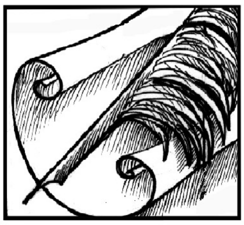

Pitkän matematiikan alkajaisiksi

Pääkirjoitus

Monet lukionsa juuri aloittaneista pitkän matematiikan opiskelijoista miettinevät parast'aikaa omia mahdollisuuksiaan menestyä valintansa kanssa. Tosiasia nimittäin on, että kaikki pitkällä matematiikalla aloittavat eivät suorita sitä loppuun. Syitä keskeyttämiseen voi olla monia. Jos matematiikka ei kertakaikkiaan kiinnosta ja valinta on suoritettu jonkinasteisen painostuksen alaisena, niin vaihto saattaa olla perusteltua. Liian heppoisin perustein sitä ei kuitenkaan pidä tehdä. Lukion alku on kevyehkön peruskoulun jälkeen monelle aikamoinen shokki. Vaatimukset ovat kovempia ja arvostelu ankarampaa, joten numerot pyrkivät alussa tippumaan lähes kaikissa aineissa. Tätä ei kuitenkaan pidä liikaa säikähtää vaan työhön on asennoiduttava uudella tavalla. Tärkeää on oppia kullekin aineelle ominaiset tehokkaat opiskelutavat. Matematiikassa se onneksi on helppoa, sillä aina voi tukeutua oppiaineen omaan loogiseen rakenteeseen. Matematiikka nimittäin rakentuu hyvin yksinkertaisille perusperiaatteille, joista lähtien johdetaan uusia tuloksia niin, että kaikki osavaiheet ovat ymmärrettäviä. Valitettavasti tämä on nykyisien muotivirtauksien mukaan rakennetuissa oppimateriaaleissa osin onnistuttu häivyttämään ns. ”käytännön sovellusten” alle. Tällöin varsinkin peruskoulussa matematiikka näyttäytyy oppilaalle sekavana kikka- ja kaavakokoelmana, josta poimitaan aina kulloisessakin sovelluksessa mahdollisesti tarvittava työkalu. Jos sama käytäntö jatkuu vielä lukiossakin, niin matematiikan opiskelu muuttuu kaavakirjan selaamiseksi ja oma ajattelu jää kehittymättä.

Loogisesti etenevässä matematiikan oppimisessa lähdetään perusteista ja kulloinkin valmiiksi saatu kokonaisuus toimii samalla tavalla kuin vuorikiipeilijän rinteestä löytämä tasanne: sille voi pysähtyä lepäämään ja pohtimaan korkeammalle johtavia reittejä. Matematiikassa pysähdytään harjoittelemaan opittuun asiaan liittyvää laskutekniikkaa ja miettimään mahdollisia sovelluksia. Tärkeimmät löytyvät useimmiten matematiikan sisältä, sillä kunnolla opitun asian voi miltei poikkeuksetta aina laajentaa jollakin tavalla yleisemmäksi. Samalla opitun matematiikan määrä kasvaa ja laatu paranee, ja mitä suurempia kokonaisuuksia hallitsee, sitä parempia arkielämän sovelluksiakin pystyy käsittelemään.

Edellä sanotun havainnollistamiseksi katsotaan esimerkki oppimäärän alkupäästä. Pitkä matematiikka alkaa yleensä kahdella algebrallisella kurssilla, joilla opitaan jatkossa tarvittava lausekkeiden, yhtälöiden ja epäyhtälöiden käsittely. Lähtökohtana ovat peruskoulussa opitut reaalilukujen järjestykseen ja laskutoimituksiin liittyvät laskulait, kuten yhteen- ja kertolaskun vaihdanta- ja liitäntälait, osittelulaki, kertolaskun merkkisäännöt ja tulon nollasääntö. Binomikaavojakin

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

tarvitaan, ja ne todistuvat osittelulain ja tulon vaihdantalain avulla. Toivottavasti ne ja neliöjuuri ovat jo peruskoulusta tuttuja. Siellä lienee myös opittu, että jos $a \geq 0$, niin yhtälön $x^2 = a$ ratkaisut ovat $x = \pm\sqrt{a}$. Mutta miksi tällä yhtälöllä ei ole muita ratkaisuja? Perusteluksi ei riitä opettajan antama ilmoitus. Asia on selvitettävä yllämainittuihin laskulakeihin tukeutuen. Tiedetään, että $a = \sqrt{a}^2$, joten tarkasteltava yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0,$$

ja edelleen

$$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0. \tag{1}$$

Tulon nollasääntöä soveltaen (1) hajoaa kahdeksi ensimmäisen asteen yhtälöksi, joilla kummallakin on yksikäsitteisesti määrätty ratkaisu. Kovin merkillisiin arkipäivän sovelluksiin ei tällä tuloksella päästä, mutta samaa ajatusta voidaan soveltaa yleisempään yhtälöön

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0). \tag{2}$$

Hieman manipuloimalla, mm. $4a$:lla kertomalla, saadaan (2):n kanssa yhtäpitävästi

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Jos $d = b^2 - 4ac \geq 0$, niin viimeksi saatu yhtälö voidaan binomikaavoja soveltaen kirjoittaa muotoon

$$(2ax + b)^2 - \sqrt{d}^2 = 0,$$

ja edelleen

$$\big(2ax + b + \sqrt{d}\big)\big(2ax + b - \sqrt{d}\big) = 0.$$

Alkuperäinen yhtälö hajoaa tässäkin tapauksessa kahdeksi ensimmäisen asteen yhtälöksi, joiden perusteella saadaan toisen asteen yhtälön yleinen ratkaisukaava. Se on luonnollisesti osattava ulkoa ja sen johtaminen on käytävä läpi vaihe vaiheelta itsenäisesti, sillä muuten ei hallitse pitkän matematiikan kahden ensimmäisen kurssin olennaisinta sisältöä. Myöhemmin vastaan tulevia yhtälöitä voi ratkaista laskimellakin, mutta sen käyttö ilman että käsittää mitä on tekemässä näivettää aivotoiminnot ainakin matematiikan osalta.

Muinaisen Mesopotamian matemaatikot keksivät toisen asteen yhtälön ratkaisun noin 4000 vuotta sitten. Heidän mielenkiintonsa rajoittui vain yhtälön positiivisiin ratkaisuihin. Heillä ei ollut käytössään meidän helppoa algebrallista merkintätapaamme, vaan he ratkaisivat ongelman melkoista neroutta osoittaen geometrisen päättelyn kautta kirjaten tuloksensa verbaalisesti nuolenpääkirjoituksella savitauluihin. Matematiikassa jos missä on kunnioitettava menneiden sukupolvien saavutuksia sillä ne ovat ikuisesti kestäviä. Ja niitähän ei voi kunnioittaa ellei niitä ymmärrä!

Tehtävien ratkaiseminen on olennainen osa koulumatematiikkaa. Ylioppilaskokeessakin osaaminen mitataan tehtäväsarjan avulla. Sillä on oma arvonsa valtakunnallisena mittarina, mutta opiskeluvaiheessa siihen ei kannata liikaa tuijottaa. Opiskelu saattaa vinoutua, jos tähtäimessä on yksinomaan siinä menestyminen. Lukion kurssit on syytä opiskella mahdollisimman perusteellisesti päättökoetta miettimättä; kun osaa asiat, on menestys kaikenlaisissa kokeissa taattu. Tavanomaisten kotitehtävien kautta on tarkoitus saavuttaa välttämätön laskemisen ja todistamisen rutiini. Siihen vaadittava tehtävämäärä lienee yksilöllinen, mutta jokaisen, joka aikoo oppimäärän suorittaa kunnolla, on se hankittava. Pelkillä rutiinitehtävillä ei kuitenkaan tavoiteta sellaista kypsyyttä, jota yliopistossa opiskelun aloittaminen edellyttää. Siksi olisi käytettävä aikaa myös omatoimiseen harjoitteluun ja pohtimiseen. Tällöin tehtävät kannattaa valita huolella oman tasonsa mukaisiksi. Liian helpoista ei ole hyötyä ja liian vaikeista tulee stressi. Täytyy muistaa, että tehtävän vaikeus on suhteellinen käsite. Sama kysymys avautuu toiselle helposti ja toiselle ei ehkä koskaan. On myös olemassa satojakin vuosia tunnettuja matemaattisia ongelmia, joita kukaan ei toistaiseksi ole kyennyt ratkaisemaan. Ei siis kannata pahoittaa mieltään, jos tehtävä ei ratkea parin tunnin ankaran miettimisen jälkeen. Kokemus osoittaa, että ongelma, jota on keskittyneesti mietitty tunteja, joskus jopa päiviä, saattaa ratketa yllättäen jossakin aivan odottamattomassa yhteydessä. Jos siis tehtävä ei ratkea kohtuullisessa ajassa, niin unohda se toistaiseksi ja suorita helpompia tehtäviä. Ratkaisemattomaan kysymykseen voi aina palata myöhemmin.

Miten lähestytään tehtävää, joka aluksi vaikuttaa vaikealta tai jopa mahdottomalta? Tämäkin on varsin yksilökohtaista, mutta muutamia yleisiä strategioita kannattaa pitää mielessä. Aluksi voi muistella, onko aikaisemmin ratkaissut samantyyppisen helpomman kysymyksen, tai voisiko ratkaisua yrittää jossakin erikoistapauksessa. Kokemukset vastaavista tilanteista saattavat johtaa yleisen ratkaisun jäljille. Voi myös miettiä, missä yhteyksissä tehtävässä käytetyt käsitteet ovat muulloin esiintyneet. Voisiko annetuista tiedoista jonkin kiertotien kautta päästä ratkaisuun. Jos tehtävän lähtötiedoilla ei näyttäisi olevan juuri mitään tekemistä maalina olevan tuloksen kanssa, niin kannattaa ehkä ajatella takaperin: mitä olisi tunnettava, jotta kysytyn asian voisi ratkaista? Riittävätkö tehtävässä annetut tiedot näiden tarpeellisten esitietojen selvillesaamiseen. Kun yleinen ratkaisu on löydetty, kannattaa varmistaa, että se toimii myös erikoistapauksissa; tämä tavallaan takaa ratkaisun oikeellisuuden. Ratkaisu kannattaa myös analysoida kohta kohdalta kriittisesti ja miettiä, voisiko jonkin osan tehdä yksinkertaisemmin. Hyvästä tehtävästä kannattaa lopuksi myös laatia uusia muunnelmia ystäviensä iloksi!

Mistä löytää hyviä tehtäviä? Oppikirjoissa yleensä on vaativiakin kysymyksiä, eikä niitä kaikkia ehditä käsitellä oppitunneilla. Jos niistä ei löydy riittävästi haastetta, niin esimerkiksi Solmun alasivulla `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/` on hyviä teoriapaketteja sekä valmennustehtäväsarjoja. Niihin uppoutumalla matematiikka muuttuu huomaamatta harrastukseksi, mistä on suuri etu kaikissa matemaattisluonnontieteellisissä ja teknillisissä jatko-opinnoissa sekä myöhemmin työelämässä.

Markku Halmetoja