



Geometrisia havaintoja tekemässä

Riikka Kangaslampi, Helle Majander

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Missä on matematiikkaa – tai oikeastaan, missä sitä ei olisi? Aalto-yliopiston Matematiikan ja systeemianalyysin laitoksen järjestämällä matematiikkaleirillä tarkasteltiin erilaisia geometriaan tavalla tai toisella liittyviä ilmiöitä kuten permutaatioita ja symmetrioita Zometool-rakennelmissa, jongleerausta, kaksi- ja kolmiulotteisia toruksia, fraktaaleita ja graafeja.



Kuva 1: Leiriporukka kartanon portilla.

Leiri järjestettiin lokakuun 2012 ensimmäisenä viikonloppuna Sannäsin kartanon syksyisissä maisemissa Porvoossa. Pääohjaajina toimivat tutkijat Riikka Kangaslampi ja Matthew Stamps, joiden apuna touhusivat opiskelijat Jouko Lehtomäki ja Helle Majander. Leirille osallistui yhteensä 24 ensimmäisen ja toisen vuoden

lukio-opiskelijaa Olarista ja Pohjois-Tapiolasta (Kuva 1).

Sannäsin kartano tarjosi leirille erinomaiset puitteet. Koko porukka nautti saunomisesta ja uimisesta sekä hyvästä ruoasta, mutta opittiin siellä matematiikkaakin.

Geometriaa Zometool-tikuilla

Leirin ensimmäisen varsinaisen ohjelman aikana esiteltiin Zometool-tikut [1], joiden avulla tarkasteltiin säännöllisiä monitahokkaita ja niiden symmetrioita. Tikuilta saatiin rakennettua kaikki erilaiset Platonin kappaleet (Kuva 2). Niiden avulla opittiin esimerkiksi, mitkä kappaleet ovat toistensa duaaleja ja tutustuttiin konveksisuuden käsitteeseen. Lisäksi tarkasteltiin kappaleiden symmetriatasoja (peilaus) ja -akseleita (kierto).

Platonin kappaleita täydentämällä nähtiin Kepler-Poinsotin monitahokkaiden idea, vaikka Zometool-tikuilla näitä kappaleita ei aivan täydellisesti voikaan rakentaa. Lopuksi johdettiin Platonin kappaleille Eulerin karakteristika

$$F - E + V = 2,$$

missä F on tahkojen, E särmien ja V kärkien lukumäärä.



Kuva 2: Felix selittää, miksi Platonin kappaleita on olemassa vain viisi erilaista.

Jongleerauksen matematiikkaa

Perjantai-iltana leirillä pyörähti vierailevana tähtenä lehtori ja jonglööri Harri Varpanen (Kuva 3). Harri kertoi innostuneensa jongleerauksesta opiskeluaikoina, matematiikan hän oli kuitenkin löytänyt ensin. Tästä syystä tuntui luontevalta yhdistää mielenkiinnon kohteet ja tutkia jongleerauksen matemaattista mallia. Esityksessään Harri käsitteli jaksollisten jongleerauskuvioden teoriaa, josta hän on kirjoittanut Solmussaikin (3/2005).



Kuva 3: Harri demonstroi jongleerauskuvioita.

Kombinatoriikkaa SET-pelin avulla

Viikonlopun aikana tutustuttiin SET-korttipeliin [2] ja tutkittiin siihen liittyviä kombinatorisia kysymyksiä.

Peliä pelataan kuviokorteilla. Jokaisella kortilla on neljä kuvioihin liittyvää ominaisuutta, joista kukin voi saada kolme eri arvoa:

Lukumäärä	{yksi, kaksi, kolme}
Täyttö	{täysi, raidallinen, tyhjä}
Väri	{punainen, vihreä, violetti}
Muoto	{soikio, koukero, salmiakki}

Korttipakka koostuu näiden kaikista mahdollisista yhdistelmistä – siis yhteensä 81 kortista. Pelin tavoitteena on löytää kolmen kortin kokoelmia, joissa kortit ovat jokaisen ominaisuuden kohdalla joko kaikki samanlaisia tai kaikki erilaisia. Tällaista kokoelmaa sanotaan SET:ksi (Kuva 4).



Kuva 4: Esimerkki SET:stä, jossa kortit ovat kaikkien ominaisuuksien osalta erilaisia (värillisessä versiossa).

Pelaamisen lisäksi (Kuva 5) leirillä pohdittiin myös pelin herättämiä matemaattisia kysymyksiä: Kuinka monta erilaista SET:ä on mahdollista muodostaa? Millä todennäköisyydellä esimerkiksi 12 pöydälle satunnaisesti jaetun kortin joukossa on ainakin yksi SET? Kuinka monta korttia pöytään on jaettava, jotta mukana olisi varmasti yksi SET?



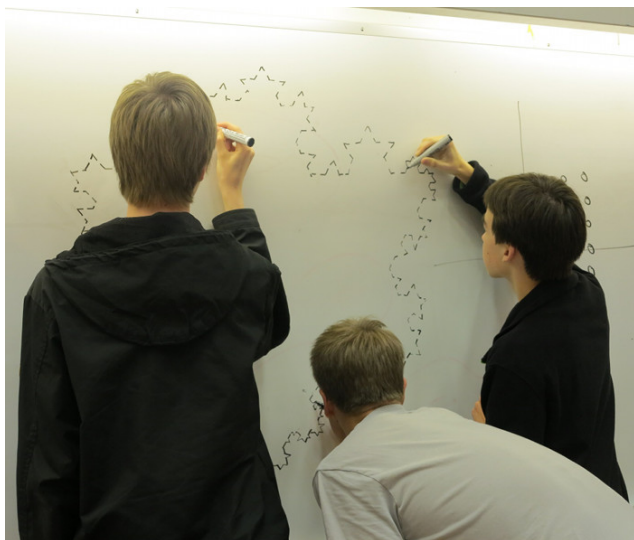
Kuva 5: SET-peliä voi hyvin pelata isollakin porukalla.

Viimeiseen kysymykseen vastaaminen ei ole aivan suoraivaista. Leirillä ongelma muotoiltiin geometrisesti modulaaristen ryhmien (Solmu 2/2003) avulla. Korttien ominaisuuksien ajateltiin olevan jäännösluokkaryhmän \mathbb{Z}_3 alkioita, jolloin kukin kortti voitiin esittää avaruuden \mathbb{Z}_3^4 vektorina. Tällöin voitiin todeta, että SET:n etsiminen on yhtäpitävää avaruuden \mathbb{Z}_3^4 suoran etsimisen kanssa [5].

Vastauksena kysymykseen: 21 kartin joukossa on aina välttämättä yksi SET. Leirillä todistuksen ideaan tutustuttiin rajoittamalla tarkastelu kortteihin, joissa on punaisia soikioita. Haasteeksi jäi etsiä korttipakasta 20 korttia, joiden joukosta ei löydy yhtään SET:ä.

Fraktaalit ja laatoitukset

Fraktaalialueeseen virittäydettiin katsomalla alan isän, Benoit Mandelbrot'n TED-puhe internetistä [3]. Siitä käy hyvin ilmi fraktaalien luonne itsesimilaarisina kuvioina: mihin tahansa kohtaan tarkennettaessa sama kokonaiskuviokuva näkyy aina uudelleen ja uudelleen. Esimerkkeinä leirillä käsiteltiin mm. Solmussakin (5/2003) esillä olleita Kochin lumihiutaletta (Kuva 6) ja Sierpinskiin kolmiota. Havaittiin, että "äärettömän tarkasti" piirrettäessä Kochin lumihiutaleen reunakäyrä on ääretön, vaikka se rajaa lumihiutaleen, jonka pinta-ala on vain $8/5$ kertaa alkuperäisen kolmion pinta-ala.



Kuva 6: Kochin lumihiutaleen piirtäminen käy valko-
taululla näppärästi.

Tason laatoituksella tarkoitetaan äärettömän tason peittämistä aukottomasti joukolla monikulmioita, jotka eivät mene päällekkäin (Kuva 7). Nopeasti leiriläiset löysivät kaikki säännölliset eli yhtä säännöllistä monikulmiota toistamalla muodostuvat laatoitukset samoin kuin puolisäännölliset laatoitukset, joissa saa käyttää useita erilaisia säännöllisiä monikulmioita. On olemassa myös täysin epäsäännöllisiä, ns. jaksottomia laatoituksia. Yksi esimerkki tällaisista on Keskuskadun kiveytyksenä Helsingissä, nimittäin Roger Penrosen jaksoton laatoitus leija- ja nuolilaatoilla. Kannattaa käydä katsomassa, kun vierailee Helsingin keskustassa!



Kuva 7: Emmi ja Inka tekevät laatoitustaidetta M. C. Escherin tyyliin.

Tästä on hyvä jatkaa

Sunnuntai-iltana leiriltä poistui tyytyväisiä nuoria. SET-pelin pelaaminen jatkui viimeiseen saakka vielä bussissakin. Palautteen perusteella kaikki osallistujat suosittelevat vastaavaa leiriä muille matematiikasta kiinnostuneille, osa jopa niille, joita matematiikka ei oikein vedä puoleensa. Toivommekin, että voimme järjestää vastaavia tapahtumia myös jatkossa. LUMA Sanomia [4] kannattaakin seuraila Aallon ja muiden yliopistojen tapahtumien löytämiseksi!

"Zomejen avulla oli helppoa tajuta kuviot. Jongleeraus oli hauskaa ja yllätin itseni ymmärtämällä melkein kaiken sen matemaattisen asian."

"Loistava leiri! Haluaisin ensi vuonna uudestaan."

"Oli kiva, että matemaattisia asioita käytiin näin erilailla hahmottamalla."

"Seuraavaksi viikon leiri!"

Viitteet

- [1] <http://zometool.com/>
- [2] <http://www.setgame.com/set/>
- [3] http://www.ted.com/talks/lang/fi/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness.html
- [4] <http://www.luma.fi>
- [5] Benjamin Lent Davis and Diane Maclagan, *The Card Game Set*, <http://www.math.rutgers.edu/~maclagan/papers/set.pdf>