen Newtonin menetelmällä, sillä siinä tulee taas kerran esille differentiaalilaskennan ydin. Tähän kaikkeen riittää aikaa, koska opiskelua ei tarvitse alati keskeyttää uusien funktiotyyppien esittelyyn. Määrätty integraali määritellään ala- ja yläsummia käyttäen. Induktiota opeteltaessa on todistettu erilaisia kokonaislukujen potenssisummia, joiden avulla voidaan todeta, että tietyllä välillä esimerkiksi funktion $g(x) = x^3$ tasavälisillä ala- ja yläsummilla on yhteinen raja-arvo. Tämän jälkeen oppilaan on helppo hyväksyä, että sama pätee ainakin jatkuville funktioille. Ennen määrätyn integraalin ja integraalifunktion välisen yhteyden johtamista lasketaan integraalien likiarvoja puolisuunnikasmenetelmällä. Se havainnollistaa hyvin sitä, mistä integraalilaskennassa on kysymys. Määrätyn integraalin osalta nykyiseen oppimäärään lisätään fysiikan sovelluksia, ensimmäisen kertaluvun separoituvia differentiaaliyhtälöitä, epäoleelliset integraalit ja jatkuvia satunnaismuuttujia koskeva todennäköisyyslaskennan osuus, joka huipentuu normaalijakauman käsittelyyn. Viimeisenä käsitellään sarjat, koska nyt on mahdollista testata niiden suppenemista myös integraalitestein.

Tällaisen pitkän matematiikan oppimäärän kunnollinen suorittaminen takaa pääsyn matematiikan taitoja edellyttäviin korkeakouluopintoihin ja suurella todennäköisyydellä myös niissä menestymisen. Tehokas opiskelu edellyttää taitavasti laadittua oppimateriaalia. Harjoitustehtävissä laadun on korvattava määrä. Hyvä periaate on, että matematiikkaa sovelletaan matematiikkaan, eli aikaisemmin opitut asiat esiintyvät osina myöhempiä harjoitustehtäviä. Näin oppimäärä ei pirstaloidu erillisiin osiin. Arkielämän sovellusten tulee olla järkeviä. Oikein mitoitettu oppimateriaali ja hyvä kouluopetus ei pureksi kaikkea valmiiksi. Harjoitustehtäviä ratkaisemalla oivalletaan asioiden välisiä yhteyksiä ja opitaan laskurutiineja, mitä kukaan ei voi tehdä kenenkään puolesta. Matematiikka kasvaa osaksi harrastajansa keskushermostoa, ja näin juuri sen on oltava, jos joskus aikoo osallistua ”ihmiskunnan suurten ongelmien ratkaisemiseen”. Muussa tapauksessa niiden pohtiminen jää hyödyttömäksi taivasteluksi.

Ylioppilaskoe saisi perustua pelkästään tässä ehdotettuun pakolliseen oppimäärään, joskin sen lisäksi voidaan opiskella koulukohtaisia syventäviä oppimääriä. Sopivia aihepiirejä löytyy analyyttisesta geometriasta, sillä esimerkiksi toisen asteen käyriä on mukava tutkia napakoordinaatistossa ja vektorituloon liittyvät todistukset ovat myös syventävää oppiainesta. Geometriaakaan ei ole tyhjentävästi opiskeltu pakollisen osuuden yhteydessä ja lukuteoriaa voi aina opiskella lisää. Analyysin rinnalla voidaan opiskella differentiaaliyhtälöitä. Vektoriopin jatkoksi sopii erinomaisesti myös lineaarialgebra. Sen voi jakaa konkreettiseen kaksi- ja kolmiulotteiseen osaan ja abstraktimpaan osaan, jossa vektoreita ja matriiseja tarkastellaan yleisemmin.

On outoa, että oppimateriaalien tekeminen on jätetty sisältöä koskevan kontrollin tavoittamattomiin yksityiseksi liiketoiminnaksi. Matematiikan kannalta olisi parempi, jos opetushallitus värväisi ammattimatematiikoita laatimaan ja tarkistamaan vapaasti käytettävät koko lukion kattavat oppikirjat. Avoin-kirja-projektissa työskentelevät saattaisivat olla ydinjoukkona niiden laatimisessa. Tämän kirjoituksen seitsenkohtainen ohjelma on kaikin puolin sopiva jäsennys yksityiskohtaiselle opetussuunnitelmalle ja siihen pohjautuvalle oppikirjasarjalle, sillä siinä esitetyt asiat on joka tapauksessa opittava ja ne on asetettu kohtuullisen loogiseen järjestykseen. Mitä muuta lukion pitkä matematiikka voisi olla?

Sanomattakin on selvää, että pitkän matematiikan opiskelu on aloitettava välittömästi lukion alkaessa. Mihinkään kahdesta neljään kaikille yhteisiin kursseihin ei ole mahdollisuutta eikä motiivia. Ne johtaisivat yksinomaan tyhjäkäyntiin ja turhautumiseen, sillä matemaattisesti heikoin lukioon tuleva oppilasaines ei hallitse alkeitakaan kirjaimilla laskemisesta ja numeeriset taidotkin ovat hukassa. Mikään ei enää lukiossa saa hidastaa oppimaan haluavien ja kykenevien etenemistä.

Lukion lyhyen matematiikan oppimäärää on kehitettävä nykyistä paremmin vastaamaan matemaattisesti heikompien oppilaiden tarpeita. Se voisi sisältää arkielämän laskentoa käsittelevän kokonaisuuden, jonka päälle olisi mahdollisuus valita lisäkursseja, joilla opitaan yhteiskunnallisten yliopisto-opintojen, OKL:n ja eräiden amk-opintojen kannalta olennaisia asioita. Lyhyestä matematiikasta lisää seuraavassa Solmussa.

Markku Halmetoja

Viitteet

[1] Markku Halmetoja, Lopultakin, vai eikö sittenkään, http://solmu.math.helsinki.fi/2013/1/paak_1_13.pdf

[2] Anna-Maija Partanen, Antti Rasila, Mika Setälä, Vapaa matikka 11, http://avoinoppikirja.fi/tiedostot/lukio/matematiikka/vapaa_matikka_11_v1.pdf

[3] Markku Halmetoja, Induktio, ympyrä, kartio ja pallo, http://solmu.math.helsinki.fi/2012/3/induktio_ympyra_kartio_pallo.pdf

[4] Markku Halmetoja, Lukion trigonometriaa, http://solmu.math.helsinki.fi/2012/1/trigonometriaa.pdf

[5] Pekka Alestalo, Binomikaava, http://solmu.math.helsinki.fi/2013/2/binomi.pdf

[6] Heikki Pokela, Ehdotus lukion uudeksi opetussuunnitelmaksi, http://www.luma.fi/artikkelit/1009/ehdotus-uudeksi-opetussuunnitelmaksi