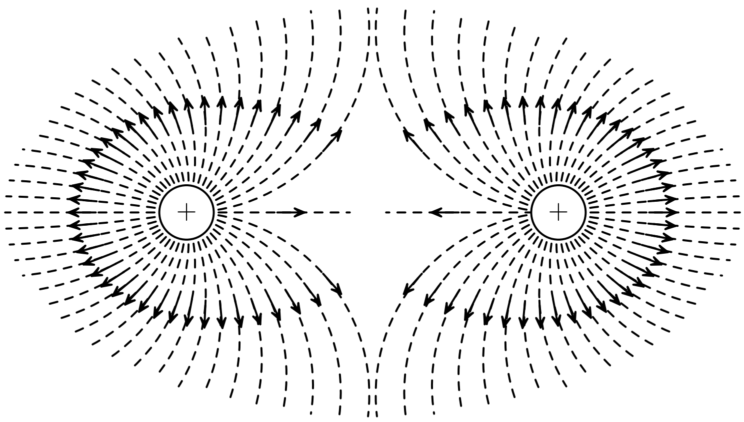
# Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2

Sähköoppia



Markku Halmetoja  Jorma Merikoski

# Sisältö

# Esipuhe

Julkaisimme kolme vuotta sitten nettikirjan *Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle* (seuraavassa *MFL*), joka käsitteli mekaniikkaa sekä vähän aaltoliikeoppia ja termodynamiikkaa. Se sisälsi myös tarvittavat lukion oppimäärän ulkopuoliset lisätiedot differentiaalilaskennasta. Sanoimme esipuheessa, että jos kirja osoittautuu käyttökelpoiseksi, niin ehkä teemme myöhemmin siitä laajennetun version. Käyttökelpoisuudesta emme nyt osaa sanoa juuri muuta kuin että emme ole saaneet sellaista palautetta, jonka mukaan se olisi käyttökelvoton. Siksi rohkenimme tehdä siihen tämän jatko-osan (seuraavassa *MFL 2*), joka käsittelee sähköoppia. Nyt *MFL*:n nimeksi tuli *MFL 1*.

Kuten *MFL 1*, myöskään *MFL 2* ei ole varsinaisesti matematiikan eikä fysiikan oppikirja, vaan nämä ovat pikemminkin oppikirjoja siitä, miten matematiikkaa voidaan soveltaa fysiikkaan. Siis *MFL*:t sijoittuvat tavallaan matematiikan ja fysiikan välimaastoon. Niitä voitaneen käyttää sekä matematiikan että fysiikan koulukohtaisilla syventävillä kursseilla. Niistä voi olla hyötyä myös yliopistofysiikan alkeiskurssien tukimateriaalina.

*MFL 1*:ssä esitetyt differentiaalilaskennan lisätiedot riittävät *MFL 2*:nkin lukijalle, mutta nyt tarvitaan myös kahden ja kolmen muuttujan funktion integraalilaskentaa. Siksi ensimmäisessä luvussa tarkastellaan kevyesti ja havainnollisesti käyrä-, pinta- ja avaruusintegraaleja. Muut luvut noudattavat tavanomaista sähköopin systematiikkaa.

Emme esitä tekstissä Maxwellin lakeja mutta käsittelemme niitä harjoitustehtävissä kevyesti ja havainnollisesti. Tehtävissä on muutakin sellaista lisämateriaalia, jonka läpikäyminen ei ole välttämätöntä mutta saattaa kiinnostaa lukijaa. Vastausluettelo ei ole täydellinen. Se sisältää vain ”laskutehtävien” vastauksia sekä niiden ja ”todistustehtävien” ohjeita. ”Piirustustehtäviin” ja ”pohdintatehtäviin” ei siellä anneta vastauksia eikä ohjeita. Laadimme myöhemmin kaikkien tehtävien täydelliset ratkaisut.

Kuten *MFL 1*:n, myös *MFL 2*:n kirjallisuusluettelon ensisijainen tarkoitus on noudattaa hyvää tieteellistä tapaa, jonka mukaan kirjoittajan on mainittava käyttämänsä lähteet. Se ei siis pyri olemaan mitenkään kattava, vaan löytyy paljon muutakin hyvää kirjallisuutta kuin siinä mainitut.

Kun julkaisimme *MFL 1*:n, sen aiempaa versiota oli käytetty melko kauan Mäntän lukiossa, mutta kun nyt julkaisemme *MFL 2*:n, sitä ei ole edes kokeiltu missään. Siksi *MFL 2* nykyisessä muodossaan on pikemminkin eräänlainen ”kokeiluversio” kuin viimeistelty oppikirja. Otamme mielellämme vastaan virheiden korjauksia ja muita kommentteja sekä kehitysehdotuksia. Sähköpostiosoitteemme ovat `etunimi.sukunimi.uta.fi`.

Kiitämme Suomen tietokirjailijat ry:tä saamastamme apurahasta.

Tampereella joulukuussa 2012

Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski

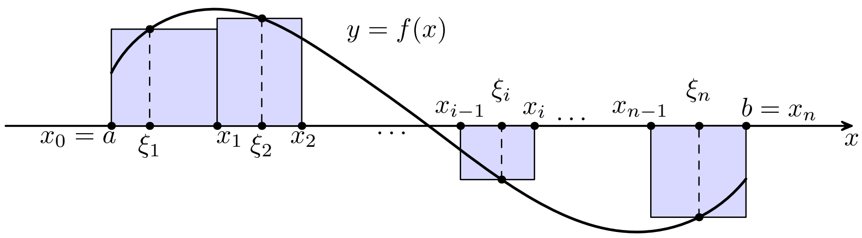
# 1 Integraalilaskentaa

Lukiossa käsitellään vain yhden muuttujan funktion (määrättyä) integraalia yli tietyn reaalilukuvälin, mutta me joudumme tekemisiin enimmäkseen kahden tai kolmen muuttujan funktion integraalien kanssa. Olemme jo alustavasti nähneet [4, s. 37], miten tällainen funktio ”integroidaan pitkin janaa”. Olemme myös alustavasti nähneet [4, teht. 84], että ”integroimistie” voi olla paitsi jana myös (tarpeeksi säännöllinen) käyrä. Mutta kahden tai kolmen muuttujan funktio voidaan integroida paitsi ”pitkin käyrää” myös ”yli tietyn (tarpeeksi säännöllisen) alueen”. Lisäksi kolmen muuttujan funktio voidaan integroida ”yli tietyn (tarpeeksi säännöllisen) pinnan tai kappaleen”. Perehdymme nyt näihin integraaleihin.

## 1.1 Käyräintegraali

Märittelemme aluksi yhden muuttujan funktion (määrätyn) integraalin. Olkoon $f$ välillä $I = [a, b]$ määritelty jatkuva reaalifunktio. Suoritamme ”jaon $D$” seuraavasti. Jaamme $I$:n osiin ”jakopisteillä” $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$, joille $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Valitsemme kultakin osaväliltä ”välipisteen” $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Jakoa $D$ (siis näitä jako- ja välipisteitä) vastaa *porrassumma* eli *Riemannin*[1] *summa*

$$\Sigma_D = \Sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$




Annamme nyt $n \to \infty$ siten, että jokaisen osavälin pituus $x_i - x_{i-1} \to 0$. Toisin sanoen $|D| \to 0$, missä

$$|D| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

Voidaan todistaa (ks. esim. [11, lauseet 8.3.1 ja 8.5.1]), että tällöin $\Sigma_D$ lähestyy kohti tiettyä raja-arvoa, joka ei riipu siitä, miten jako- ja välipisteet

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), saksalainen matemaatikko.

valitaan. Tämä raja-arvo on $f$:n (*määrätty*) *integraali* yli $I$:n eli $a$:sta $b$:hen. Siis
$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{|D|\to 0} \Sigma_D.$$
Lukiossa käsitellään yksinkertaisuuden vuoksi vain tasavälisiä jakoja, jolloin jakovälin pituus $\Delta x = (b-a)/n$ (ks. esim. [2, s. 47, 50]), mutta tämä määritelmä pätee muillekin jaoille.

Havainnollisesti voimme ajatella, että väli $I$ jaetaan "äärettömän moneen äärettämän pieneen pituusalkioon" $\mathrm{d}x$, ne kerrotaan kutakin "alkiota" vastaavalla $f$:n arvolla ja saadut tulot lasketaan yhteen. Voimme myös ajatella, että integroitavana on "differentiaalilauseke" $\mathrm{d}f = f(x)\mathrm{d}x$.

Yleistämme tämän. Tarkastelemme integroimisvälin $[a, b]$ sijasta suunnattua tasokäyrän kaarta $\gamma$, jonka parametriesitys on
$$x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leq t \leq \beta.$$
Kaaren alkupiste $P = (x(\alpha), y(\alpha))$ ja loppupiste $Q = (x(\beta), y(\beta))$. Yhden muuttujan funktion $y = f(x)$ sijasta tarkastelemme kahta kahden muuttujan funktioita
$$z = u(x, y) \quad \text{ja} \quad z = v(x, y),$$
jotka on määritelty $\gamma$:lla. Oletamme, että funktiot
$$t \mapsto u(x(t), y(t)) \quad \text{ja} \quad t \mapsto v(x(t), y(t))$$
ovat jatkuvia, ja että $\gamma$:n jokaisessa pisteessä on tangentti, jonka suunnan muuttuminen on "jatkuvaa".

"Jako $D$" on nyt seuraava. Jaamme $\gamma$:n osiin niin, että peräkkäiset jakopisteet ovat $P = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n) = Q$. Valitsemme pisteiden $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ja $(x_i, y_i)$ väliseltä $\gamma$:n osalta välipisteen $(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Jakoon $D$ liittyy porrassumma
$$\begin{aligned}\Sigma_D &= \Sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}; \xi_1, \ldots \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big[u(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + v(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1})\Big].\end{aligned}$$
Annamme $n \to \infty$ siten, että jokainen $x_i - x_{i-1} \to 0$ ja jokainen $y_i - y_{i-1} \to 0$. Toisin sanoen $|D| \to 0$, missä
$$|D| = \max_{1\leq i\leq n} \max(|x_i - x_{i-1}|, |y_i - y_{i-1}|).$$
Voidaan todistaa (ks. esim. [8, lause 5.2.2]), että tällöin $\Sigma_D$ lähestyy kohti tiettyä raja-arvoa, joka ei riipu siitä, miten jako- ja välipisteet valitaan. Tämä

raja-arvo on ”differentiaalilausekkeen” $u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$ *käyräintegraali* pitkin $\gamma$:aa. Siis

$$\int_\gamma (u(x,y)\mathrm{d}x + v(x,y)\mathrm{d}y) = \int_P^Q (u(x,y)\mathrm{d}x + v(x,y)\mathrm{d}y) = \lim_{|D|\to 0} \Sigma_D.$$

Jälkimmäisessä merkinnässä meidän on erikseen ilmoitettava, että integroidaan pitkin $\gamma$:aa. Edelleen voidaan todistaa, että

$$\int_\gamma (u(x,y)\mathrm{d}x + v(x,y)\mathrm{d}y) = \int_\alpha^\beta (u(x(t),y(t))x'(t) + v(x(t),y(t))y'(t))\mathrm{d}t.$$

Käyräintegraali palautuu näin yhden muuttujan funktion integraaliksi.

On vähän kiusallista, että määritelmässämme kummittelee ”differentiaalilauseke”, joka ei sellaisenaan merkitse mitään. Pääsemme siitä eroon käyttämällä vektoreita, joista on paljon muutakin hyötyä. Käyrän $\gamma$ vektorimuotoinen yhtälö on $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, jolloin $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{i}\mathrm{d}x + \mathbf{j}\mathrm{d}y$ ja $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$. Funktiot $u$ ja $v$ määrittelevät vektorifunktion $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = u(x,y)\mathbf{i} + v(x,y)\mathbf{j}$, missä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. ”Differentiaalilausekkeen” käyräintegraalin sijasta voimme nyt puhua tämän vektorifunktion käyräintegraalista. Lisäksi saamme yllä olevan kaavan siistimpään muotoon

$$\int_\gamma \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t.$$

Havainnollisesti voimme ajatella, että kaari $\gamma$ jaetaan ”äärettömän moneen äärettömän pieneen suunnattuun kaarialkioon” $\mathrm{d}\mathbf{r}$, muodostetaan kunkin ”alkion” ja vastaavan $\mathbf{f}$:n arvon sisätulo ja lasketaan kaikki ne yhteen. Voimme myös ajatella, että integroitavana on ”differentiaalilauseke” $\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$.

Jos $u$, $v$ ja $w$ ovat kolmen muuttujan funktioita ja $\gamma$ on avaruuskäyrä, niin määrittelemme vastaavasti (teht. 4) käyräintegraalin

$$\int_\gamma (u(x,y,z)\mathrm{d}x + v(x,y,z)\mathrm{d}y + w(x,y,z)\mathrm{d}z).$$

**Esimerkki 1. a)** Kirjoita vektorimuodossa käyräintegraali

$$I = \int_{(0,1)}^{(1,0)} (xy\mathrm{d}x - y^2\mathrm{d}y).$$

**b)** Laske tämä integraali pitkin i) janaa, ii) origokeskistä ympyränkaarta.

**a)** Vektorimuoto on

$$\int_\mathbf{j}^\mathbf{i} (xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

**b)** i) Janan yhtälö on $y = 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$. Koska $(0,1)$ on alkupiste ja $(1,0)$ loppupiste, integroinnin alaraja on $x = 0$ ja yläraja $x = 1$. Lisäksi $\mathrm{d}y = \mathrm{d}(1-x) = -\mathrm{d}x$, joten

$$I = \int_0^1 [x(1-x)\mathrm{d}x - (1-x)^2(-\mathrm{d}x)] = \int_0^1 (x - x^2 + 1 - 2x + x^2)\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = \Big/_0^1 (x - \tfrac{1}{2}x^2) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

ii) Kaaren yhtälö on $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Alkupistettä $(0,1)$ vastaa $t = \frac{\pi}{2}$ ja loppupistettä $(1,0)$ $t = 0$. Edelleen $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \cos t\,\mathrm{d}t$, joten

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [\cos t \sin t(-\sin t)\mathrm{d}t - \sin^2 t \cos t\,\mathrm{d}t] = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos t \sin^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 2\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{3}\sin^3 t = \tfrac{2}{3}.$$

### Harjoitustehtäviä

**1.** Miksi integraalia

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

voidaan pitää käyräintegraalin

$$\int_\gamma (u(x,y)\mathrm{d}x + v(x,y)\mathrm{d}y)$$

erikoistapauksena?

**2.** Mikä käyräintegraalin ominaisuus vastaa ominaisuutta

**a)** $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$, **b)** $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$?

**3.** Laske käyräintegraali

$$\int_{(0,0)}^{(\frac{1}{2},1)} (2y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)$$

pitkin **a)** näiden pisteiden yhdysjanaa, **b)** paraabelin $y^2 = 2x$ kaarta.

**4.** Käy yksityiskohtaisesti läpi käyräintegraalin

$$\int_\gamma (u(x,y,z)\mathrm{d}x + v(x,y,z)\mathrm{d}y + w(x,y,z)\mathrm{d}z)$$

määritteleminen ja sen palauttaminen yhden muuttujan funktion integraaliksi sekä vastaava tarkastelu vektoreilla.

**5.** *Ruuviviivan* yhtälö on

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = ct,$$

missä vakiot $r, c > 0$ ja parametri $t$ käy läpi kaikki reaaliarvot. Miksi tällä käyrällä on tämä nimi?

**6.** **a)** Kirjoita vektorimuodossa käyräintegraali

$$\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z).$$

**b)** Laske tämä integraali pitkin sitä ruuviviivaa, jolla $r = 1$ ja $c = 2/\pi$.

**7.** Tarkastellaan käyräintegraalia

$$I = \int_P^P (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z),$$

missä *umpinainen* suunnattu käyrä $\gamma$ kierretään kerran lähtemällä $\gamma$:n pisteestä $P$ ja palaamalla siihen. Osoita, ettei $I$ riipu $P$:stä. Siksi merkitään

$$I = \oint_\gamma (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z).$$

**8.** Olkoot $u$ ja $v$ tasoalueella $S$ määriteltyjä reaalifunktioita. Voidaan todistaa (ks. esim. [8, lauseet 5.3.1–3]), että (tietyillä säännöllisyysoletuksilla) seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät.

(1) Käyräintegraali

$$\int_P^Q (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y)$$

ei riipu integroimistiestä (eli siitä $P$:n ja $Q$:n yhdistävästä käyrästä, jota pitkin integroidaan).

(2) Käyräintegraali

$$\oint_\gamma (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) = 0$$

pitkin jokaista umpinaista käyrää $\gamma$.

(3) On olemassa sellainen $S$:ssä määritelty reaalifunktio $F$, että

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = v.$$

Tällöin $F$:n *kokonaisdifferentiaali*

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y.$$

Vektorifunktio $\mathbf{f} = (u, v)$ määrää $S$:ssä *vektorikentän* eli liittää jokaiseen pisteeseen $(x, y) \in S$ vektorin $\mathbf{f}(x, y) = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$. Funktio $F$ on tämän vektorikentän *potentiaali*.

(4) Osittaisderivaatat

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

**a)** Osoita ehtojen (1) ja (2) yhtäpitävyys.

**b)** Totea, että tämä kaikki sopii yhteen esimerkin 1 kanssa. (Koska siinä ehto (1) ei ole toteutettu, on siis osoitettava, etteivät myöskään (2), (3) ja (4) ole.)

**9.** **a)** Laske käyräintegraali

$$\text{i)} \oint_\gamma \frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}, \qquad \text{ii)} \oint_\gamma \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2},$$

kun $\gamma$ on ympyrä $x^2 + y^2 = 1$ positiiviseen kiertosuuntaan.

**b)** Totea, että tulokset sopivat yhteen tehtävän 8 ehtojen kanssa.

**10.** Esitä tehtävän 8 ehtoja vastaavat ehdot käyräintegraalille

$$\int_P^Q (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z).$$

## 1.2 Pinta- ja avaruusintegraali

Määrittelimme aiemmin [4, s. 16] havainnollisesti mutta epätäsmällisesti, että kahden muuttujan funktio $z = f(x, y)$ on jatkuva pisteessä $(x_0, y_0)$, jos $f(x, y) \to f(x_0, y_0)$, kun $(x, y) \to (x_0, y_0)$ pitkin mitä tahansa käyrää. Vastaava määritelmä pätee myös kolmen muuttujan funktiolle $u = f(x, y, z)$.

Kolmio, suorakulmio, neliö ym. tarkoittavat varsinaisesti kyseistä murtoviivaa ja ympyrä, ellipsi ym. kyseistä käyrää. Käytämme kuitenkin näitä nimityksiä tarkoittamaan myös niiden rajoittamia alueita. Koska asiayhteydestä selviää, kumpaa tarkoitetaan, väärinkäsityksen vaaraa ei ole.

Olkoon $z = f(x, y)$ suorakulmiossa $S = [a, b] \times [c, d]$ määritelty jatkuva reaalifunktio. Jaamme $S$:n "jaolla $D$" osasuorakulmioihin jakamalla välit $[a,b]$ ja $[c,d]$ jakopisteillä $x_0, x_1, \ldots, x_m$ ja $y_0, y_1, \ldots, y_n$, joille

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d.$$

Näin $S$ tulee jaetuksi $mn$:ään suorakulmioon

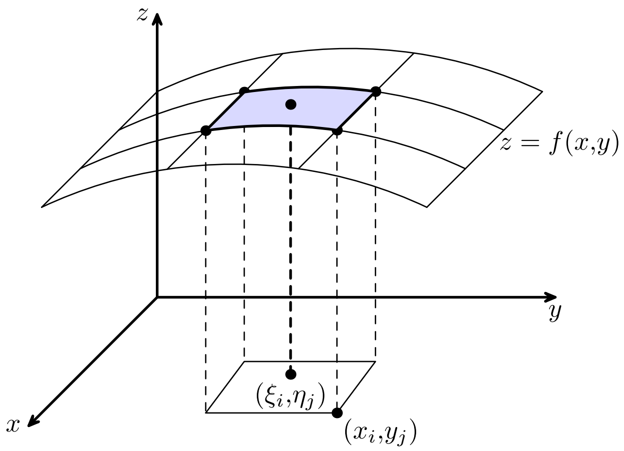
$$S_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

Valitsemme kustakin osasuorakulmiosta ”välipisteen”

$$(\xi_i, \eta_j) \in S_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Jakoa $D$ (siis näitä jako- ja välipisteitä) vastaa porrassumma

$$\begin{aligned} \Sigma_D &= \Sigma(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_{n-1}; \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$




Annamme nyt $m, n \to \infty$ siten, että osavälien pituudet $x_i - x_{i-1} \to 0$ ja $y_j - y_{j-1} \to 0$. Tällöin $|D| \to 0$, missä

$$|D| = \max_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \max(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Voidaan todistaa yleisemmilläkin oletuksilla (ks. esim. [8, lause 6.3.5]), että $\Sigma_D$ lähestyy kohti tiettyä raja-arvoa, joka ei riipu siitä, miten jako- ja välipisteet valitaan. Tämä raja-arvo on $f$:n *pintaintegraali* yli $S$:n. Merkitsemme sitä

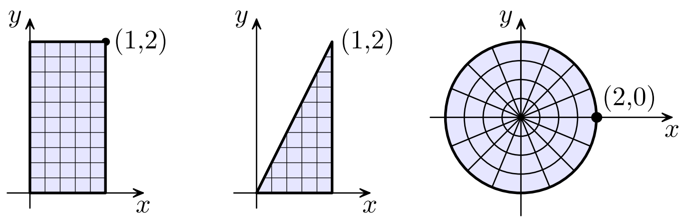
$$\int_S f(x, y) \mathrm{d}A = \lim_{|D| \to 0} \Sigma_D.$$

Määritelmä on helppo yleistää tapaukseen, jossa $S$ ei ole suorakulmio (mutta on rajoitettu ja tarpeeksi säännöllinen $xy$-tason alue). Jaamme koordinaattiakselien suuntaisilla suorilla $S$:n osiin, valitsemme kustakin osasta pisteen, kerromme sitä vastaavan $f$:n arvon osa-alueen pinta-alalla, laskemme näin saadut tulot yhteen, ja lopuksi suoritamme saman rajallemenon kuin edellä. Itse asiassa $S$ voidaan jakaa (tarpeeksi säännöllisiin) osiin muullakin tavalla ja tihentää jakoa antamalla osien pinta-alojen lähestyä nollaa. Saadaan aina sama tulos.

**Esimerkki 1.** Laske pintaintegraali

$$I = \int_S xy^2 \mathrm{d}A,$$

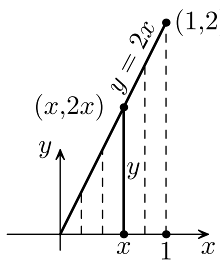
kun $S$ on **a)** suorakulmio $\{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$, **b)** se kolmio, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(1,2)$, **c)** ympyrä $x^2 + y^2 \le 4$.




**a)** Voimme pitää $I$:tä "äärettömän monen differentiaalin" $xy^2\,\mathrm{d}A$ summana. "Pinta-alkio" $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Kun $x$ muuttuu 0:sta 1:een, $y$ muuttuu $x$:stä riippumatta 0:sta 2:een. Näin ollen

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2} xy^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \Big(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_0^2 y^2 \mathrm{d}y\Big) \\
&= \Big(\Big/_{\!0}^{1} \tfrac{1}{2}x^2\Big)\Big(\Big/_{\!0}^{2} \tfrac{1}{3}y^3\Big) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}.
\end{aligned}$$

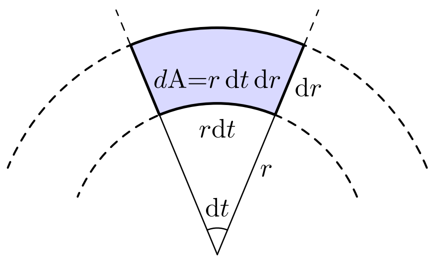
**b)** Nyt $x$:n muuttuessa 0:sta 1:een $y$ muuttuu 0:sta $2x$:ään.



Täten

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2x} xy^2 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\Big(\int_0^{2x} y^2\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\Big(\Big/_0^{2x} \tfrac{1}{3}y^3\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\cdot \tfrac{8}{3}x^3\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{8}{3}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x = \tfrac{8}{3}\Big/_0^1 \tfrac{1}{5}x^5 = \tfrac{8}{15}.
\end{aligned}$$

**c)** Koska integroimisalueena on ympyrä, kannattaa käyttää napakoordinaatteja $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Napakoordinaatistossa "pinta-alkio" $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r$.




Koska $r$ muuttuu 0:sta 2:een ja $t$ 0:sta $2\pi$:hin, saamme

$$\begin{aligned}
I &= \int_{r=0}^{2}\int_{t=0}^{2\pi} r\cos t\, r^2\sin^2 t\, r\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \\
&= \Big(\int_0^2 r^4\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{2\pi}\cos t\,\sin^2 t\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \Big(\Big/_0^2 \tfrac{1}{5}r^5\Big)\Big(\Big/_0^{2\pi}\Big(-\tfrac{1}{3}\sin^3 t\Big)\Big) = \tfrac{32}{5}\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Tarkastelemme vielä (tarpeeksi säännöllisessä) kappaleessa $K$ määriteltyä funktiota $u = f(x, y, z)$. Jakamalla $K$:n osiin ja menettelemällä kuten aiemmin määrittelemme *avaruusintegraalin*

$$\int_K f(x, y, z)\mathrm{d}V.$$

Oikeastaan olisi johdonmukaista puhua ”kappaleintegraalista”, mutta se ei kuulosta hyvältä. Joskus (ks. esim. [1]) puhutaan ”tilavuusintegraalista”, mutta sekään ei kuulosta hyvältä.

**Esimerkki 2.** Suoran ympyrälieriön pohjan säde on $R$ ja korkeus $h$. Totea, että tämän lieriön tilavuuden kaava saadaan laskemalla

**a)** pintaintegraali

$$I = \int_S f(x,y)\mathrm{d}A,$$

missä $f(x,y) = h$ ja $S = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \le R^2\}$,

**b)** avaruusintegraali

$$I = \int_K \mathrm{d}V,$$

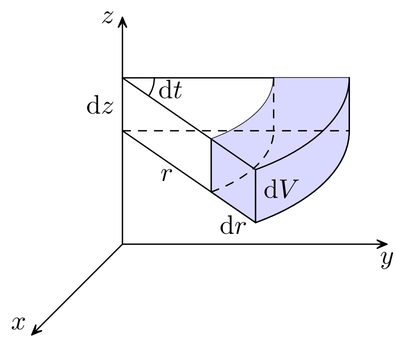
missä $K = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le h\}$.

**a)** Napakoordinaateissa (vrt. esim. 1c) saamme

$$\begin{aligned} I &= \int_S h\,\mathrm{d}A = h\int_0^R \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t \\ &= h\Big(\int_0^R r\,\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\Big) \\ &= h \cdot \tfrac{1}{2}R^2 \cdot 2\pi = \pi R^2 h. \end{aligned}$$

**b)** Käytämme *sylinterikoordinaatteja* $(r,t,z)$, missä $r$ ja $t$ ovat pisteen $(x,y)$ napakoordinaatit. ”Tilavuusalkio” $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z$, joten

$$\begin{aligned} I &= \int_K \mathrm{d}V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z \\ &= \Big(\int_0^R r\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\Big)\Big(\int_0^h \mathrm{d}z\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}R^2 \cdot 2\pi \cdot h = \pi R^2 h. \end{aligned}$$



### Harjoitustehtäviä

**11.** Palataan esimerkkiin 1.

**a)** Kohdassa b ”integroidaan ensin $y$:n suhteen ja sitten $x$:n suhteen”. Suorita laskut vaihtamalla integroimisjärjestystä ja totea, että saadaan sama tulos.

**b)** Kohdassa c voidaan ilman mitään laskujakin päätellä, että tulos on 0. Miten?

**12.** **a)** Mikä pintaintegraalin ominaisuus vastaa ominaisuutta

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x?$$

**b)** Mitä voidaan sanoa kysymyksestä, joka koskee ominaisuutta

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x?$$

**13.** **a)** Totea, että (rajoitetun tarpeeksi säännöllisen) alueen $S$ pinta-ala

$$A = \int_S \mathrm{d}A.$$

**b)** Totea, että tämä tulos sopii yhteen i) kolmion, ii) ympyrän pinta-alan kaavan kanssa. Siis sijoita nämä alueet sopivasti $xy$-tasoon ja laske kyseiset integraalit.

**14.** **a)** Olkoon $S$ kuten edellisessä tehtävässä, ja olkoon $z = f(x, y)$ siinä määritelty ei-negatiivinen funktio. Totea, että pintaintegraali

$$\int_S f(x, y)\mathrm{d}A$$

on sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat alue $S$, sen reunaa vastaan kohtisuora lieriöpinta ja pinta $z = f(x, y)$.

**b)** Johda $R$-säteisen pallon tilavuuden kaava laskemalla pintaintegraali

$$2\int_S \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\,\mathrm{d}A,$$

missä $S = \{(x, y)\,|\,x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

**15.** **a)** Esitä pintaintegraalina sen tetraedrin tilavuus, jonka kärjet ovat $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ja $(0, 0, c)$. **b)** Laske tämä integraali ja totea, että tulos sopii yhteen tuon tetraedrin tilavuuden kaavan kanssa.

**16.** Määritä sen alueen tilavuus, jonka lieriö $x^2 + y^2 - Rx = 0$ erottaa pallosta $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**17.** Olemme määritelleet kahden muuttujan funktion $z = f(x, y)$ pintaintegraalin, kun integroimisalue on $xy$-tasossa. Vastaavasti (siis miten?) voidaan määritellä kolmen muuttujan funktion $u = f(x, y, z)$ pintaintegraali

$$I = \int_S f(x, y, z)\mathrm{d}A.$$

Tässä $S$ on avaruuden (tarpeeksi säännöllinen) pinta $z = g(x, y)$ ja $f$ on $S$:ssä määritelty funktio. Olkoon $S$:n projektio $xy$-tasossa $S_0$; siis

$$S_0 = \{(x, y, 0) \mid (x, y, z) \in S\}.$$

Pintantegraali $I$ palautuu kahden muuttujan funktion pintaintegraaliksi yli $S_0$:n. Nimittäin (ks. esim. [13, s. 50])

$$I = \int_{S_0} f(x, y, g(x, y))\sqrt{g_x(x, y)^2 + g_y(x, y)^2 + 1}\,\mathrm{d}A,$$

missä $g_x$ ja $g_y$ tarkoittavat osittaisderivaattoja. Määritä sen alueen pinta-ala, jonka tehtävän 16 lieriö erottaa pallosta.

**18.** **a)** Jatkoa. Olkoon $f(x, y, z) = 1$, jolloin

$$I = \int_S \mathrm{d}A.$$

Laske $I$, kun $S$ on se kolmio, jonka kärjet ovat $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ja $(0, 0, c)$.

**b)** Totea, että tulos antaa kaavan sen kolmion pinta-alalle, jonka sivut ovat $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$ ja $\sqrt{c^2 + a^2}$.

**c)** Miten tämä kaava saadaan tasogeometrian menetelmillä?

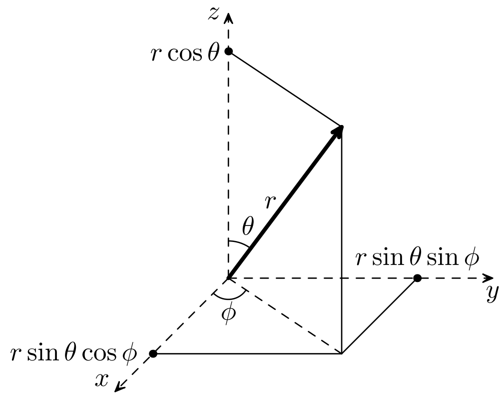
**19.** Johda $R$-säteisen pallon tilavuuden kaava laskemalla avaruusintegraali

$$\int_K \mathrm{d}V,$$

missä $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Ohje: Käytä pisteen $(x, y, z)$ *pallokoordinaatteja* $(r, \theta, \phi)$, jotka saadaan yhtälöistä

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta,$$
$$0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Mikä on ”tilavuusalkio” pallokoordinaatistossa?




**20. a)** Tarkastellaan integraalia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Totea, että

$$\left( \int_{-m}^{m} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \right)^2 = \int_{S_m} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}A,$$

missä $S_m = \{(x, y) \mid |x|, |y| \leq m\}$. Näin ollen

$$I^2 = \lim_{m\to\infty} \int_{S_m} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}A.$$

**b)** Olkoon $C_m = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq m^2\}$. Osoita, että

$$\lim_{m\to\infty} \int_{C_m} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}A = \lim_{m\to\infty} \int_{S_m} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}A.$$

**c)** Siis myös

$$I^2 = \lim_{m\to\infty} \int_{C_m} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}A.$$

Mutta tämä voidaan laskea. Tee niin.

**d)** Lukiossa (ks. esim. [3, s. 156]) esitetään kaava

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = 1$$

ja sanotaan, ettei sitä voida todistaa lukion tiedoilla. Miten voit nyt todistaa sen.

# 2 Sähköstatiikkaa

Luonnossa tapahtuu *sähköisiä* ja *magneettisia* ilmiöitä. *Sähkömagnetismi* on oppi niistä. Se jaetaan *staattiseen* ja *dynaamiseen* osaan. Edellisessä *sähkö-* ja *magneettikentät* ovat levossa eli eivät riipu ajasta, ja jälkimmäisessä näin ei ole. Kaikki "makroskooppisten" kappaleiden väliset voimat palautuvat gravitaatioon ja sähkömagneettiseen vuorovaikutukseen.

Klassinen mekaniikka perustuu Newtonin[1] lakeihin. Klassinen sähkömagnetismi puolestaan perustuu *Maxwellin*[2] *lakeihin*. (Tavallisesti puhutaan "Maxwellin yhtälöistä", mutta on johdonmukaista antaa niillekin "lain" status.) Koska Newtonin lakien sisältö on helppo ymmärtää, mekaniikan opiskelu voidaan aloittaa niistä [4, luku 2.2]. Sen sijaan Maxwellin lait ovat vaikeammat eivätkä sovi lähtökohdaksi sähkömagnetismin alkeisopiskeluun. Käsittelemme niitä vain ohimennen.

## 2.1 Coulombin laki. Sähkökenttä

Kappaleella voi olla *positiivinen tai negatiivinen sähkövaraus* eli kappale voi olla *positiivisesti tai negatiivisesti varattu*. Positiivinen varaus tarkoittaa elektronien vajausta ja negatiivinen niiden ylijäämää. Kaikki varaukset ovat *alkeisvarauksen* $e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ C monikertoja. Protonin varaus on $e$ ja elektronin $-e$.

Kun puhuimme mekaniikassa kappaleesta, tarkoitimme usein "massapistettä" [4, luku 2.2]. Vastaava tilanne – varattu kappale vs. "varauspiste" – on sähköopissa, mutta emme yleensä puhu kappaleesta, kun tarkoitamme varauspistettä. Pisteet $P_1$ ja $P_2$, joiden varaukset ovat $q_1$ ja $q_2$ ja joiden välinen etäisyys on $r$, vaikuttavat toisiinsa *Coulombin*[3] *lain* mukaan *sähköstaattisella voimalla* $\mathbf{F}$, jonka suuruus

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

missä $k(> 0)$ on tietty (väliaineesta riippuva) vakio. Kyseessä on vetovoima, jos varaukset ovat erimerkkiset, ja poistovoima, jos ne ovat samanmerkkiset. Siis

$$\mathbf{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{e},$$

missä $\mathbf{e}$ on vaikuttavasta kappaleesta toiseen kappaleeseen suunnattu yksik-

[1] Isaac Newton (1643–1727), englantilainen matemaatikko ja fyysikko.
[2] James Clerk Maxwell (1831–1879), skottilainen fyysikko.
[3] Charles Augustin de Coulomb (1736–1806), ranskalainen fyysikko ja insinööri.

kövektori. Tavallisesti kirjoitetaan

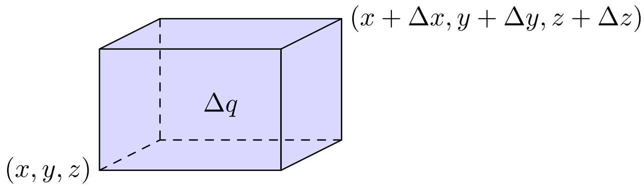
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon},$$

missä *permittiivisyys* $\varepsilon$ riippuu väliaineesta. Tyhjiössä $\varepsilon = 8{,}854188 \cdot 10^{-12}$ F/m. Oikeastaan sitä pitäisi merkitä $\varepsilon_0$:lla, mutta jätämme mukavuussyistä nollan pois. Koska emme tarkastele eri väliaineiden permittiivisyyksiä, väärinkäsityksen vaaraa ei ole.

Vaikka Coulombin lain matemaattinen muoto on sama kuin Newtonin gravitaatiolain, näillä laeilla on eroja. Sähköstaattinen voima voi olla veto- tai poistovoima, kun taas gravitaatiovoima on aina vetovoima. Coulombin laissa verrannollisuuskerroin $k$ riippuu väliaineesta mutta gravitaatiolaissa se (gravitaatiovakio $\gamma$) ei riipu. Gravitaatio vaikuttaa kaikkien kappaleiden välillä mutta sähköstaattinen vuorovaikutus vain varattujen kappaleiden välillä. Sähköstaattinen voima on yleensä paljon suurempi kuin gravitaatiovoima.

Paitsi erillisiin pisteisiin, varaus voi jakautua tiettyyn kappaleeseen tai tietylle pinnalle tai käyrälle. Jos kappale on kokonaan johdetta, niin varaus siirtyy sen pinnalle. Varausjakaumasta yli koko kappaleen voidaan puhua, jos kappaleessa (tai oikeastaan sen teoreettisesa mallissa) on ”äärettömän monta” varauspistettä ja niiden välissä on ”eristettä”.

Olkoon varaus jakautunut kappaleeseen $K$. Tarkastelemme $K$:n pisteitä $(x, y, z)$ ja $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Olkoon $\Delta V$ sen suorakulmaisen särmiön $\Delta K$ tilavuus, jonka kahtena kärkenä ovat nämä pisteet ja jonka särmät ovat koordinaattiakselien suuntaiset, ja olkoon $\Delta q$ tämän särmiön




kokonaisvaraus. Tällöin $\Delta q/\Delta V$ on *varauksen keskitiheys* särmiössä $\Delta K$, ja sen raja-arvo

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

on *varaustiheys* pisteessä $(x, y, z)$. (Tämä siis riippuu yleensä paikasta: $\rho = \rho(\mathbf{r})$.) Varauksen jakautuessa pinnalle $S$ tai käyrälle $\gamma$ on varaustiheys vastaavasti

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}A} \quad \text{ja} \quad \lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l},$$

missä d$A$ tarkoittaa $S$:n ”pinta-alkoita” ja d$l$ $\gamma$:n ”pituusalkiota”. Jos käänteisesti tunnetaan $\rho$, $\sigma$ ja $\lambda$, niin kokonaisvaraus

$$Q = \int_K \rho \mathrm{d}V, \quad Q = \int_S \sigma \mathrm{d}A, \quad Q = \int_\gamma \lambda \mathrm{d}l. \tag{1}$$

Olkoon seuraavaksi pisteen $P$ varaus $q$ ja pisteen $P'$ varaus $q'$, ja olkoon näiden pisteiden välinen etäisyys $r$. Oletamme, että $|q'|$ on niin paljon $|q|$:ta pienempi, että $P'$:n (sähköstaattinen) vaikutus $P$:hen voidaan jättää huomiotta. Nyt $P$ vaikuttaa $P'$:uun voimalla

$$\mathbf{F} = k\frac{qq'}{r^2}\mathbf{e} = q'(k\frac{q}{r^2}\mathbf{e}).$$

Voimme ajatella, että $P$ synnyttää *sähkökentän*, jonka *voimakkuus* $P'$:ssä on yksikkövaraukseen vaikuttava voima

$$\mathbf{E} = k\frac{q}{r^2}\mathbf{e}.$$

Kertomalla tämä voimakkuus $P'$:n varauksella $q'$ saadaan $P$:n $P'$:uun vaikuttava voima. Vastaava skalaariyhtälö on

$$E = k\frac{|q|}{r^2}.$$

Varauspisteen $P$ synnyttämän kentän voimakkuus $P'$:ssä riippuu siis $P$:n varauksesta $q$, $P$:n ja $P'$:n välisestä etäisyydestä $r$ ja väliaineesta (koska se riippuu $k$:sta). Haluamme kuvata $P$:n vaikutusta $P'$:ssä myös sellaisella suureella, joka ei riipu väliaineesta. Siksi kirjoitamme

$$\mathbf{E} = k\frac{q}{r^2}\mathbf{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\mathbf{e} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi r^2}\mathbf{e},$$

Pääsemme $\varepsilon$:sta eroon tarkastelemalla vektoria $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, jota kutsumme *sähkövuon tiheydeksi.* Nyt

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\mathbf{e}$$

ja vastaava skalaariyhtälö on

$$D = \frac{|q|}{4\pi r^2}.$$

Tarkastelemme $P$-keskistä $r$-säteistä palloa $S$. Voimme ajatella, että *sähkövuo* on ($q$:n merkistä riippuen) $P$:stä lähtevä tai $P$:hen suuntautuva ”voimavirta”, joka symmetrian perusteella ”osuu tasaisesti” $S$:n pinnalle. Koska $4\pi r^2$ on $S$:n pinta-ala, $\mathbf{D}$ ja $D$ ovat havainnollisesti tulkittavissa sähkövuon vektori- ja skalaariarvoiseksi tiheydeksi. Mikään ei kuitenkaan virtaa tässä oikeasti. Sähkövuo on vain kuviteltu käsite, josta on hyötyä sähköilmiöitä kuvaavassa matemaattisessa mallissamme.

Yhden varauspisteen synnyttämä *Coulombin (sähkö)kenttä* on varsin yksinkertainen (teht. 23b), mutta tilanne mutkistuu jo kahden pisteen tapauksessa (teht. 23d). Yleisesti $n$:n varauspisteen synnyttämän kentän voimakkuus saadaan laskemalla yhteen (vektorien yhteenlaskulla) niiden erikseen synnyttämien kenttien voimakkuudet. Jos siis pisteiden $P_1, \ldots, P_n$ paikkavektorit ovat $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ ja varaukset $q_1, \ldots, q_n$ sekä niiden synnyttämien kenttien voimakkuudet $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$, niin näiden pisteiden yhteisesti synnyttämän kentän voimakkuus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \cdots + \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \frac{kq_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2}\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1} + \cdots + \frac{kq_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2}\mathbf{e}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}_n},$$

missä $\mathbf{e_a}$ tarkoittaa vektorin $\mathbf{a}$ suuntaista yksikkövektoria. Tämä voidaan esittää (teht. 21) myös muodossa

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kq_1\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \cdots + kq_n\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3}.$$

Tarkastelemme vielä tapausta, jossa varaus jakautuu kappaleeseen $K$ varaustiheydellä $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Saamme syntyneen kenttävoimakkuden korvaamalla summan integraalilla, kun integroitavana on ”kenttävoimakkuusalkio”

$$\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{s}) = k\mathrm{d}q(\mathbf{s})\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} = k\rho(\mathbf{s})\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}\mathrm{d}V(\mathbf{s}).$$

Näin ollen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\int_K \rho(\mathbf{s})\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}\mathrm{d}V(\mathbf{s}).$$

Vastaavasti, jos varaus jakautuu pinnalle $S$ varaustiheydellä $\sigma$, niin

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\int_S \sigma(\mathbf{s})\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}\mathrm{d}A(\mathbf{s}),$$

ja jos se jakautuu käyrälle $\gamma$ varaustiheydellä $\lambda$, niin

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\int_\gamma \lambda(\mathbf{s})\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}\mathrm{d}l(\mathbf{s}).$$

Kaava

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

pätee muissakin sähkökentissä kuin yhden varauspisteen synnyttämässä, kun *dielektrinen polarisaatio* [1, s. 88] jätetään huomiotta.

### Harjoitustehtäviä

**21.** Olkoot pisteiden $P$ ja $P'$ paikat $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}'$ sekä varaukset $q$ ja $q'$. Osoita, että $P$ vaikuttaa $P'$:uun voimalla

$$\mathbf{F} = kqq' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}.$$

**22.** **a)** Miten määritellään mekaniikassa kappaleen *tiheys*?

**b)** Oletetaan, että kappaleen $K$ (tai oikeastaan $K$:ta kuvaavan teoreettisen mallin) varausjakauma on "diskreetti" eli että varauksia on vain $K$:n $n$:ssä pisteessä; olkoot nämä varaukset $q_1, \ldots, q_n$. i) Miksi varaustiheydestä puhuminen on tällöin ongelmallista? ii) Mikä kaava vastaa kaavaa (1)?

**23.** Olkoon pisteen $P$ varaus $q$.

**a)** Miksi $P$:n synnyttämä sähkökenttä suuntautuu $P$:stä poispäin, jos $q > 0$, ja $P$:hen päin, jos $q < 0$?

**b)** Hahmottele tätä kenttää, kun i) $q > 0$, ii) $q < 0$, piirtämällä kenttävoimakkuutta kuvaavia vektoreita. Miksei kannata piirtää sellaisia vektoreita, joiden alkupiste on kovin lähellä $P$:tä?

**c)** Minkä suuntaisella voimalla (verrattuna kentän suuntaan) kenttä vaikuttaa siinä olevaan i) positiivisesti, ii) negatiivisesti varattuun pisteeseen?

**d)** Olkoon $P'$ toinen piste, ja olkoon sen varauksen suuruus (itseisarvo) $|q|$. Hahmottele $P$:n ja $P'$:n yhteisesti synnyttämää sähkökenttää, kun niiden varaukset ovat i) kummatkin positiiviset, ii) kummatkin negatiiviset, iii) erimerkkiset.

**e)** *Kenttäkäyrä* (tavallisesti puhutaan "kenttäviivasta") on sellainen (mahdollisimman kaukaa alkava ja mahdollisimman kauas ulottuva) suunnattu käyrä, jonka jokaisessa pisteessä tangenttivektori on kenttävoimakkuusvektorin suuntainen. Piirrä edellä käsiteltyjen sähkökenttien kenttäkäyriä.

**24.** **a)** Miten määritellään mekaniikassa i) massapisteen, ii) kappaleen synnyttämä *gravitaatiokenttä*?

**b)** Hahmottele Maan gravitaatiokenttää, kun i) ollaan niin lähellä Maan pintaa, ettei Maan pallonmuotoisuutta tarvitse ottaa huomioon eli Maata voidaan pitää "pannukakkuna", ii) Maan pallonmuotoisuus otetaan huomioon.

**25.** **a)** Tarkastellaan varauspisteiden synnyttämää sähkökenttää. Totea tehtävän 23 tulosten yhteensopivuus seuraavien yleisten ominaisuuksien kanssa.

i) Kenttäkäyrät alkavat positiivisesta varauksesta tai ”äärettömyydestä” (eivätkä muualta).

ii) Ne päättyvät negatiiviseen varaukseen tai ”äärettömyyteen” (eivätkä muualle).

iii) Jos kokonaisvaraus $Q = 0$, niin jokainen kenttäkäyrä alkaa jostakin positiivisesti varatusta pisteestä ja päättyy johonkin negatiivisesti varattuun pisteeseen.

iv) Jos $Q > 0$, niin (ainakin) osa kenttäkäyristä päättyy äärettömyyteen.

v) Jos $Q < 0$, niin (ainakin) osa kenttäkäyristä alkaa äärettömyydestä.

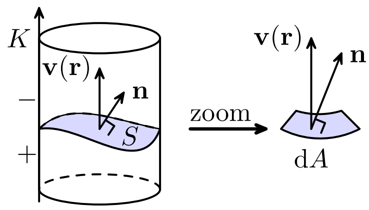
**b)** Varauspisteen synnyttämiä kenttäkäyriä piirretään tavallisesti niin, että niiden lukumäärä on verrannollinen varauksen itseisarvoon ja että ne jakautuvat tasaisesti kaikkiin suuntiin. Olkoon $S$ sellainen pinta, joka on kohtisuorassa kaikkia siihen osuvia kenttäkäyriä vastaan. Mikä yhteys on näiden kenttäkäyrien lukumäärällä ja sähkövuon tiheydellä $S$:ssä?

**26.** Koska Newtonin gravitaatiolaki on muodollisesti samanlainen kuin Coulombin laki, voitaisiin ajatella, että siinäkin merkittäisiin gravitaatiovakiota

$$\gamma = \frac{1}{4\pi\delta}$$

ja annettaisiin $\delta$:lle jokin nimi. Lisäksi voitaisiin puhua ”gravitaatiovuosta” ja sen tiheydestä. Miksei näin kuitenkaan tehdä?

**27.** Yleinen *vektorikenttä* saadaan liittämällä avaruuden tai sen osan (tai tason tai sen osan) jokaiseen pisteeseen tietty vektori. Tarkastellaan nesteen virtaamista putkessa $K$. Valitaan origo ja $K$:n positiivinen suunta. Olkoon $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ virtausnopeus $K$:n pisteessä $\mathbf{r}$. (Siis oletetaan, ettei se riipu ajasta.) Näin syntyy vektorikenttä. Tarkastellaan sellaista kuviteltua pintaa, joka leikkaa $K$:n niin, että leikkauskäyrä kiertää $K$:n ympäri. Olkoon $S$ tämän pinnan se osa, joka jää $K$:n sisään. Tällöin $S$ jakaa $K$:n kahteen osaan. Kutsutaan niitä $S$:n positiiviseksi ja negatiiviseksi puoleksi sen mukaan, onko kyseinen osa $S$:stä katsottuna $K$:n positiivisessa vai negatiivisessa suunnassa.




**a)** Perustele havainnollisesti, että aikayksikössä $S$:n läpäisee nestemäärä

$$m = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A},$$

kun ”pinta-alkiovektori” $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}A$, missä yksikkövektori $\mathbf{n}$ on $S$:n negatiiviselle puolelle suunnattu $S$:n normaalivektori.

**b)** Tulkitse i) $m < 0$, ii) $m = 0$.

**c)** Olkoon $T$ toinen samantyyppinen pinta, joka on $S$:n negatiivisella puolella. Mitä tarkoittaa

$$M = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} - \int_T \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}?$$

**d)** Tulkitse i) $M < 0$, ii) $M = 0$.

**e)** Olkoon $U$ se umpinainen pinta, jonka muodostavat $S$ ja $T$ sekä niiden reunakäyrien välinen $K$:n reunan osa. Perustele havainnollisesti, että

$$M = \oint_U \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}.$$

**f)** Kuvitellaan, että origossa on ”lähde” eli että sieltä virtaa nestettä (mahdollisesti eri tavoilla eri suuntiin). Olkoon pisteessä $\mathbf{r}$ virtausnopeus $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ (ajasta riippumatta). Edelleen olkoon $S$ sellainen kuviteltu umpinainen pinta, jonka rajoittaman kappaleen $K$ sisäpiste on origo. Tulkitse

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A},$$

missä $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}A$ ja yksikkövektorin $\mathbf{n}$ suunta on $K$:sta ulospäin eli $\mathbf{n}$ on $S$:n *ulkonormaali*.

**28.** Tekstissä puhutaan vain yhden varauspisteen $P$ synnyttämästä sähkövuosta ja siitä, kun se läpäisee pallopinnan, jonka keskipisteenä on $P$. Käsitellään nyt tätä asiaa yleisesti. Tarkastellaan pintaa $S$ sähkökentässä, jonka sähkövuon tiheys on $\mathbf{D}$. Kutsutaan sen toista puolta ”sisäpuoleksi” ja toista ”ulkopuoleksi” (kuitenkin ks. c-kohta).

**a)** Totea, että $S$:n läpäisevä sähkövuo kannattaa määritellä integraalina

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A},$$

missä $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}A$ ja $\mathbf{n}$ suuntautuu $S$:n ulkopuolelle.

**b)** Jos sähkökenttä on tasainen ja $S$ umpinainen, niin mitä voidaan sana $S$:n läpäisevästä sähkövuosta

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}?$$

**c)** i) Mikä on *Möbiuksen*[1] *nauha*? ii) Miten se liittyy $\mathbf{n}$:ään? iii) Mitä voidaan sanoa sen läpäisevästä sähkövuosta?

**29.** **a)** Miksi voidaan ajatella, että positiiviset varaukset ovat sähkökentän ”lähteitä” ja negatiiviset sen ”nieluja”? Kutsumalla myös nieluja (negatiivisiksi) lähteiksi voidaan siis sanoa lyhyesti, että *varaukset ovat (staattisen) sähkökentän lähteitä*.

**b)** Mitä voidaan sanoa gravitaatiokentän lähteistä ja nieluista?

**c)** Olkoon kappaleen $K$ reunapinta $S$ ja varaus $Q$ sekä olkoon $K$:n synnyttämän sähkövuon tiheys $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r})$. Perustele havainnollisesti *Maxwellin ensimmäinen laki* eli *Gaussin*[2] *sähkölaki*

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = Q.$$

**d)** Olkoon $K$:n varaustiheys $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Totea, että

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_K \rho \mathrm{d}V.$$

**e)** Olkoon $K$:n varaus jakautunut vain $n$:ään pisteeseen, joissa varaukset ovat $q_1, \ldots, q_n$. Totea, että

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

**f)** Miten kohdat c–e liittyvät a-kohtaan?

[1]August Ferdinand Möbius (1790–1868), saksalainen matemaatikko.
[2]Carl Friedrich Gauss (1777–1855), saksalainen matemaatikko.

**30.** Olkoon $R$-säteisen pallon $K$ varaus $Q$. Oletetaan, että $K$:n varausjakauma on *pallosymmetrinen* eli riippuu vain $K$:n keskipisteestä $O$ mitatusta etäisyydestä $r$, jolloin varaustiheys $\rho = \rho(r)$.

**a)** Osoita, että syntyvän sähkökentän voimakkuus $K$:n ulkopuolisessa pisteessä $P$ on

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathbf{e},$$

missä $r$ on vektorin $\overrightarrow{OP}$ pituus ja $\mathbf{e}$ tämän vektorin suuntainen yksikkövektori. Kenttä on siis tällaisissa pisteissä sama kuin $O$:ssa olevan $Q$:n suuruisen varauksen Coulombin kenttä.

**b)** Oletetaan, että varausjakauma on *homogeeninen* eli $\rho$ on vakio. Osoita, että $K$:n ulkopuolella

$$\mathbf{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon r^2}\mathbf{e}$$

ja sisäpuolella

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3}\mathbf{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon}\mathbf{r}.$$

**c)** i) Jos $K$ on johde, niin miten b-kohtaa täytyy muuttaa? ii) Mikä on $\mathbf{E}$ tällöin?

## 2.2 Sähkökentän potentiaali

Määrittelimme aiemmin [4, s. 39] kappaleen tai oikeammin ”massapisteen” $P$ *potentiaalienergian* yksiulotteisessa tapauksessa seuraavasti. Olkoon $P$ $x$-akselilla ja vaikuttakoon siihen voima $F = F(x)$. Tällöin $P$:n potentiaalienergia annetun pisteen $x_0$ suhteen on

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(u)\mathrm{d}u \tag{1}$$

eli voimaa $F$ vastaan tehty työ, kun $P$ siirtyy $x_0$:sta $x$:ään. Edelleen yleistimme [4, s. 37] *työn* määritelmän kolmiulotteiseen tapaukseen seuraavasti. Jos $P$:hen vaikuttaa voima $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, niin $\mathbf{F}$:n tekemä työ $P$:n liikkuessa pisteestä $\mathbf{r}_1$ pisteeseen $\mathbf{r}_2$ pitkin janaa $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ on käyräintegraali

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{2}$$

pitkin tätä janaa. Vastaavasti voimme määritellä työn, kun $P$ siirtyy pitkin mielivaltaista (tarpeeksi säännöllistä) käyrää $\gamma$, jolloin siis integroidaan pitkin $\gamma$:aa. Kun puhutaan työstä, pitää siis aina ilmoittaa, mitä käyrää pitkin

$P$ liikkuu. Kuitenkaan niin ei tarvitse tehdä, jos käyräintegraali (2) on sama pitkin mitä tahansa pisteet $\mathbf{r}_1$ ja $\mathbf{r}_2$ yhdistävää käyrää eli se on *integroimistiestä riippumaton.*

Tarkastelkaamme hetkeksi yleistä vektorikenttää $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{r})$. Sanomme, että se on *konservatiivinen*, jos käyräintegraali

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

on aina riippumaton pisteet $\mathbf{r}_1$ ja $\mathbf{r}_2$ yhdistävästä käyrästä. Silloin

$$\oint_\gamma \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

pitkin jokaista (kentässä olevaa tarpeeksi säännöllistä) umpinaista käyrää $\gamma$ (miksi?). Siis ”pyörimällä” $\gamma$:aa ympäri saadaan pelkkä nolla. Siksi sanan ”konservatiivinen” synonyymina käytetään tässä yhteydessä sanaa *pyörteetön.*

**Esimerkki 1**. Osoita, että Coulombin kenttä on konservatiivinen.

Olkoon kentän synnyttävä varauspiste origossa ja olkoon sen varaus $q$. Tällöin kentän voimakkuus pisteessä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kq\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = kq\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Koska $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}$, on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = kq\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mikä on funktion

$$f(x, y, z) = -\frac{kq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

kokonaisdifferentiaali (teht. 31a). Väitös seuraa tästä (ks. teht. 8).

Voidaan osoittaa, että levossa olevien sähkövarausten synnyttämä voimakenttä $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ on aina konservatiivinen.

Olkoon $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ konservatiivinen voimakenttä. Kaavat (1) ja (2) antavat aiheen määritellä, että $P$:n potentiaalienergia pisteen $\mathbf{r}_0$ suhteen on

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{u}. \tag{3}$$

**Esimerkki 2**. Olkoon varauspisteen $P$ varaus $q$. **a)** Kuinka suuren työn tekee $P$:n synnyttämä Coulombin kenttä, kun varauspiste $P'$, jonka varaus on $q'$ ja joka oli alunperin i) $P$:stä etäisyydellä $r_0$, ii) "äärettömän kaukana", siirtyy etäisyydelle $r$ $P$:stä? **b)** Mikä on $P'$:n potentiaalienergia tämän siirron jälkeen i) $P$:stä etäisyydellä $r_0$ olevan pisteen, ii) "äärettömän kaukana" olevan pisteen suhteen?

**a)** i) Integroimme pitkin janaa. Valitsemmme origoksi pisteen $P$ ja $x$-akseliksi suoran $PP'$, jolloin tehtävä palautuu yksiulotteiseen tapaukseen. Varauspisteen $P'$ ollessa paikassa $x$ siihen vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}(x) = k\frac{qq'}{x^2}\mathbf{i},$$

joten kysytty työ

$$W = \int_{r_0}^{r} \mathbf{F}(x) \cdot \mathrm{d}x\mathbf{i} = \int_{r_0}^{r} k\frac{qq'}{x^2}\mathrm{d}x = kqq' \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = kqq'\Big(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\Big).$$

ii) Antamalla $r_0 \to \infty$ saamme

$$W = \int_{-\infty}^{r} k\frac{qq'}{x^2}\mathrm{d}x = -k\frac{qq'}{r}.$$

**b)** Koska $U = -W$, on a-kohdan perusteella

$$\text{i) } U = kqq'\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big), \qquad \text{ii) } U = k\frac{qq'}{r}.$$

Tarkastelemme edelleen varauspistettä $P$, johon vaikuttaa sähköstaattinen voima $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Oletamme, että syntynyt voimakenttä on konservatiivinen, jolloin $P$:n potentiaalienergia (3) voidaan määritellä. Se riippuu $P$:n varauksesta ja paikasta. Totesimme aiemmin, että sähköstaattisen voimakentän $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ohella kannattaa tutkia vain $P$:n paikasta riippuvaa sähkökenttää $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Vastaavasti myös potentiaalienergialle on syytä määritellä rinnakkaiskäsite, joka riippuu vain paikasta. Siksi sanomme, että sähkökentän $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ *potentiaali* pisteessä $\mathbf{r}$ pisteen $\mathbf{r}_0$ suhteen on yksikkövarauksen potentiaalienergia

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{u}.$$

Pisteiden $\mathbf{r}_1$ ja $\mathbf{r}_2$ välinen *jännite* on tällöin

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{u}.$$

**Esimerkki 3**. Olkoon varauspisteen $P$ varaus $q$. Määritä **a)** syntyneen Coulombin kentän potentaali $P$:stä etäisyydellä $r$ olevassa pisteessä sellaisen pisteen suhteen, joka on i) $P$:stä etäisyydellä $r_0$, ii) "äärettömän kaukana", **b)** $P$:stä etäisyydellä $r_1$ ja etäisyydellä $r_2$ olevien pisteiden välinen jännite.

**a)** Yksinkertaisesti sijoitamme esimerkin 2b tuloksiin $q' = 1$, jolloin saamme

$$\text{i) } V = kq\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big), \qquad \text{ii) } V = k\frac{q}{r}.$$

**b)** Kysytty jännite

$$V(r_1, r_2) = V(r_2) - V(r_1) = kq\Big(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_0}\Big) - kq\Big(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\Big) = kq\Big(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\Big).$$

Jos $r_0$ on ”äärettömän kaukana”, niin $1/r_0$:n tilalla on 0.

**Harjoitustehtäviä**

**31. a)** Liittyy esimerkkiin 1. Osoita, että funktion

$$f(x, y, z) = -\frac{kq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

kokonaisdifferentiaali on

$$kq\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**b)** Liittyy esimerkkiin 3a. Totea, että

$$V(r) = -f(x, y, z), \quad \text{kun} \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

**32. a)** Tarkastellaan yksiulotteista voimakenttää $F = F(x)$. Osoita, että

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x},$$

kun potentiaalienergia $U$ määritellään kaavalla (1).

**b)** Yleistetään a-kohdan tulos kolmiulotteiseen tapaukseen; siis $U$ määritellään kaavalla (3). Osoita, että

$$\mathbf{F} = -\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\Big),$$

kun $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

**c)** Mikä on vastaava yhteys kenttävoimakkuuden ja potentiaalin välillä?

**33.** Vektorikentän potentiaali määritellään matematiikassa (teht. 8) vähän eri tavalla kuin fysiikassa (edellä). Mikä on ero?

**34.** Osoita, että *tasainen sähkökenttä*, jonka voimakkuus on kaikkialla sama, on konservatiivinen.

**35.** Olkoon tasaisen sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E} = e\mathbf{i}$ (missä siis $e$ on vakio) ja olkoon varauspisteen $P$ varaus $q$. Määritä

**a)** se työ, jonka kenttä tekee, kun $P$ siirtyy pisteestä $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ pisteeseen $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$,

**b)** $P$:n potentiaalienergia pisteessä $\mathbf{r}$ pisteen $\mathbf{r}_0$ suhteen,

**c)** pisteen $\mathbf{r}$ potentiaali pisteen $\mathbf{r}_0$ suhteen,

**d)** pisteiden $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}_0$ välinen jännite.

**36.** Varauspiste siirtyy kohtisuoraan kenttäkäyriä vastaan. Mitä voidaan sanoa sähkökentän tekemästä työstä?

**37.** Sähkökentän ne pisteet, joilla on sama potentiaali (tietyn pisteen suhteen), muodostavat *tasapotentiaalipinnan.*

**a**) Mitä voidaan sanoa tasapotentiaalipinnoista ja kenttäkäyristä toisiinsa nähden?

**b)** Osoita, että tasapotentiaalipinnat eivät riipu siitä pisteestä, jonka suhteen potentiaali määritetään.

**38.** Mitkä ovat **a)** Coulombin, **b)** tasaisen sähkökentän tasapotentiaalipinnat?

**39.** Jatkoa tehtävään 30. Määritä vastaavat potentiaalit ”äärettömän kaukana” olevan pisteen suhteen.

**40.** **a)** Anna esimerkki i) sellaisesta voimasta, jota ei voida kuvata vektorikentällä, ii) ei-konservatiivisesta voimakentästä.

**b)** Tarkastellaan ei-konservatiivista voimakenttää $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Tällöin on olemassa sellainen umpinainen käyrä $\gamma$, että

$$W = \oint_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \neq 0.$$

Suunnataan $\gamma$ niin, että $W > 0$. Kun kentässä oleva piste kiertää toistuvasti pitkin $\gamma$:aa, kenttä tekee yhä enemmän työtä. Näin saadaan ”ikiliikkuja”. Vai saadaanko? ($\ddot\smile$)

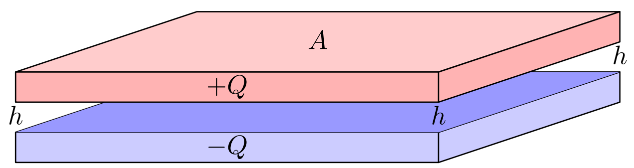
## 2.3 Kondensaattori

*Kondensaattori* muodostuu kahden lähekkäisen johdekappaleen vastakkaisista pinnoista, joilla on yhtä suuret ja vastakkaismerkkiset varaukset. Näitä pintoja kutsutaan kondensaattorin *levyiksi*, vaikka ne eivät olisikaan levynmuotoisia.

Kuvitelkaamme, että kondensaattorin levyjen varaukset, jotka alunperin olivat $Q$ ja $-Q$, muutetaan $a$-kertaisiksi, jolloin ne ovat $aQ$ ja $-aQ$. Tällöin jokainen levyn pinnalla oleva "varausalkio" $\pm \mathrm{d}Q$ tulee $a$-kertaiseksi. Jos sitä pidetään "varauspisteenä", niin myös sen synnyttämän kentän voimakkuus tulee tällöin $a$-kertaiseksi, mistä puolestaan seuraa, että samoin käy levyjen väliselle jännitteelle. Täten kondensaattorin varaus $Q$ on verrannollinen (levyjen väliseeen) jännitteeseen $U$. Verrannollisuuskerroin $C$ on kondensaattorin *kapasitanssi*. Siis

$$C = \frac{Q}{U}.$$

*Levykondensaattori* koostuu kahdesta suorakulmion muotoisesta levystä, jotka sijaitsevat lähellä toisiaan niin, että ne ovat erään suorakulmaisen särmiön vastakkaiset sivutahkot. Olkoon kummankin levyn pinta-ala $A$ ja niiden välinen etäisyys $h$. Jos $A$ on suuri (eivätkä levyt ole liian "kapeita"), niin voimme ajatella, että kummankin levyn varaus jakautuu tasaisesti ja että levyt synnyttävät tasaisen sähkökentän; olkoon sen voimakkuus suuruudeltaan $E$.




Tällöin kondensaattorin jännite

$$U = \int_0^h E\mathrm{d}x = hE.$$

Jos kondensaattorin varaus on $Q$, niin sähkövuon tiheys levyjen välissä on suuruudeltaan

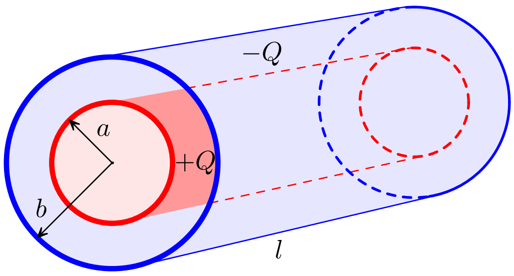
$$D = \varepsilon E = \frac{Q}{A},$$

josta $Q = \varepsilon EA$. Siis kapasitanssi

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon EA}{hE} = \varepsilon \frac{A}{h}.$$

Täten levykondensaattorin kapasitanssi on verrannollinen levyjen pinta-alaan ja kääntäen verrannollinen niiden väliseen etäisyyteen.

*Sylinterikondensaattori* koostuu kahden sellaisen suoran ympyräpohjaisen lieriön vaipasta, joilla on sama akseli $s$ ja samat pohjatasot. Olkoon näiden lieriöiden korkeus (tai tässä ehkä paremmin "pituus") $l$. Olkoot niiden vaipat $S_1$ ja $S_2$ sekä pohjien säteet $a$ ja $b$. Vielä olkoon $a < b$, jolloin $S_1$ on $S_2$:n sisällä.




Olkoon $S_1$:n varaus $Q(>0)$ ja $S_2$:n $-Q$. Jos $l >> a, b$, niin voimme ajatella, että kummankin pinnan varaus jakautuu tasaisesti ja että syntyy sellainen sähkökenttä, jonka voimakkuus $S_1$:n ja $S_2$:n välissä riippuu vain tarkasteltavan pisteen ja $s$:n välisestä etäisyydestä $r$. Siis $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r)$ ja myös sähkövuon tiheys $\mathbf{D} = \mathbf{D}(r)$.

Tarkastelemme sellaista lieriötä $T$, jonka akseli ja pohjatasot ovat samat kuin aiemmilla lieriöillä ja jonka pohjaympyrän säteelle $r$ pätee $a < r < b$. Olkoon sen vaippa $S$, joka siis on $S_1$:n ulkopuolella ja $S_2$:n sisällä. Vektori $\mathbf{D}$ ja $S$:n pinta-alkio $\mathrm{d}\mathbf{A}$ ovat jokaisessa $S$:n pisteessä kohtisuorassa $S$:ää vastaan. Koska kumpikin suuntautuu $S$:n ulkopuolelle, ne ovat samansuuntaiset. Täten $S$:ssä

$$\mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = |\mathbf{D}||\mathrm{d}\mathbf{A}| = D\mathrm{d}A.$$

Lisäksi $\mathbf{D} \perp \mathrm{d}\mathbf{A}$ pätee $T$:n pohjatasoissa ja $D$ on vakio $S$:ssä, joten

$$\oint_T \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_S D\mathrm{d}A = D \int_S \mathrm{d}A = 2\pi r l D.$$

Gaussin sähkölain perusteella

$$2\pi r l D = Q,$$

joten

$$D = \frac{Q}{2\pi l} \frac{1}{r}$$

ja siis

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \frac{1}{r}.$$

Näin ollen kondensaattorin jännite

$$U = \int_a^b E\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \frac{1}{r} \mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{b}{a}$$

ja kapasitanssi

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\varepsilon\frac{l}{\ln\frac{b}{a}}.$$

**Harjoitustehtäviä**

**41.** Miten **a)** kondensaattori *varataan*, **b)** sen varaus *puretaan*?

**42.** Mitä tapahtuu kondensaattorille, kun sen jännite kasvaa tarpeeksi suureksi?

**43.** **a)** Mitä tarkoittaa aineen *polarisoituminen*? **b)** Miten se saadaan aikaan kondensaattorilla?

**44.** Levykondensaattorin levyjen väliin tuodaan johdekappale. Miten levyjen välinen sähkökenttä muuttuu?

**45.** Levykondensaattoria käsitellessämme oletimme levyjen pinta-alan tarpeeksi suureksi, jolloin niiden välistä sähkökenttää voidaan pitää tasaisena. Luovu tästä oletuksesta ja tarkastele levyjen **a)** välistä, **b)** ulkopuolista sähkökenttää.

**46.** Tarkastellaan varaamatonta kondensaattoria, jonka kapasitanssi on $C$.

**a)** Kondensaattori varataan niin, että sen varaukseksi tulee $Q$ ja jännitteeksi $U$. Mitä voimaa vastaan on tällöin tehtävä työtä?

**b)** Osoita, että tämä työ (eli varatun kondensaattorin energia) on

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{Q^2}{2C}.$$

**47.** **a)** Miten kondensaattorit *kytketään rinnan*?

**b)** Mitä tarkoitetaan näin syntyneen ”kondensaattorisysteemin” kapasitanssilla?

**c)** Määritä se, kun rinnan kytkettävien kondensaattorien kapasitanssit ovat $C_1, \ldots, C_n$.

**48.** Kuten edellinen tehtävä, mutta tarkastellaan kondensaattorien *kytkemistä sarjaan.*

**49.** Määritä sellaisen kondensaattorin kapasitanssi, jonka levyinä ovat $a$- ja $b$-säteiset samankeskiset pallopinnat ($a < b$).

**50.** Koska johdekappaleen varaus siirtyy kappaleen pinnalle, eikös vastaavasti johdepinnan varaus siirry pinnan reunoille? Siis levykondensaattorin varaus ei jakaudukaan levyille vaan niiden reunoille. Samoin käy muissakin kondensaattoreissa. Näin ollen kondensaattoreita on tässä käsitelty virheellisesti. Vain onko? ($\ddot{\smile}$)

# 3 Sähkövirtastatiikkaa

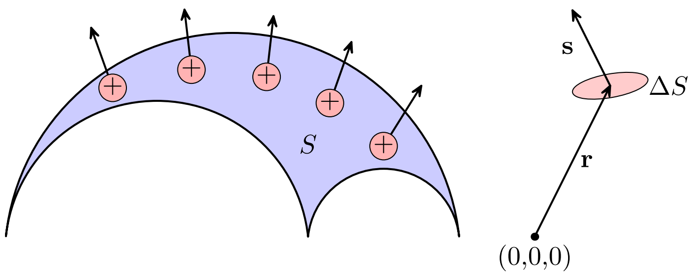
*Sähkövirta* on varattujen hiukkasten eli *virrankuljettajien* liikettä, joten oppi sähkövirrasta ei ole staattinen vaan dynaaminen. Kuitenkin, jos sähkövirta on ajasta riippumaton eli *stationaarinen*, niin tilanne on ”makroskooppisesti katsottuna” staattinen. Silloin puhumme ”sähkövirtastatiikasta”.

## 3.1 Sähkövirta. Ohmin laki

Tarkastelemme tietyn pinnan $S$ läpäisevää sähkövirtaa ajanhetkien $t$ ja $t+\Delta t$ välillä eli aikavälillä $\Delta t$. Jos $S$:n läpi kulkee silloin ”sähkömäärä” eli positiivinen varaus $\Delta q$, niin läpäisevä sähkömäärä kasvaa keskinopeudella $\Delta q/\Delta t$. *Sähkövirran suuruus* ajanhetkellä $t$ on raja-arvo

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},$$

joka siis ilmoittaa, millä nopeudella sähkömäärä tällä hetkellä kasvaa. Se riippuu pinnasta $S$ ja ajanhetkestä $t$. Määrittelemme, että $S$:n läpäisevän sähkövirran suunta on positiivisten varausten eli positiivisesti varattujen virrankuljettajien liikesuunta. Mukavuussyistä kutsumme myös sähkövirran suuruutta lyhyesti ”sähkövirraksi”, ellei väärinkäsityksen vaaraa ole.




Tarvitsemme myös käsitteen, joka kuvaa sähkövirtaa $S$:n tietyssä pisteessä $\mathbf{r}$. Tarkastelemme $S$:n sellaista ”pientä” osapintaa $\Delta S$, joka sisältää $\mathbf{r}$:n; olkoon sen pinta-ala $\Delta A$. Jos $\Delta S$:n läpäisee virta $\Delta I$, niin $\Delta I/\Delta A$ on *virran keskitiheys* pinnalla $\Delta S$. Olkoon $\mathbf{s}$ yksikkövektori, joka ilmoittaa virran suunnan pisteessä $\mathbf{r}$. Raja-arvo

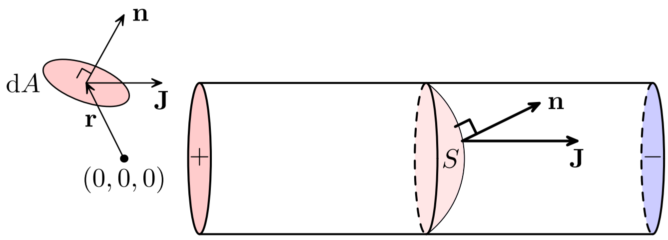
$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A}\mathbf{s} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}\mathbf{s}$$

on *sähkövirran tiheys* eli lyhemmin *virrantiheys* pisteessä $\mathbf{r}$.

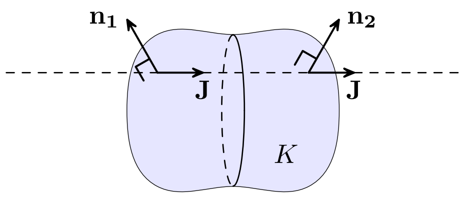
Oletamme nyt, että $S$ jakaa johtimen kahteen osaan, joista toinen on $S$:n ”positiivinen” ja toinen ”negatiivinen” puoli eli jokaisessa läpäisypisteessä $\mathbf{r}$ virran suunta on positiivisesta negatiiviseen puoleen. Tarkastelemme $S$:n

”pinta-alkiovektoria” $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathbf{n}\mathrm{d}A$, missä yksikkövektori $\mathbf{n}$ on $S$:n negatiiviselle puolelle suunnattu $S$:n normaalivektori. Tällöin $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ kuvaa $\mathbf{r}$:n kautta kulkevaa virtaa, joten $\mathrm{d}S$:n läpäisee ”virta-alkio” $\mathrm{d}I = \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$, ja siis $S$:n läpäisee virta

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}. \tag{1}$$




Seuraavaksi olkoon $S$ umpinainen pinta, joka rajoittaa kappaleen $K$. Tarkastelemme $S$:n läpäisevää virtaa. Suuntaamme $\mathbf{n}$:n $K$:sta ulospäin eli $\mathbf{n}$ on $S$:n ulkonormaali. Tällöin $\mathrm{d}I = -\mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$ on ”$\mathbf{r}$:n kautta $K$:hon kulkeva virta-alkio”. Negatiivisessa tapauksessa se on ”$K$:sta kulkeva”.




Kaikkiaan $K$:hon kulkee virta

$$I = -\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}.$$

Toisaalta, jos $K$:n varaus on $Q$ ja varaustiheys $\rho$, niin

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_K \rho \mathrm{d}V,$$

mistä seuraa *varauksen säilymislaki*

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_K \rho \mathrm{d}V = 0.$$

Siis $K$:hon kulkeva virta muuttaa $K$:n varaustiheyttä niin, että tämä yhtälö on voimassa.

Kappale $K$ on *ohminen* eli *lineaarinen* johde, jos sen virrantiheys $\mathbf{J}$ on verrannollinen virran aiheuttavan sähkökentän voimakkuuteen $\mathbf{E}$ eli jos pätee *Ohmin*[1] *laki*

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}, \tag{2}$$

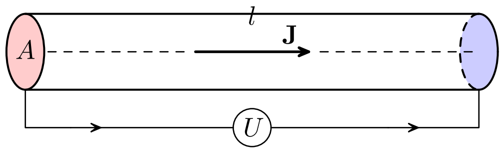
missä $K$:n muodostavan aineen *konduktiivisuus* eli *johtavuus* $\gamma$ on vakio. Esimerkiksi metallit ovat ohmisia. Aineen *resistiivisyys* eli *ominaisvastus*

$$\rho = \frac{1}{\gamma},$$

joten vaihtoehtoinen muotoilu yhtälölle (2) on

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}. \tag{3}$$

Tarkastelemme lopuksi ohmista ”suoraa johdinta” $K$, jonka pituus on $l$, poikkipinta-ala $A$, resistiivisyys $\rho$ ja konduktiivisuus $\gamma$. Koska $K$:n päiden varaus jakautuu tasaisesti, niiden välinen jännite $U$ synnyttää $K$:ssa tasaisen sähkökentän; olkoon sen voimakkuus $\mathbf{E}$. Tällöin kentän synnyttämä sähkö-




virta $I$ ja virrantiheys $\mathbf{J}$ ovat vakioita. Yhtälön (3) perusteella pätee vastaaville skalaarisuureille

$$E = \rho J. \tag{4}$$

Koska

$$E = \frac{U}{l} \quad \text{ja} \quad J = \frac{I}{A}$$

(miksi?), saamme yhtälön (4) muotoon

$$U = \rho \frac{l}{A} I.$$

Vakio

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{l}{\gamma A}$$

on $K$:n *resistanssi*. Siis tässä erikoistapauksessa Ohmin laki on

$$U = RI.$$

[1] Georg Simon Ohm (1789–1854), saksalainen fyysikko.

### Harjoitustehtäviä

**51.** **a)** Onko sähkövirran voimakkuus skalaari- vai vektorisuure?

**b)** Tuntuisi luonnollisemmalta määritellä virran suunta elektronien (tai muiden negatiivisesti varattujen virrankuljettajien) kulkusuunnaksi eikä päinvastaiseksi. Miksei niin tehdä?

**52.** Tulkitse kaava (1), kun $S$ ei jaa johdinta "positiiviseen" ja "negatiiviseen" osaan eli $S$:n läpäisevää sähkövirtaa esiintyy kummassakin suunnassa.

**53**. **a)** Ennen vanhaan (ks. esim. [5]) sähkövirran suuruudesta käytettiin nimitystä "virran voimakkuus" ja resistanssista nimitystä "vastus". Miksei enää tehdä niin?

**b)** Mitä *vastus* oikeasti tarkoittaa sähköopissa?

**54.** Mitä tarkoittaa virtalähteen **a)** *lähdejännite*, **b)** *napajännite*, **c)** *jännitehäviö*, **d)** *sisäinen resistanssi*?

**55.** Lähdejännitettä kutsutaan usein "sähkömotoriseksi voimaksi". Miksei tämä nimitys ole hyvä?

**56.** (Vrt. teht. 48.) **a)** Miten virtalähteet *kytketään sarjaan*?

**b)** Määritä näin syntyneen virtalähteen i) lähdejännite, ii) sisäinen resistanssi, kun kytkettävien virtalähteiden lähdejännitteet ovat $U_1, \ldots, U_n$ ja sisäiset resistanssit $R_1, \ldots, R_n$.

**57.** (Vrt. teht. 47.) **a)** Miten virtalähteet *kytketään rinnan*?

**b)** i) Miksi kaikilla näillä virtalähteillä pitää olla sama lähdejännite? ii) Mitä voidaan tällöin sanoa näin syntyneen virtalähteen lähdejännitteestä?

**c)** Määritä tämän virtalähteen sisäinen resistanssi, kun kytkettävien virtalähteiden sisäiset resistanssit ovat $R_1, \ldots, R_n$.

**58.** **a)** Kahden ohmisen johtimen poikkipintoina ovat $a$- ja $b$-säteiset ympyräalueet. Niissä kulkee samansuuruinen virta. Määritä virrantiheyksien suhde.

**b)** Määritä näiden johdinten resistanssien suhde, kun johtimet on tehty samasta aineesta.

**59.** Tulkitse *Joulen*[1] *laki*

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

**60.** Tarkastellaan ohmista suoraa johdinta, jonka konduktiivisuus on $\gamma$ ja jossa kulkevan sähkövirran suunta on kaikkialla sama. Olkoon virta $x$-akselin suuntainen. Osoita, että virrantiheys

$$\mathbf{J} = -\gamma \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\mathbf{i},$$

missä $V$ on potentiaali.

## 3.2 Kirchhoffin lait

Umpinainen johdin ja (yksi tai useampi) virtalähde muodostavat *virtapiirin*. Se voi koostua umpinaisista ”silmukoista”. Jos virtapiirin kaikki lähdejännitteet ja resistanssit tunnetaan, niin sen kaikissa osissa kulkevat sähkövirrat voidaan määrittää *Kirchhoffin*[2] *lakien* avulla. Kertaamme nämä lait mutta jätämme niiden perustelun harjoitustehtäväksi (teht. 61).

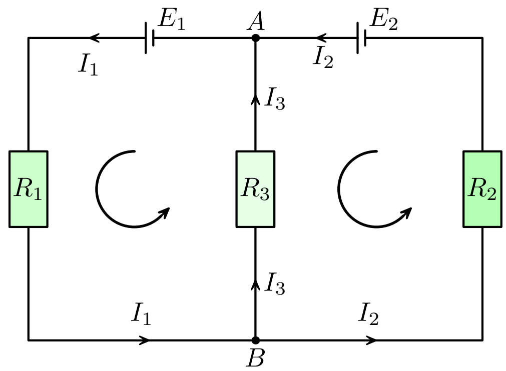
*Kirchhoffin ensimmäisen lain* mukaan tiettyyn pisteeseen tulevien ja siitä lähtevien virtojen summat ovat samat. Jos siis tulevat sähkövirrat ovat $I_1, \ldots, I_m$ ja lähtevät $I'_1, \ldots, I'_n$, niin

$$I_1 + \cdots + I_m = I'_1 + \cdots + I'_n.$$

*Kirchhoffin toisen lain* mukaan umpinaisessa silmukassa jännitehäviö on sama kuin lähdejännite. Jos siis lähdejännite on $E$, piirissä olevien vastusten resistanssit $R_1, \ldots, R_n$ ja näiden vastusten läpi kulkevat virrat $I_1, \ldots, I_n$, niin

$$E = R_1 I_1 + \cdots + R_n I_n.$$

**Esimerkki 1.** Tarkastelemme kuvion mukaista virtapiiriä.




[1] James Prescott Joule (1818–1889), englantilainen olutpanimon omistaja ja fyysikko.
[2] Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887), saksalainen fyysikko.

Soveltamalla Kirchhoffin ensimmäistä lakia pisteeseen $A$ saamme

$$I_3 + I_2 = I_1,$$

soveltamalla toista lakia vasemmanpuoliseen silmukkaan

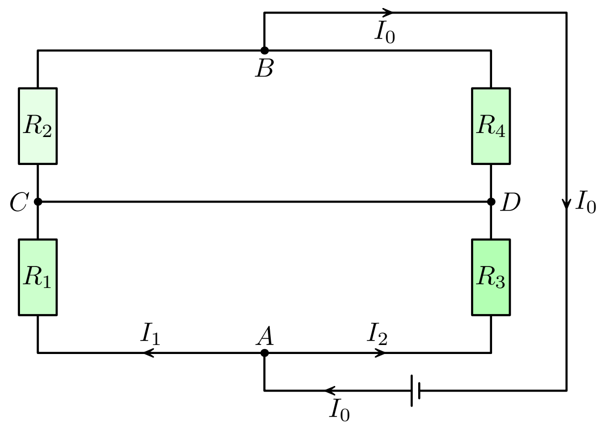
$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$$

ja soveltamalla sitä oikeanpuoliseen silmukkaan

$$E_2 = -R_3 I_3 + R_2 I_2.$$

Miinusmerkki johtuu siitä, että kuvion mukainen virran $I_3$ ”laskennallinen suunta” on päinvastainen kuin silmukan kiertosuunta. Näistä kolmesta yhtälöstä voidaan ratkaista $I_1$, $I_2$ ja $I_3$.

**Esimerkki 2** (Wheatstonen[1] silta). Resistanssin määrittämisessä käytettävän *Wheatstonen sillan* on alunperin keksinyt Christie[2] (lähde: Wikipedia). Virtalähteestä alkava sähkövirta $I_0$ haarautuu ”sillan alkupisteessä” $A$ niin, että vasemmalle kulkee virta $I_1$ ja oikealle $I_2$. Vasemmanpuolisessa osassa on kaksi vastusta resistansseiltaan $R_1$ ja $R_2$, ja piste $C$ on niiden välissä. Vastaavasti oikealla puolella on vastukset resistansseiltaan $R_3$ ja $R_4$ ja niiden välinen piste $D$. Haarat yhdistyvät ”sillan loppupisteessä” $B$, josta virta kulkee takaisin virtalähteeseen. Säädetään vastukset niin, ettei johtimessa $CD$ kulje virtaa.




Soveltamalla Kirchhoffin toista lakia silmukkaan $ADCA$ ja $BCDB$ saamme

$$-R_1 I_1 + R_3 I_2 = 0, \qquad -R_2 I_1 + R_4 I_2 = 0,$$

[1] Charles Wheatsone (1802–1875), englantilainen fyysikko ja keksijä.
[2] Samuel Hunter Christie (1784–1865), englantilainen luonnontieteilijä ja matemaatikko.

eli

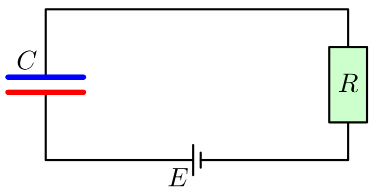
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_3}{R_1}, \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_4}{R_2},$$

joten

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Jos resistansseista yksi on tuntematon, niin se voidaan ratkaista tästä yhtälöstä.

**Esimerkki 3** ($RC$-tasavirtapiiri). Vastus, kondensaattori ja virtalähde muodostavat *$RC$-tasavirtapiirin*. Olkoon vastuksen resistanssi $R$ ja alunperin varauksettoman kondensaattorin kapasitanssi $C$ sekä virtalähteen lähdejännite vakio $E$. Ajanhetkellä $t = 0$ piiri suljetaan, jolloin kondensaattori alkaa varautua. Esitä varaus ajan funktiona.




Olkoon $q = q(t)$ kysytty funktio, jolloin kondensaattorin jännite

$$V = \frac{q}{C}.$$

Lähdejännite $E$ on Kirchhoffin toisen lain mukaan sama kuin jännitehäviöiden summa $RI + V$, missä $I$ on piirissä kulkeva virta. Näin ollen

$$E = RI + \frac{q}{C}$$

eli

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} - E = 0,$$

minkä kirjoitamme vielä muotoon

$$RC\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = EC - q.$$

Erotamme muuttujat

$$\frac{\mathrm{d}q}{EC - q} = \frac{1}{RC}\mathrm{d}t$$

ja integroimme

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{EC - q} = \int \frac{1}{RC}\mathrm{d}t,$$

joten

$$-\ln(EC - q) = \frac{1}{RC}t + k.$$

Alkuehdon $q(0) = 0$ perusteella integroimisvakio $k = -\ln EC$. Helpolla laskulla (teht. 65) seuraa nyt, että

$$q = EC(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}).$$

**Harjoitustehtäviä**

**61.** Miksi Kirchhoffin lait ovat voimassa?

**62.** Esimerkissä 1 ei sovellettu Kirchhoffin ensimmäistä lakia pisteeseen $B$ eikä toista lakia ”suureen” silmukkaan. Jäikö tämä esimerkki siis kesken?

**63.** Miksi voidaan sanoa, ettei $RC$-piiri oikeastaan ole ”virtapiiri” tämän sanan varsinaisessa merkityksessä?

**64.** Käsittele i) Kirchhoffin lakien sovelluksena, ii) muulla tavalla vastusten kytkemistä **a)** sarjaan, **b)** rinnan.

**65.** Suorita esimerkissä 3 sivuutetut laskut.

**66.** Jatkoa esimerkkiin 3.

**a)** Määritä $\lim_{t\to\infty} q(t)$ ja tulkitse tulos.

**b)** Mikä osa a-kohdan raja-arvosta saavutetaan *aikavakion* $t = RC$ kuluttua?

**67.** Tarkastellaan sellaista $RC$-piiriä, jossa ei ole virtalähdettä ja jossa kondensaattorin varaus on alunperin $Q$. Ajanhetkellä $t = 0$ piiri suljetaan, jolloin kondensaattori alkaa purkautua. Olkoon $q = q(t)$ sen varaus ajan $t$ kuluttua. Osoita, että

$$q = Q\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

**68.** Jatkoa tehtävään 67.

**a)** Määritä $\lim_{t\to\infty} q(t)$ ja tulkitse tulos.

**b)** Mikä osa alkuperäisestä varauksesta on jäljellä aikavakion $t = RC$ kuluttua?

**69.** Kuution muotoisen kehikon jokaisen särmän resistanssi on $R$. Määritä kehikon resistanssi, kun virtalähteen navat kytketään kehikon kahteen vastakkaiseen kärkeen.

**70.** Anna esimerkki sellaisesta fysiikan tehtävästä, joka ei kuulu sähköoppiin mutta johtaa samantyyppiseen differentiaaliyhtälöön kuin **a)** esimerkissä 3, **b)** tehtävässä 67 ja siis myös samantyyppiseen ratkaisuun. Mitä yhteyksiä näin saadaan tiettyjen fysikaalisten käsitteiden välille?

# 4 Magnetostatiikkaa

Sähkömagnetismi perustuu kahteen vuorovaikutukseen. Toinen on varattujen kappaleiden välinen Coulombin lain mukainen *sähköinen vuorovaikutus*. Toinen on varattujen hiukkasten liikkuessa eli sähkövirran kulkiessa syntyvä *magneettinen vuorovaikutus*. Yhteisesti niistä käytetään nimitystä *sähkömagneettinen vuorovaikutus*. *Magnetostatiikassa* tarkasteltavat *magneettikentät* ovat levossa eli eivät riipu ajasta.

## 4.1 Magneettikenttä

Tarkastelemme kahta suorakulmion vastakkaisina sivuina olevaa johdinta, joiden pituus on $l$ ja joiden välinen etäisyys on $r$. Jos niissä kulkevat sähkövirrat $I_1$ ja $I_2$, niin ne vaikuttavat toisiinsa *Ampèren*[1] *voimalain* mukaan voimalla, jonka suuruus

$$F = c\,\frac{I_1 I_2}{r}\,l, \tag{1}$$

missä $c(> 0)$ on tietty (väliaineesta riippuva) vakio. Kyseessä on vetovoima, jos virrat ovat samansuuntaiset, ja poistovoima, jos ne ovat vastakkaissuuntaiset. Tavallisesti kirjoitetaan

$$c = \frac{\mu}{2\pi},$$

missä *permeabiliteetti* $\mu$ riippuu väliaineesta. Tyhjiössä $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$. Oikeastaan sitä pitäisi merkitä $\mu_0$:lla, mutta jätämme mukavuussyistä nollan pois. Vrt. s. 16. Vastaava vektoriyhtälö on

$$\mathbf{F} = \pm c\,\frac{I_1 I_2}{r}\,l\,\mathbf{e}, \tag{2}$$

missä $\mathbf{e}$ on vaikuttavasta johtimesta toiseen suunnattu kohtisuora yksikkövektori ja merkki valitaan sen mukaan, ovatko virrat samansuuntaiset (miinus) vai vastakkaissuuntaiset (plus).


[1] André Marie Ampère (1775–1836), ranskalainen fyysikko ja matemaatikko.

Tämä voima aiheutuu siitä, että toisen sähkövirran synnyttämä *magneettikenttä* vaikuttaa toiseen.

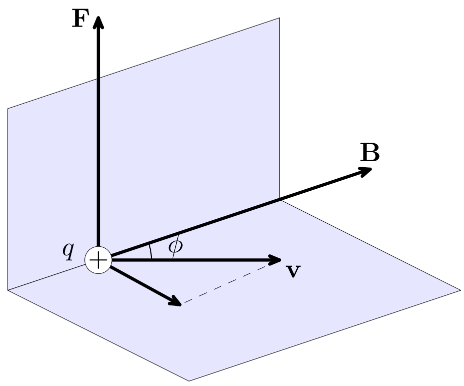
Mikä suure kuvaa magneettikenttää? Tähän vastaamiseksi tarkastelemme varauspistettä $P$, jonka varaus on $q$ ja joka liikkuu tietyssä magneettikentässä nopeudella $\mathbf{v}$. Tällöin kenttä vaikuttaa $P$:hen voimalla

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{3}$$

missä $\mathbf{B}$ on kentän *magneettivuon tiheys*. Toisin sanoen $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$, missä

$$F = qvB \sin\phi, \tag{4}$$

$\phi$ on vektorien $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{B}$ välinen kulma ja $\mathbf{e}$ on $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$:n suuntainen yksikkö-




vektori. Kaava (3) selvittää magneettikentän vaikutuksen yhteen liikkuvaan varauspisteeseen. Nyt herää kysymys, miten magneettikenttä vaikuttaa "moneen" liikkuvaan varauspisteeseen eli sähkövirtaan. Tarkastelemme johdinta, jossa kulkee virta $I$ ja joka muodostaa käyrän $\gamma$. Kun "varausalkio" $\mathrm{d}q$ kulkee "differentiaalisella" aikavälillä $\mathrm{d}t$ matkan $\mathrm{d}\mathbf{l}$, on

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

eli

$$\mathrm{d}q = I\mathrm{d}t$$

ja

$$v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}.$$

Yhtälön (4) perusteella

$$\mathrm{d}F = vB\sin\phi\,\mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}BI\sin\phi\,\mathrm{d}t = IB\sin\phi\,\mathrm{d}l,$$

joten $\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, ja siis

$$\mathbf{F} = I\int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Suoran johtimen ja tasaisen magneettikentän tapauksessa (teht. 74)

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \tag{5}$$

missä $\mathbf{l}$ on johtimen muodostama vektori suunnattuna virran suuntaan.

Myös *magneettinen kappale* eli lyhyesti *magneetti* synnyttää magneettikentän, joka sekin aiheutuu sähkövirroista, mutta ne ovat ”mikroskooppisella tasolla” eli ”atomaarisia”. Sillä on *magneettiset navat*: *pohjoisnapa* eli *N-napa* ja *etelänapa* eli *S-napa*. Kenttäkäyrät suuntautuvat kappaleen ulkopuolella pohjoisnavalta etelänavalle ja sisäpuolella päinvastoin. Erinimiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja samannimiset karkottavat toisiaan. Ks. myös teht. 77.

### Harjoitustehtäviä

**71.** Miten varauspisteen pitää liikkua magneettikentässä, jotta kenttään siihen vaikuttava voima olisi **a)** suurimmillaan, **b)** pienimmillään?

**72.** Varauspiste, jonka varaus on $q$, liikkuu *sähkömagneettisessa kentässä* nopeudella $\mathbf{v}$. Määritä siihen vaikuttava voima (nk. *Lorentzin*[1] *voima*), kun sähkökentän voimakkuus on $\mathbf{E}$ ja magneettikentän magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$.

**73.** Ympyränmuotoinen johdin, jonka säde on $r$ ja jossa kulkee virta $I$, on tasaisessa magneettikentässä, jonka magneettivuon tiheys on suuruudeltaan $B$. Johdin on kohtisuorassa kenttää vastaan. Määritä siihen vaikuttavan voiman suuruus.

**74.** Totea kaavan (5) pätevyys suoralle johtimelle ja tasaiselle magneettikentälle.

**75.** **a)** Miten määräytyy, kumpi magneettisen kappaleen navoista on pohjoisnapa ja kumpi etelänapa?

**b)** Miten magneettineula kääntyy i) suorassa johtimessa kulkevan virran, ii) Maan magneettikentässä?

**76.** Missä päin maailmaa on Maan magneettinen **a)** pohjoisnapa, **b)** etelänapa? Riittää ilmoittaa jokin paikka, jota ”lähellä” se on.

[1]Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), hollantilainen fyysikko.

**77.** Vertaa toisiinsa kahden erimerkkisen mutta itseisarvoltaan saman varauksen synnyttämää sähkökenttää ja magneettisen kappaleen synnyttämää magneettikenttää. Mikä niissä on samanlaista ja mikä erilaista?

**78.** (Vrt. teht. 28.) Olkoon pinta $S$ magneettikentässä, jonka magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$. Totea, että $S$:n läpäisevä magneettivuo kannattaa määritellä integraalina

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}.$$

**79.** Kuten tehtävä 27, mutta kuvitellaan, että ”virtaukset” voivat kulkea missä tahansa mihin tahansa suuntaan.

**a)** Muuttuuko ratkaisu? Jos muuttuu, niin miten?

**b)** Mitä voidaan sanoa tehtävästä 27f, jos

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0?$$

**80.** (Vrt. teht. 29.) **a)** i) Mitä tarkoittaa *magneettinen monopoli*? ii) Onko niitä oikeasti olemassa?

**b)** Totea a-kohdan perusteella, että *(staattisella) magneettikentällä ei ole lähteitä*.

**c)** Olkoon umpinaisen pinnan $S$ rajoittama kappale magneettikentässä, jonka magneettivuon tiheys $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. i) Perustele havainnollisesti *Maxwellin toinen laki* eli *Gaussin magnetismilaki*

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0.$$

ii) Miten tämä liittyy b-kohtaan?

**d)** Mikä olennainen ero on (staattisen) sähkökentän ja (staattisen) magneettikentän kenttäkäyrillä?

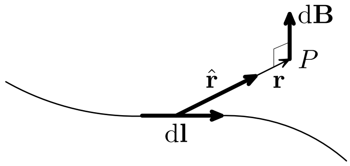
## 4.2 Sähkövirran magneettikenttä

Kun johtimessa kulkee sähkövirta $I$, mikä on syntyneen kentän magneettivuon tiheys $\mathbf{B}$ annetussa pisteessä $P$? Selvitämme tätä. Olkoon johtimen muodostama käyrä $\gamma$. Jaamme sen ”differentiaalisiin” osiin $\mathrm{d}\mathbf{l}$ ja tarkastelemme yhtä niistä. Siinä kulkevan virran aikaansaama ”magneettivuon tiheysalkio” on *Biot'n*[1]*-Savart'n*[2] *lain* mukaan

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{c}{2}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{1}$$

missä $\mathbf{r}$ on tästä osasta alkava ja $P$:hen päättyvä vektori, $r = |\mathbf{r}|$ ja $\hat{\mathbf{r}}$ on $\mathbf{r}$:n suuntainen yksikkövektori. Kaikkiaan

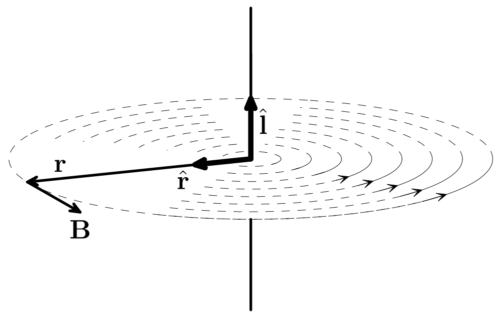
$$\mathbf{B} = \frac{cI}{2}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \tag{2}$$




”Äärettömän pitkän” suoran johtimen tapauksessa Biot'n-Savart'n laki on yksinkertaisesti (teht. 84)

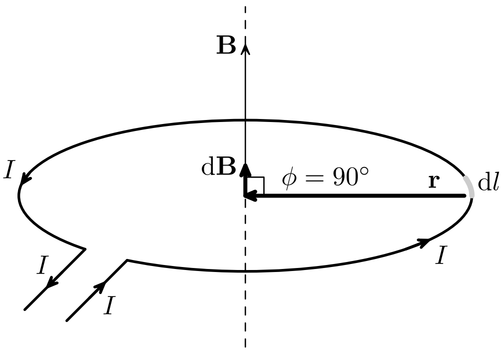
$$\mathbf{B} = \frac{cI}{r}\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{r}}, \qquad B = \frac{cI}{r}. \tag{3}$$

Tässä $\hat{\mathbf{l}}$ on virran suuntainen yksikkövektori, $\mathbf{r}$ on johtimesta $P$:hen suunnattu etäisyysvektori, $r = |\mathbf{r}|$ ja $\hat{\mathbf{r}}$ on $\mathbf{r}$:n suuntainen yksikkövektori. Kenttäkäyrät ovat sellaisia ympyröitä, jotka ovat kohtisuorassa johdinta vastaan ja joiden keskipisteiden kautta johdin kulkee (teht. 81).




[1] Jean-Baptiste Biot (1774–1862), ranskalainen fyysikko ja matemaatikko.
[2] Félix Savart (1791–1841), ranskalainen lääkäri ja fyysikko.

**Esimerkki 1.** Ympyrän muotoisessa johtimessa kulkee virta $I$. Laske magneettivuon tiheys ympyrän keskipisteessä, kun ympyrän säde on $r$.

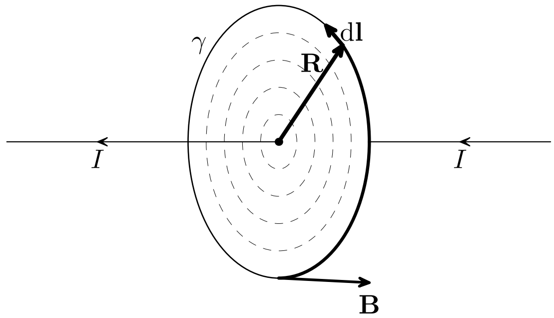



Valitsemme koordinaatiston niin, että se kyseinen ympyrä $\gamma$ on $xy$-tasossa ja sen keskipiste on origo. Jokaisessa $\gamma$:n pisteessä on $\mathrm{d}\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{k}\mathrm{d}l$ (teht. 86a, $\mathbf{k}$ on positiivisen $z$-akselin suuntainen yksikkövektori), joten Biot'n-Savart'n lain (2) mukaan

$$\mathbf{B} = \frac{cI}{2} \oint_\gamma \frac{\mathbf{k}}{r^2}\,\mathrm{d}l = \frac{cI}{2r^2}\mathbf{k} \oint_\gamma \mathrm{d}l = \frac{cI}{2r^2}\mathbf{k}\,2\pi r = \frac{\pi c I}{r}\mathbf{k} = \frac{\pi \mu I}{2\pi r}\mathbf{k} = \frac{\mu I}{2r}\mathbf{k}.$$

**Esimerkki 2.** Olkoon $\mathbf{B}$ magneettivuon tiheys suorassa johtimessa kulkevan virran $I$ synnyttämässä magneettikentässä, ja olkoon $\gamma$ kenttäkäyrä. Laske

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}.$$




Kenttäkäyrä $\gamma$ on ympyrä, joka on kohtisuorassa johdinta vastaan ja jonka keskipisteen kautta johdin kulkee. Olkoon sen säde $R$. Huomaamalla, että vektorit $\mathbf{B}$ ja $\mathrm{d}\mathbf{l}$ ovat samansuuntaiset (miksi?), ja käyttämällä Biot'n-Savart'n lakia (3) saamme

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_\gamma B\mathrm{d}l = \oint_\gamma \frac{cI}{R}\mathrm{d}l = \frac{cI}{R}\oint_\gamma \mathrm{d}l = \frac{cI}{R}2\pi R = 2\pi c I = 2\pi \frac{\mu}{2\pi} I = \mu I.$$

Tulos ei siis riipu $R$:stä. Itse asiassa se pätee paljon yleisemminkin. Nimittäin on voimassa *Ampèren virtalaki* [10, s. 477], [14, s. 937]

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu I, \tag{4}$$

missä $\gamma$ on sellainen umpinainen käyrä, joka kiertää johtimen kerran ja joka suunnistetaan virran suunnan mukaan.

### Harjoitustehtäviä

**81.** **a)** Osoita, että suorassa johtimessa kulkevan virran synnyttämän magneettikentän kenttäkäyrät ovat sellaisia ympyröitä, jotka ovat kohtisuorassa johdinta vastaan ja joiden keskipisteiden kautta johdin kulkee.

**b)** Jatkoa. Tarkastellaan kenttäkäyrää johtimen siltä puolelta, jonne virta kulkee. Onko käyrän kiertosuunta positiivinen (eli vastapäivään) vai negatiivinen (eli myötäpäivään)?

**82.** Totea, että Ampèren voimalaki (osaluku 4.1, kaava (1)) voidaan kirjoittaa muotoon

$$F = I_2 l B_1,$$

missä $B_1$ on virran $I_1$ synnyttämän magneettivuon tiheyden suuruus.

**83.** **a)** i) Miksei Ampèren voimalain vektorimuoto (osaluku 4.1, kaava (2)) ole vastaavasti $\mathbf{F} = \pm I_2 l \mathbf{B}_1$? ii) Mikä se on näiden suureiden avulla esitettynä?

**b)** Totea saadun tuloksen yhteensopivuus sen kanssa, että kaksi yhdensuuntaista suoraa johdinta vetää toisiaan puoleensa, jos niissä kulkevat samansuuntaiset virrat, ja karkottaa toisiaan, jos virrat ovat vastakkaisuuntaiset.

**84.** Johda kaava (3) soveltamalla kaavaa (2) ”äärettömän pitkään” suoraan johtimeen.

**85.** Tarkastellaan ”äärettömän pitkää” varattua sauvaa, jonka varaus jakautuu tasaisesti varaustiheydellä $\lambda$. Jos siis sauvan $l$:n pituisella osalla on varaus $q$, niin $\lambda = q/l$.

**a)** Osoita, että syntyneen sähkökentän voimakkuus sauvasta etäisyydellä $r$ on suuruudeltaan

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \frac{\lambda}{r}.$$

**b)** Totea tämän tuloksen ja jälkimmäisen kaavan (3) välinen vastaavuus. Mikä olennainen ero on kuitenkin vektoreilla $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{B}$?

**86.** Palataan esimerkkiin 1.

**a)** Osoita, että $\gamma$:n jokaisessa pisteessä on $\mathrm{d}\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{k}\mathrm{d}l$.

**b)** Piirrä kenttäkäyriä.

**87.** *Solenoidi* saadaan kiertämällä johdin tasaisesti suoran sauvan ympärille.

**a)** Vertaa toisiinsa solenoidissa kulkevan virran ja sauvamagneetin synnyttämiä magneettikenttiä.

**b)** Miten määräytyy se, kumpi solenoidin pää vastaa sauvamagneetin $N$-napaa ja kumpi $S$-napaa?

**88.** Tarkastellaan virran $I$ synnyttämää magneettikenttää ”pitkän” solenoidin ”keskiosassa”.

**a)** Miksi tämä kenttä on likimain tasainen solenoidin sisäpuolella ja likimain nolla ulkopuolella?

**b)** Kuinka suuri on magneettivuon tiheys sisäpuolella, kun silmukan säde on $r$ ja silmukoiden lukumäärä ”keskiosassa” on $n$?

**89.** Ympyrän muotoisessa johtimessa, joka keskipiste on $O$ ja säde $R$, kulkee virta $I$. Määritä syntyneen magneettivuon tiheys pisteessä, joka on $O$:n kautta kulkevalla ympyrän tason normaalilla ja jonka etäisyys $O$:sta on $d$. (Vrt. esim. 1.)

**90.** Tarkastellaan magneettikenttää, jonka magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$. Kun väliaineen *magnetoituma* [1, s. 185] jätetään huomiotta, määritellään *magneettikentän voimakkuus* $\mathbf{H}$ yhtälöllä

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.$$

**a)** Totea, että Ampèren virtalaki saadaan yksinkertaiseen muotoon

$$\oint_\gamma \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = I.$$

**b)** Magneettikenttää luonnehtii nyt kaksi suuretta $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{H}$, kuten sähkökenttääkin luonnehtii kaksi suuretta $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{D}$. i) Miksi voidaan sanoa, että $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{E}$ vastaavat toisiaan ja samoin $\mathbf{H}$ ja $\mathbf{D}$? ii) Mitä kummallista on nyt näiden suureiden nimityksissä? iii) Mistä tämä kummallisuus mahtaa johtua?

## 4.3 Sähkövirta magneettikentässä

Yksinkertaisin "sähkövirta" on liikkuva varauspiste $P$. Jos $P$ liikkuu nopeudella $\mathbf{v}$ magneettikentässä, jonka magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$, ja jos $P$:n varaus $q$, niin kenttä vaikuttaa $P$:hen voimalla

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

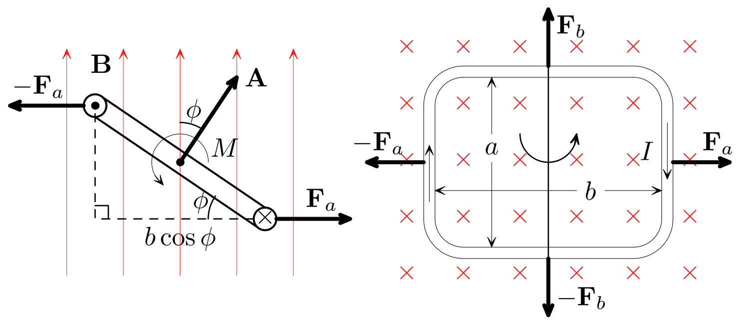
(osaluku 4.1, kaava (3)). Jos vektorin $\mathbf{l}$ muodostavassa suorassa johtimessa kulkee virta $I$ ja jos johdin on tasaisessa magneettikentässä, jonka magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$, niin siihen vaikuttaa voima

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{1}$$

(osaluku 4.1, kaava (6)).

Jos johdin on tuettu kenttään, niin kenttä pyrkii kääntämään sitä tämän voiman momentilla tukipisteen tai tukiakselin suhteen.

**Esimerkki 1.** Suorakulmion muotoinen johdinsilmukkka asetetaan tasaiseen magneettikenttään kiinnittämällä sen kahden vastakkaisen sivun keskipisteet kenttää vastaan kohtisuoraan akseliin, jonka ympäri silmukka voi kiertyä. Mihin asentoon se kiertyy?




Olkoot silmukan sivujen pituudet $a$ ja $b$, kulkekoon siinä virta $I$, olkoot $b$:n pituisten sivujen keskipisteet kiinnitetyt akseliin, ja olkoon magneettikentän magneettivuon tiheys $\mathbf{B}$. Silmukan pinta-ala $A = ab$. Pinta-alavektori $\mathbf{A}$ on kohtisuorassa silmukkaa vastaan. Suuntaamme tämän vektorin sille puolelle silmukkaa, josta katsottuna virran kiertosuunta on positiivinen. Olkoon vektorien $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ välinen kulma $\phi$.

Ensiksi tarkastelemme $a$:n pituisiin sivuihin vaikuttavia voimia. Nämä sivut ovat kenttää vastaan kohtisuorassa, joten kaavan (1) perusteella kumpaankin vaikuttava voima on suuruudeltaan

$$F_a = IaB.$$

Lisäksi nämä voimat ovat vastakkaissuuntaiset ja akselia vastaan kohtisuorat (teht. 93a). Täten ne muodostavat voimaparin, jonka momentti akselin suhteen on

$$M = -IaBb\sin\phi = -IAB\sin\phi \tag{2}$$

(teht. 93b).

Toiseksi tarkastelemme $b$:n pituisiin sivuihin vaikuttavia voimia. Kumpikin niistä on suuruudeltaan

$$F_b = IbB|\cos\phi| \tag{3}$$

(teht. 93c). Nämäkin voimat ovat vastakkaissuuntaiset ja akselia vastaan kohtisuorat (teht. 94a), mutta niiden muodostaman voimaparin momentti on nolla (teht 94b).

Siis kenttä vaikuttaa silmukkaan voimalla $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ja momentilla (2). Täten silmukka kiertyy asentoon, jossa $M = 0$ eli $\phi = 0$. Silloin $\mathbf{A}$ on kentän suuntainen. Toisaalta $\mathbf{A}$ on samansuuntainen kuin silmukassa kulkevan virran synnyttämä magneettikenttä silmukan sisällä (teht. 94c). Silmukka siis kiertyy magneettikentässä siten, että sen oma sisäpuolinen magneettikenttä tulee tämän kentän suuntaiseksi.

### Harjoitustehtäviä

**91.** Tekeekö magneettikenttä työtä, kun **a)** siinä liikkuu varauspiste, **b)** siinä olevassa johtimessa kulkee virta?

**92.** Varauspiste $P$ liikkuu tasaisella vauhdilla homogeenisessa magneettikentässä kohtisuorassa kenttää vastaan. **a)** Osoita, että $P$:n rata on ympyrä. **b)** Laske tämän ympyrän säde, kun $P$:n massa on $m$, varaus $q$ ja vauhti $v$ sekä kentän magneettivuon tiheys on suuruudeltaan $B$.

**93.** Palataan esimerkkiin 1. Miksi

**a)** $a$:n pituisiin sivuihin vaikuttavat voimat ovat i) vastakkaissuuntaiset, ii) akselia vastaan kohtisuorassa,

**b)** (2) pätee,

**c)** (3) pätee?

**94.** Jatkoa. Miksi

**a)** myös $b$:n pituisiin sivuihin vaikuttavilla voimilla on tehtävässä 93a mainitut ominaisuudet,

**b)** $b$:n pituisiin sivuihin vaikuttavien voimien muodostaman voimaparin momentti akselin suhteen on nolla,

**c)** $\mathbf{A}$ on samansuuntainen kuin silmukassa kulkevan virran synnyttämä magneettikenttä silmukan sisällä?

**95.** Jatkoa. Miksi silmukkaan vaikuttava magneettikenttä pyrkii

**a)** levittämään silmukkaa, kun $\phi < 90°$, ja puristamaan sitä kokoon, kun $\phi > 90°$,

**b)** kiertämään silmukkaa niin, että magneettikenttä sen sisäpuolella on mahdollisimman suuri ja ulkopuolella mahdollisimman pieni?

**96.** Muutetaan esimerkkiä 1 niin, että kiertoakseli pysyy $a$:n pituisten sivujen suuntaisena, mutta

**a)** yhdistää $b$:n pituisten sivujen kaksi muuta pistettä kuin keskipisteet,

**b)** on toinen $a$:n pituinen sivu,

**c)** on silmukan ulkopuolella.

Muuttuuko silmukan lopullinen asento, ja jos muuttuu, niin miten?

**97.** Tasossa olevan virtasilmukan *magneettinen momentti*

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A},$$

missä $I$ on silmukassa kulkeva virta ja $\mathbf{A}$ on silmukan pinta-alavektori. Jos silmukka on magneettikentässä, niin mitä merkitsee $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$?

**98.** Suora virtajohdin asetetaan tasaiseen magneettikenttään tukemalla se keskipisteestään, jonka ympäri se voi kääntyä mihin tahansa suuntaan. Mihin asentoon se kääntyy?

**99.** Kuten edellinen tehtävä, mutta kenttään asetetaan **a)** solenoidi, **b)** magneettisauva.

**100.** Osaluvussa 4.2 käsiteltiin sähkövirran synnyttämää magneettikenttää.

**a)** Mitä tämä tarkoittaa yhden liikkuvan varauspisteen muodostaman ”sähkövirran” tapauksessa? Jos siis varauksen $q$ omaava piste $P$ liikkuu nopeudella $\mathbf{v}$ ja $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{r}$, niin mikä on $P$:n synnyttämän magneettikentän magneettivuon tiheys pisteessä $P'$?

**b)** Jos $P'$:lla on varaus $q'$ ja jos tämä piste liikkuu nopeudella $\mathbf{v}'$, niin millä voimalla $P$ vaikuttaa $P'$:uun?

**c)** Miten b-kohdassa mainittujen voimien suunnat eroavat gravitaatiolain ja Coulombin lain mukaisten voimien suunnista?

# 5 Sähködynamiikkaa

Sähkövirta synnyttää Biot'n-Savart'n lain mukaisen magneettikentän. Koska sähkövirta on virrankuljettajien liikettä, voimme myös ajatella, että kunkin virrankuljettajan luoma sähkökenttä liikkuu eli muuttuu ajan mukana, ja että magneettikenttä syntyy siitä. Näin on yleisemminkin ja myös käänteisesti: muuttuva magneettikenttä synnyttää aina sähkökentän ja muuttuva sähkökenttä magneettikentän. Tätä tutkitaan *sähködynamiikassa*, jossa sähkö- ja magneettikentät siis riippuvat ajasta.

## 5.1 Sähkömagneettinen induktio

Tarkastelemme johdinsilmukkaa $\gamma$ magneettikentässä, jonka magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$. Tällöin $\gamma$:n rajaaman pinnan $S$ läpäisee magneettivuo

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}.$$

Se voi riippua ajasta niin, että $\gamma$ muuttuu tai että $\mathbf{B}$ muuttuu jollakin muulla tavalla. *Faradayn*[1]*-Henryn*[2] *induktiolain* mukaan $\gamma$:aan indusoituu silloin lähdejännite

$$E = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Miinusmerkistä näkyy *Lenzin*[3] *laki*, jonka mukaan $E$ ”pyrkii vastustamaan” $\Phi$:n muutosta.

Pinnan $S$ ”positiivinen puoli” eli $S$:n pinta-alavektorin $\mathbf{A}$ suunta voidaan valita kahdella tavalla, mutta valinta ei vaikuta induktiovirran suuntaan, joka saadaan seuraavasti. Valitaan $\mathbf{A}$:n suunta. Sieltä tarkasteltuna virran kiertosuunta on positiivinen, jos $E < 0$, ja negatiivinen, jos $E > 0$. Ks. myös teht. 101.

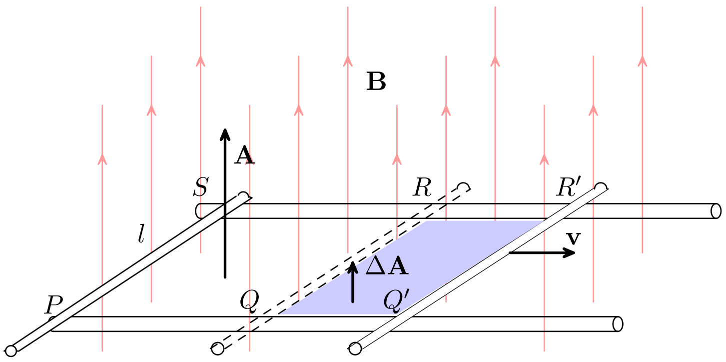
Jos $\mathbf{B}$ on homogeeninen ja $S$ on tasoalue, niin

$$\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

(teht. 102).

[1] Michael Faraday (1791–1867), englantilainen kemisti ja fyysikko.
[2] Joseph Henry (1797–1878), yhdysvaltalainen fyysikko.
[3] Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804–1865), vironsaksalainen fyysikko.

**Esimerkki 1.** Suorakulmion $\gamma_0 = PQRS$ muodostava johdinsilmukka on kohtisuorassa homogeenista magneettikenttää vastaan, jonka magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$. Sivu $QR$ alkaa liikkua nopeudella $\mathbf{v}$ niin, että sen päätepisteet pysyvät puolisuorilla $PQ$ ja $SR$ olevilla kiskoilla, jolloin silmukassa alkaa kulkea induktiovirta. Vektorin $\mathbf{v}$ positiivinen suunta on $PS$:stä poispäin. Määritä induktiovirran **a)** lähdejännite, kun $QR = l$, **b)** kiertosuunta.




Olkoon $\gamma_0$ muuttunut ajan $t$ kuluttua silmukaksi $\gamma = PQ'R'S$. Valitsemme $\mathbf{A}$:n suunnaksi $\mathbf{B}$:n suunnan, jolloin $\Phi = AB$. Oletamme, että $\mathbf{v}$:n suunta on positiivinen eli että $v > 0$. Jätämme tapauksen $v < 0$ harjoitustehtäväksi (teht. 103). Koska $QQ' = RR' = vt$, on $\gamma$:n pinta-ala $A = A_0 + vtl$, missä $A_0$ on $\gamma_0$:n pinta-ala. Siis $\gamma$:n läpäisee magneettivuo

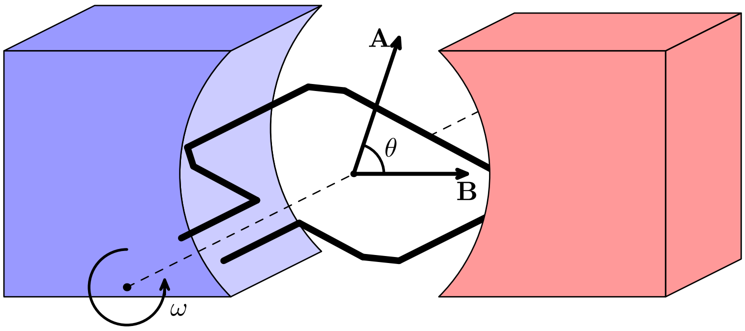
$$\Phi = AB = A_0 B + vtlB.$$

**a)** Faradayn-Henryn lain mukaan lähdejännite

$$E = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -vlB.$$

**b)** Koska $E < 0$, kiertosuunta on $\mathbf{B}$:n positiivisesta suunnasta katsottuna positiivinen.

**Esimerkki 2.** Kiertoakseliin $s$ tuettu tasokäyrän $\gamma$ muodostava johdinsilmukka asetetaan homogeeniseen magneettikenttään, jonka magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$, niin, että $s \perp \mathbf{B}$. Ajanhetkellä $t = 0$ myös $\gamma \perp \mathbf{B}$. Kierretään $\gamma$:aa $s$:n ympäri tasaisella kulmanopeudella $\omega$. Määritä $\gamma$:aan ajanhetkellä $t$ indusoitunut lähdejännite.




Olkoon $\gamma$:n rajoittaman alueen $S$ pinta-alavektori $\mathbf{A}$, ja olkoon $\theta = \angle(\mathbf{B}, \mathbf{A})$. Koska $\theta = \omega t$, $S$:n läpäisee magneettivuo

$$\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = AB\cos\omega t,$$

joten lähdejännite

$$E = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -AB\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega t = AB\omega\sin\omega t.$$

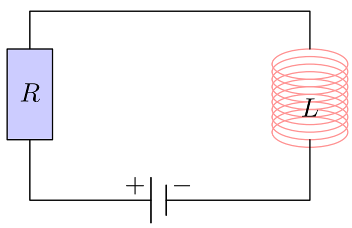
Johdinsilmukassa $\gamma$ kulkeva virta $I$ synnyttää "$\gamma$:n oman magneettikentän", jonka magneettivuon tiheys on Biot'n-Savart'n lain mukaan verrannollinen $I$:hin. Täten myös $\gamma$:n rajaaman alueen läpäisevä "oman kentän" magneettivuo $\Phi$ on verrannollinen $I$:hin. On siis olemassa sellainen vakio $L$, silmukan $\gamma$ *induktanssi*, että

$$\Phi = LI.$$

Magneettivuon $\Phi$ muuttuminen aiheuttaa $\gamma$:ssa *itseinduktion*, joka synnyttää Faradayn-Henryn lain mukaisen lähdejännitteen

$$E = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

**Esimerkki 3** ($RL$-tasavirtapiiri). Vastus, käämi ja virtalähde muodostavat *$RL$-piirin*. Olkoon vastuksen resistanssi $R$ ja käämin induktanssi $L$ sekä virtalähteen lähdejännite vakio $E$. Ajanhetkellä $t = 0$ piiri suljetaan, jolloin siinä alkaa kulkea virta. Esitä virran voimakkuus ajan funktiona.



Olkoon $I = I(t)$ kysytty funktio. Vastus aiheuttaa Ohmin lain mukaan jännitehäviön $RI$ ja käämi Faradayn-Henryn lain mukaan jännitehäviön $L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Täten Kirchhoffin toisen lain perusteella

$$E = RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

eli

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = E - RI$$

alkuehdolla $I(0) = 0$. Menettelemällä kuten osaluvun 3.2 esimerkissä 3 saamme

$$I = \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})$$

(teht. 105).

### Harjoitustehtäviä

**101.** Totea, ettei $S$:n positiivisen puolen valinta vaikuta induktiovirran kiertosuuntaan.

**102.** Tasoalue $S$, jonka pinta-alavektori on $\mathbf{A}$, on homogeenisessa magneettikentässä, jonka magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$.

**a)** Osoita, että $S$:n läpäisee magneettivuo

$$\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

**b)** Mitä tapahtuu, jos $\mathbf{A}$:n suunta vaihdetaan, ja miksi?

**103.** Käsittele esimerkkiä 1 tapauksessa $v < 0$.

**104.** Millä ajanhetkillä esimerkissä 2 laskettu jännite on (itseisarvoltaan) **a)** suurimmillaan, **b)** pienimmillään?

**105.** Ratkaise esimerkissä 3 saatu differentiaaliyhtälö alkuehtoineen.

**106.** (Vrt. teht. 66.) Jatkoa esimerkkiin 3.

**a)** Määritä $\lim_{t\to\infty} I(t)$ ja tulkitse tulos.

**b)** Mikä osa a-kohdan raja-arvosta saavutetaan aikavakion $t = L/R$ kuluttua?

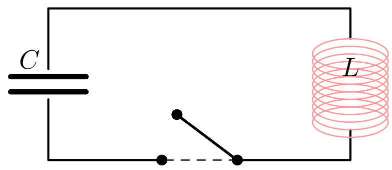
**107.** (Vrt. teht. 46.) Tarkastellaan käämiä, jonka induktanssi on $L$ ja jossa ei alunperin kulje virtaa. Oletetaan käämin resistanssi niin pieneksi, että se voidaan jättää huomiotta.

**a)** Käämiin syötetään virtaa niin, että virran voimakkuudeksi tulee $I$. Mitä voimaa vastaan on tällöin tehtävä työtä?

**b)** Osoita, että tämä työ (eli virtaa kuljettavan käämin energia) on

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

**108.** Käämi ja kondensaattori muodostavat *LC-piirin*. Olkoon käämin induktanssi $L$ ja kondensaattorin kapasitanssi $C$. Oletetaan kondensaattorin resistanssi niin pieneksi, että se voidaan jättää huomiotta. Ajanhetkellä $t = 0$ kondensaattorin varaus on $Q$ eikä piirissä kulje virtaa.




**a)** Olkoon $q = q(t)$ kondensaattorin varaus ja $i = i(t)$ piirissä kulkevan virran voimakkuus ajanhetkellä $t$. Osoita, että

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0.$$

**b)** Edelleen osoita, että

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

alkuehdoilla

$$q(0) = Q, \quad q'(0) = 0.$$

**c)** Vertaa tätä differentiaaliyhtälöä harmonisen liikkeen liikeyhtälöön [4, s. 42].

**d)** Osoita, että

$$q = Q\cos\omega t,$$

missä

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

**109.** Umpinainen käyrä $\gamma$ on sähkökentässä, jonka voimakkuus on $\mathbf{E}$.

**a)** Jos kenttä on konservatiivinen, niin miksi

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0?$$

**b)** Jos kenttä riippuu ajasta, niin miksi se synnyttää johdinsilmukkaan $\gamma$ lähdejännitteen

$$\mathcal{E} = \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}?$$

**c)** Totea, että Faradayn-Henryn laki voidaan esittää muodossa

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A},$$

missä $S$ on $\gamma$:n rajaama pinta. Tämä on *Maxwellin neljäs laki.*

**d)** Mikä olennainen ero on staattisen sähkökentän ja muuttuvan magneettikentän synnyttämän sähkökentän kenttäkäyrillä?

**110.** Johdin, jossa kulkevan sähkövirran tiheys on $\mathbf{J}$, synnyttää magneettikentän, jonka magneettivuon tiheys on $\mathbf{B}$. Johdinta ympäröi umpinainen käyrä $\gamma$, joka rajaa pinnan $S$.

**a)** Totea, että Ampéren virtalaki yleistyy muotoon

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}.$$

**b)** Olkoon tämä johdin muuttuvassa sähkökentässä, jonka kenttävoimakkuus on $\mathbf{E}$. Silloin

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}.$$

Tämä on *Maxwellin kolmas laki* eli *Ampèren-Maxwellin laki.* Jos $\int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0$ (tulkitse tämä), niin Maxwellin kolmannen ja neljännen lain välillä vallitsee tietty symmetria. Millainen?

## 5.2 Vaihtovirtapiirit

*Vaihtovirtapiirissä* virtalähteen jännite riippuu ajasta yhtälön $u(t) = U\cos\omega t$ mukaisesti, missä $U$ on jännitteen *huippuarvo* ja $\omega$ on *kulmataajuus.*

*R-piirin* muodostavat virtalähde ja vastus, jonka resistanssi on $R$. Jos piirissä kulkee virta $i = i(t)$, niin Ohmin lain mukaan

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U}{R}\cos\omega t = I\cos\omega t,$$

missä $I = U/R$ on virran huippuarvo. Täten virta ja ja jännite ovat *samassa vaiheessa.*

*C-piiri* koostuu virtalähteestä ja kondensaattorista, jonka kapasitanssi on $C$ ja resistanssi niin pieni, että se voidaan jättää huomiotta. Jos kondensaattorin varaus on $q = q(t)$, niin kapasitanssin määritelmän mukaan

$$q = Cu = CU\cos\omega t,$$

joten piirissä kulkee virta

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega CU\sin\omega t$$

(ks. kuitenkin teht. 112). Virran huippuarvo $I = \omega CU$. Koska

$$-\sin\omega t = \cos\left(\omega t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

(miksi?), virran ja jännitteen *vaihe-ero* on $\frac{\pi}{2}$; virta on tämän verran jännitettä edellä.

*L-piiri* muodostuu virtalähteestä ja käämistä, jonka induktanssi on $L$ ja resistanssi niin pieni, että se voidaan jättää huomiotta. Jos piirissä kulkee virta $i = i(t)$, niin käämissä tapahtuu itseinduktion aiheuttama jännitehäviö $L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. Kirchhoffin toisen lain perusteella

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U\cos\omega t,$$

josta

$$i = \frac{U}{L}\int\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{U}{\omega L}\sin\omega t + k, \tag{1}$$

Integroimisvakio $k = 0$ (teht. 113), joten

$$i = \frac{U}{\omega L}\sin\omega t.$$

Virran huippuarvo $I = U/(\omega L)$. Koska

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

(miksi?), virran ja jännitteen vaihe-ero on $-\frac{\pi}{2}$. Siis virta on $\frac{\pi}{2}$:n verran jäljessä jännitteestä.

*RL-piirissä* (jonka siis muodostavat virtalähde sekä vastus ja käämi sarjaan kytkettyinä) pätee differentiaaliyhtälö

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U\cos\omega t$$

eli

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{U}{L}\cos\omega t$$

(osaluku 5.1, esim. 3). Sen integroiva tekijä [4, s. 4] on $\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}$, jolla kertomalla saamme

$$\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}i = \frac{U}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t$$

eli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}i\Big) = \frac{U}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t.$$

Koska (teht. 114)

$$\frac{U}{L}\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{UL}{R^2+(\omega L)^2}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\Big(\frac{R}{L}\cos\omega t + \omega\sin\omega t\Big) + k,$$

missä $k$ on integroimisvakio, on

$$i = \frac{UL}{R^2+(\omega L)^2}\Big(\frac{R}{L}\cos\omega t + \omega\sin\omega t\Big) + k\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}. \tag{2}$$

Mutta $k = 0$ (teht. 113), joten

$$i = \frac{UL}{R^2+(\omega L)^2}\Big(\frac{R}{L}\cos\omega t + \omega\sin\omega t\Big).$$

Määritämme virran huippuarvon sekä virran ja jännitteen vaihe-eron. Olkoon $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ja

$$\tan\delta = \frac{\omega L}{R}.$$

Tällöin

$$\cos\delta = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}, \quad \sin\delta = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \tag{3}$$

(teht. 115), joten

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \Big( \frac{R}{L} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \Big) =$$

$$\frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \Big( \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos \omega t + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin \omega t \Big) =$$

$$\frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos (\omega t - \delta).$$

Siis virran huippuarvo

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Virran ja jännitteen vaihe-ero on $-\delta$, joten virta on $\delta$:n verran jäljessä jännitteestä.

*RC-piirissä* on

$$R \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} q = U \cos \omega t \tag{4}$$

(osaluku 3.2, esim. 3). Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$q = \frac{URC^2}{(\omega RC)^2 + 1} \Big( \frac{1}{RC} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \Big) + k\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC} t} \tag{5}$$

(teht. 116). Taaskin integroimisvakio $k = 0$ (teht. 113), joten

$$q = \frac{URC^2}{(\omega RC)^2 + 1} \Big( \frac{1}{RC} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \Big)$$

ja edelleen

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega URC^2}{(\omega RC)^2 + 1} \Big( -\frac{1}{RC} \sin \omega t + \omega \cos \omega t \Big). \tag{6}$$

Olkoon nyt $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ja

$$\tan \delta = \frac{1}{\omega RC},$$

jolloin

$$\cos \delta = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}, \quad \sin \delta = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} \tag{7}$$

(teht. 115). Näin ollen

$$i = \frac{\omega UC}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} \frac{RC}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} \Big( -\frac{1}{RC} \sin \omega t + \omega \cos \omega t \Big) =$$
$$\frac{\omega UC}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} \Big( -\frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} \sin \omega t + \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} \cos \omega t \Big) =$$
$$\frac{\omega UC}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} (-\sin \omega t \sin \delta + \cos \omega t \cos \delta) = \frac{\omega UC}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} \cos(\omega t + \delta).$$

Siis virran huippuarvo

$$I = \frac{\omega UC}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}.$$

Virran ja jännitteen vaihe-ero on $\delta$, joten virta on $\delta$:n verran edellä jännitteestä.

### Harjoitustehtäviä

**111.** Vaihtovirtapiirin lähdejännitteen riippuvuus ajasta määritellään usein yhtälön $u = U \cos \omega t$ sijasta yhtälöllä $u = U \sin \omega t$.

**a)** Totea, että nämä määritelmät ovat asiallisesti samat.

**b)** Miten toisesta määritelmästä saadaan toinen?

**112.** Tarkastellaan sellaista vaihtovirtapiiriä, jossa on kondensaattori.

**a)** Miksi virta ei oikeasti kulje kondensaattorin läpi?

**b)** Miksi voidaan kuitenkin ajatella, että näin tapahtuu?

**113.** Miksi $i$:n lausekkeissa (1) ja (2) sekä $q$:n lausekkeessa (5) integroimisvakio $k = 0$?

**114.** **a)** Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Määritä

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x.$$

**b)** Tuloksen perusteella totea oikeaksi $i$:n lauseke (2).

**115.** Totea oikeiksi $\cos \delta$:n ja $\sin \delta$:n lausekkeet (3) ja (7).

**116.** Ratkaise $RC$-piirin differentiaaliyhtälö (4).

**117.** Saadaanko $RL$-piirin $i$:n lausekkeesta (2) $i$:n lauseke

**a)** $R$-piirissä asettamalla $L = 0$,

**b)** $L$-piirissä asettamalla $R = 0$?

**118.** Saadaanko $RC$-piirin $i$:n lausekkeesta (6) vastaavasti $i$:n lausekkeet $R$- ja $C$-piireissä?

**119.** **a)** Totea (teht. 108), että $LC$-piirissä kulkee vaihtovirta, vaikka virtalähdettä ei olisikaan (kunhan kondensaattori on alunperin varattu).

**b)** Olkoon tässä piirissä virtalähde, jonka jännite $u = U \cos \omega t$ on *resonanssissa* piirin kanssa eli

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Ajanhetkellä $t = 0$ kondensaattorin varaus on $Q$ eikä piirissä kulje virtaa. Muodosta se differentiaaliyhtälö alkuehtoineen, jonka kondensaattorin varaus $q = q(t)$ toteuttaa.

**c)** Osoita, että

$$q = \frac{U}{2\omega} t \sin \omega t + Q \cos \omega t$$

toteuttaa sen.

**d)** Mitä tapahtuu, kun $t \to \infty$? Tulkitse tämä tulos.

**120.** Tarkastellaan sellaista $RCL$-piiriä, jossa ei ole muuta virtalähdettä kuin varattu kondensaattori.

**a)** Muodosta se differentiaaliyhtälö, jonka kondensaattorin varaus $q = q(t)$ toteuttaa.

**b)** Todista: Jos $R^2C < 4L$, niin

$$q = A\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t + \delta\right)$$

toteuttaa sen. Tässä $A$ ja $\delta$ ovat vakioita.

**c)** Tulkitse nämä vakiot.

**d)** Määritä $\lim_{t\to\infty} q(t)$ ja tulkitse tulos.

**e)** Vertaa tapausta $R = 0$ tehtävään 108.

**f)** Mitä voidaan sanoa tapauksista $L = 0$ ja $C = 0$?

# Lähdeluettelo


[1] E. Eloranta, *Geofysiikan kenttäteoria.* Säteilyturvakeskus, 2007.

[2] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, T. Laurinolli ja T. Sankilampi, *Matematiikan taito 10: Integraalilaskentaa.* WSOY, 2006.

[3] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, T. Laurinolli ja T. Sankilampi, *Matematiikan taito 13: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* WSOY, 2008.

[4] M. Halmetoja ja J. Merikoski, Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1. Mekaniikkaa. Matematiikkalehti Solmu, 2009. `http://solmu.math.helsinki.fi`

[5] P. Kattainen, *Fysiikan oppikirja lukioluokille II.* 6. p. Otava, 1967.

[6] K. Kurki-Suonio, M. Kervinen ja R. Korpela, *Kvantti 2. Fysiikan laaja oppimäärä.* Weilin+Göös, 1991.

[7] K. Kurki-Suonio, M. Kervinen ja R. Korpela, *Kvantti 3a. Fysiikan laaja oppimäärä.* Weilin+Göös, 1990.

[8] O. Lehto, Differentiaali- ja integraalilaskenta II. 3. p. Limes ry, 1990.

[9] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset II. Kahden tai useamman muuttujan funktiot.* 2. lyh. p. Filmiyhtymä, 1959.

[10] M. Mansfield and C. O'Sullivan, *Understanding Physics.* Wiley, 2008. (Corrected reprint of the 1998 original.)

[11] L. Myrberg, *Differentiaali- ja integraalilaskenta korkeakouluja varten, osa 1.* 7. p. Kirjayhtymä, 1999.

[12] P. J. Myrberg, *Differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirja.* 4. p. Otava, 1961.

[13] K. Väisälä, *Vektorianalyysi.* 3. p. WSOY, 1961.

[14] H. D. Young and R. A. Freedman, *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics.* Thirteenth Edition. Pearson, 2012.

# Tuloksia ja ohjeita

**3. a)** $\frac{7}{12}$. **b)** $\frac{43}{60}$.

**6. a)** $\int_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}+\mathbf{k}} (y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$.

**b)** $1 - \frac{\pi}{2}$.

**9. a)** 0. **b)** $-2\pi$.

**10. a)** Ehtoa (4) vastaa

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

**15. a)** $\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b(1-\frac{x}{a})} c\Big(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

**b)** $\frac{1}{6}abc$.

**16.** $\frac{8}{9}R^3$. Ks. [12, s. 292–293].

**17.** $4(\frac{\pi}{2} - 1)R^2$. Ks. [13, s. 51–52].

**18. a)** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

**19.** $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$.

**20. b)** Totea, että

$$\int_{C_m} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}A < \int_{S_m} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}A < \int_{C_{m\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}A.$$

Miten jatkat?

**c)** $I^2 = \pi$.

**d)** Sijoita $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ ja käytä c-kohdan tulosta.

**22. b)** ii) $Q = q_1 + \cdots + q_n$.

**30. a)** Käytä Gaussin sähkölakia (teht. 29c) integroimalla $O$-keskisen $r$-säteisen pallopinnan $S$ yli. Symmetriasyistä $\mathbf{E}$ ja $\mathrm{d}\mathbf{A}$ ovat samansuuntaiset, joten

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \oint_S E\,\mathrm{d}A = 4\pi r^2 E.$$

**c)** i) Varaus siirtyy $K$:n pinnalle, joten varaustiheydeksi täytyy ottaa $\sigma = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}A$. ii) $K$:n ulkopuolella

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon r^2}\mathbf{e}$$

ja sisäpuolella $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

**35. a)** $qe(x - x_0)$.

**b)** $qe(x_0 - x)$.

**c,d)** $e(x_0 - x)$.

**39. a)** $U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}$.

**b)** $K$:n ulkopuolella

$$U = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon r}$$

ja sisäpuolella

$$U = \frac{Q}{8\pi\varepsilon R^3}(3R^2 - r^2) = \frac{\rho}{6\varepsilon}(3R^2 - r^2).$$

**c)** $K$:n ulkopuolella

$$U = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon r}$$

ja sisäpuolella

$$U = \frac{\sigma R}{\varepsilon}.$$

**46. b)** Määritä aluksi se ”työalkio” $\mathrm{d}W$, joka tarvitaan kondensaattorin varauksen kasvattamiseksi $\mathrm{d}q$:lla.

**47. c)** $C = C_1 + \cdots + C_n$.

**48. c)** $C = (C_1^{-1} + \cdots + C_n^{-1})^{-1}$.

**49.** $C = 4\pi\varepsilon \dfrac{ab}{b - a}$.

Olkoon kondensaattorin ulomman levyn varaus $Q(>0)$ ja sisemmän $-Q$. Osoita aluksi, että levyjen välinen jännite

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\Big).$$

Miten jatkat?

**56.** **b)** i) $U = U_1 + \cdots + U_n$, ii) $R = R_1 + \cdots + R_n$.

**57.** **c)** $R = (R_1^{-1} + \cdots + R_n^{-1})^{-1}$.

**58**. **a**, **b**) $\dfrac{b^2}{a^2}$.

**60.** Tarkastele aluksi sellaista **i**:n suuntaista ”johdinalkiota”, jonka poikkipinta-ala on $\mathrm{d}A$ ja pituus $\mathrm{d}x$. Osoita, että siinä syntyy jännitehäviö $\mathrm{d}V = \rho J \mathrm{d}x$. Miten jatkat?

**66**. **a**) $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = EC$.

**b**) $\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

**67.** Johda differentiaaliyhtälö

$$\frac{q}{C} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0$$

(millä alkuehdolla?) ja ratkaise se.

**68**. **a**) $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = 0$.

**b**) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

**69.** $\frac{5}{6}R$. Olkoon virtalähteen $L$ positiivinen napa kytketty kärkeen $P$ ja negatiivinen vastakkaiseen kärkeen $Q$. Olkoon $L$:n lähdejännite $E$ sekä $L$:stä lähtevän ja sinne tulevan virran voimakkuus $x$. Symmetriasyistä $P$:stä alkavissa sivuissa ja $Q$:hun päättyvissä sivuissa kulkee yhtä voimakas virta; olkoon se $y$. Samoin muissa sivuissa kulkee yhtä voimakas virta; olkoon se $z$. Kirchhoffin ensimmäisen lain perusteella (miten?) saat $x$:n, $y$:n ja $z$:n suhteet. Sitten saat niiden arvot Kirchhoffin toisen lain perusteella (miten?). Miten jatkat?

**72.** $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

**73.** $F = 2\pi IB$.

**83.** **a)** ii) $\mathbf{F} = I_2\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1$.

**84.** Jokainen ”differentiaali” d$\mathbf{B}$ on vektorin $\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{r}}$ suuntainen (miksi?), joten sama koskee $\mathbf{B}$:tä. Sijoita johdin $x$-akselille niin, että $P$ tulee $y$-akselille, jolloin $P = (0, r)$. Tarkastele pisteessä $Q = (x, 0)$ olevaa ”johdinalkiota” $\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}x\,\mathbf{i}$, jolloin $QP = \sqrt{x^2 + r^2}$. Nyt

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{cI}{2}\frac{r\,\mathrm{d}x}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{k}$$

(miksi?). Integraali

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} + \text{vakio}.$$

(Se voidaan määrittää symbolilaskentaan pystyvällä matemaattisella ohjelmistolla ja löytyy taulukkokirjasta, mutta miten se saadaan ilman apuvälineitä?) Miten jatkat?

**85.** **a)** Sijoita sauva $x$-akselille, jolloin kysytään kenttää pisteessä $P = (0, r)$. Tarkastele aluksi pisteessä $Q = (x, 0)$ olevan ”varausalkion” $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$ synnyttämää kenttää $P$:ssä.

**88. b)** $B = \dfrac{n\mu I}{2r}$.

**89.** $\mathbf{B} = \dfrac{\mu I R^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{k}$,

kun koordinatisto on valittu kuten esimerkissä 1. Kysytään $\mathbf{B}$:tä pisteessä $P = (0, 0, d)$. Esitä aluksi johtimen tietyn pisteen synnyttämä d$\mathbf{B}$ kahden komponentin summana, joista toinen on $\mathbf{k}$:n suuntainen ja toinen sitä vastaan kohtisuora.

**92. b)** $R = \dfrac{mv}{|q|B}$.

**100. a)** $\mathbf{B} = \dfrac{c}{2}\dfrac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$.

**b)** $\mathbf{F} = \dfrac{cqq'}{2r^2}\mathbf{v}' \times (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}})$.

**104. a)** $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{2\omega}$.

**b)** $t = \dfrac{n\pi}{\omega}$.

**106. a)** $\lim_{t\to\infty} I(t) = \dfrac{E}{R}$.

**b)** $\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

**107. b)** Määritä aluksi se ”työalkio”, joka tarvitaan virran voimakkuuden kasvattamiseksi $\mathrm{d}I$:llä.

**114. a)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$.

**116.** $RL$-piirin differentiaaliyhtälö on samantyyppinen. Voit käyttää hyväksi sen ratkaisua.

**119. a)** $\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 q = U\cos\omega t, \quad q(0) = Q,\ q'(0) = 0$.

**d)** $q$ heilahtelee rajattomasti.

**120. a)** $\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}q = 0$.

**d)** $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$.

# Asiahakemisto

**v**



**w**

# Henkilöhakemisto