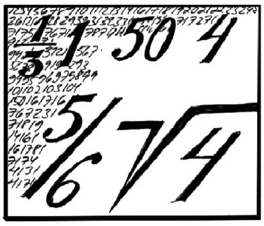

Kilpailutehtäviä yhtälöistä

Heikki Pokela
Tapiolan lukio

Yhtälöiden ratkaisu on yksi matematiikkakilpailujen tehtävätyypeistä. Usein kysytään yhtälölle joko yksittäistä ratkaisua tai ratkaisuiden määrää. Yhtälö voi sisältää useampiakin kuin yhden muuttujan, mikä yleensä tekee ratkaisemisen vaativaksi, ellei jopa mahdottomaksi millään lukiokurssilla esitellyllä standarditavalla. Esimerkki tällaisesta tehtävästä on:

Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut m ja n siten, että

$$m^2 - n^2 = 270.$$

(MAOL alkukilpailu 2000)

Ratkaisu perustuu lukiossa selkäytimeen saakka harjoiteltuun summan ja erotuksen tuloon. Termien $m+n$ ja $m-n$ parillisuutta ja parittomuutta eri vaihtoehdoilla tarkastelemalla päätyy havaitsemaan, että ne ovat joko molemmat parillisia tai parittomia riippuen muuttujien m ja n valinnasta. Edellisestä puolestaan seuraa summan ja erotuksen tulon parittomuus tai jaollisuus neljällä. Luku 270 ei ole kumpaakaan, joten mitkään alkuehdon toteuttavat m ja n eivät kelpaa ratkaisuiksi.

Parillisuuden tai parittomuuden säilyminen laskuoperaatioissa on vahva työkalu ratkaistaessa alkeelliseen lukuteoriaan perustuvia kilpatehtäviä. Lukion lukuteorian kurssiin kuuluva asia, kongruenssi, avaa myös mahdollisuuksia ratkoa yhtälöiden ratkaisujen määrään liittyviä tehtävätyyppejä.

Useiden asiakokonaisuuksien rutiininomainen hallinta on usein vaatimuksena, kuten vaikkapa seuraavassa tehtävässä.

Osoita, että yhtälön

$$\sqrt{1996}x^{\log_{1996} x} = x^6$$

juurien tulo on kokonaisluku ja määritä lisäksi kyseisen luvun neljä viimeistä numeroa. (Kilpailutehtävä Moldovasta 1996)

Merkitään $a = \log_{1996} x$. Koska $\log_{1996}\sqrt{1996} = 1/2$, annettu yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{1}{2} + a^2 = 6a$$

(ottamalla 1996-kantainen logaritmi puolittain). Olkoot nyt a_1 ja a_2 yhtälön juuret, ja alkuperäisen yhtälön juuret ovat siten $x_1 = 1996^{a_1}$ ja $x_2 = 1996^{a_2}$, eli niiden tulo on $1996^{(a_1+a_2)} = 1996^6$, kun käytetään toisen asteen yhtälön juurten summaa – ja tulos on kokonaisluku. Viimeisten neljän numeron määrittämiseksi kirjoitetaan

$$1996^6 = (2000-4)^6 = 2^6(2-1000)^6.$$

Viimeisen termin sulkulauseke voidaan avata tunnetulla binomikaavalla:

$$2^6(2-1000)^6 = 2^6(2^6 - 6\cdot 2^5 \cdot 1000 + \ldots),$$

missä kolme pistettä tarkoittaa, että loput termit eivät enää vaikuta neljään viimeiseen numeroon eli ovat siis luvun 10000 monikertoja. Näin ollen voimme kirjoittaa kongruenssin avulla

$$\begin{aligned}1996^6 &\equiv 2^6(2^6 - 192000) \bmod 10000\\ &\equiv 64(64 + 8000) \bmod 10000\\ &\equiv 6096 \bmod 10000,\end{aligned}$$

joten viimeiset neljä numeroa ovat 6096.

Lukiolaiselle eli aktiiviselle lukijalle hyvä harjoitustehtävä on esimerkiksi

Etsi kaikki kokonaisluvut x, jotka toteuttavat yhtälön

$$2^x(4 - x) = 2x + 4.$$

Huomaamalla jotain eksponenttifunktion perusominaisuuksista ja rationaalilausekkeen merkin vaihteluista tehtävään sopivien yritteiden määrä vähenee huomattavasti. Tehtävä ratkeaa periaatteessa lukion kahden ensimmäisen pitkän matematiikan kurssin tiedoilla, mutta kuten kilpatehtävissä yleensä, jotain on ensin hoksattava.

Aktiiviselle lukijalle jätetään seuraava haasteellisempi harjoitustehtävä.

Osoita, että jos $m \cdot s = 2000^{2001}$ (missä m ja s ovat positiivisia kokonaislukuja), niin yhtälöllä

$$mx^2 - sy^2 = 3$$

ei ole kokonaislukuratkaisuja. (Kilpailutehtävä Makedoniasta)

Ratkaisut tehtäviin esitettäneen jossain tulevassa Solmun numerossa. Toivottavasti pieni vihjeistys ei pilaa kenenkään motivaatiota käydä tehtävän kimppuun – tai jos sellainen vaara on olemassa – kannattaa hypätä vihjeiden yli seuraavaan tehtävään.

Tehtävässä ensimmäisellä yhtälöllä halutaan antaa jotain tietoa lukujen m ja s ominaisuuksista. Eksponenttien laskusäännöillä yhtälön suurehkolta vaikuttava luku on muutettavissa yhden parillisen ja yhden parittoman luvun eksponenttien tuloksi. Tällöin voidaan heti päätellä jotain tulon $m \cdot s$ – ja sitä kautta myös termien m ja s – parillisuudesta tai parittomuudesta. Näin saaduilla parillisuus/parittomuus-vaihtoehdoilla ja tehtävän toisella yhtälöllä päästään eteenpäin. Lopuksi tarvitaan vielä jaollisuustarkasteluita ja kongruenssin ominaisuuksia luvun neliölle.

Yhtälöiden käsittelyssä on usein hyödyllistä osata jakaa lauseke tekijöihin. Tästä esimerkkinä tehtävä, jonka ratkaisemisessa tulee vastaan muistisääntö summan ja erotuksen tulosta yleistetylle tapaukselle:

Onko olemassa luonnollista lukua q ja alkulukua p siten, että

$$3^p + 7^p = 2 \cdot 5^q?$$

(Kilpailutehtävä Ukrainasta)

Aluksi havaitaan, että $p = 2$ ei käy ratkaisuksi, sillä $3^2 + 7^2 = 58$, joka ei ole muotoa $2 \cdot 5^q$. Siksi p on pariton alkuluku. Jaetaan yhtälössä $3^p + 7^p$ tekijöihin seuraavasti:

$$\begin{aligned}&3^p + 7^p\\ &\quad = (3+7)(3^{p-1} - 3^{p-2}\cdot 7 + 3^{p-3}\cdot 7^2 - \ldots\\ &\qquad\qquad - 3\cdot 7^{p-2} + 7^{p-1})\\ &\quad = 2\cdot 5^q.\end{aligned}$$

Koska $3 + 7 = 2 \cdot 5$, täytyy päteä

$$3^{p-1} - 3^{p-2}\cdot 7 + 3^{p-3}\cdot 7^2 - \ldots - 3\cdot 7^{p-2} + 7^{p-1} = 5^{q-1}.$$

Lisäksi koska $3 \equiv -2 \bmod 5$ ja $7 \equiv 2 \bmod 5$, kongruenssin laskusäännöillä pätee

$$\begin{aligned}&3^{p-1} - 3^{p-2}\cdot 7 + 3^{p-3}\cdot 7^2 - \ldots - 3\cdot 7^{p-2} + 7^{p-1}\\ &\quad\equiv 2^{p-1} + 2^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + 2^{p-1} + 2^{p-1}\\ &\quad\equiv p\cdot 2^{p-1} \bmod 5.\end{aligned}$$

Edellä etumerkit saadaan luvun p parittomuudesta. Yhdistämällä saadut tulokset havaitaan, että

$$5^{q-1} \equiv p\cdot 2^{p-1} \bmod 5,$$

mikä tarkoittaa, että

$$p\cdot 2^{p-1} \equiv 0 \bmod 5.$$

Tähän ainoa vaihtoehto on $p = 5$. Se ei kuitenkaan toteuta yhtälöä, joten ei löydy tehtävän toteuttavia p ja q.

Matematiikasta kiinnostuneelle aktiiviselle lukiolaiselle kilpatehtävien parissa puuhastelu on todella suositeltavaa, sillä kyseiset tehtävät, paitsi antavat vaihtelun tuntua mekaaniselle harjoittelulle, avaavat myös matematiikan rakennetta ymmärrettäväksi tehokkaalla tavalla.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta `http://avoinoppikirja.fi` löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.