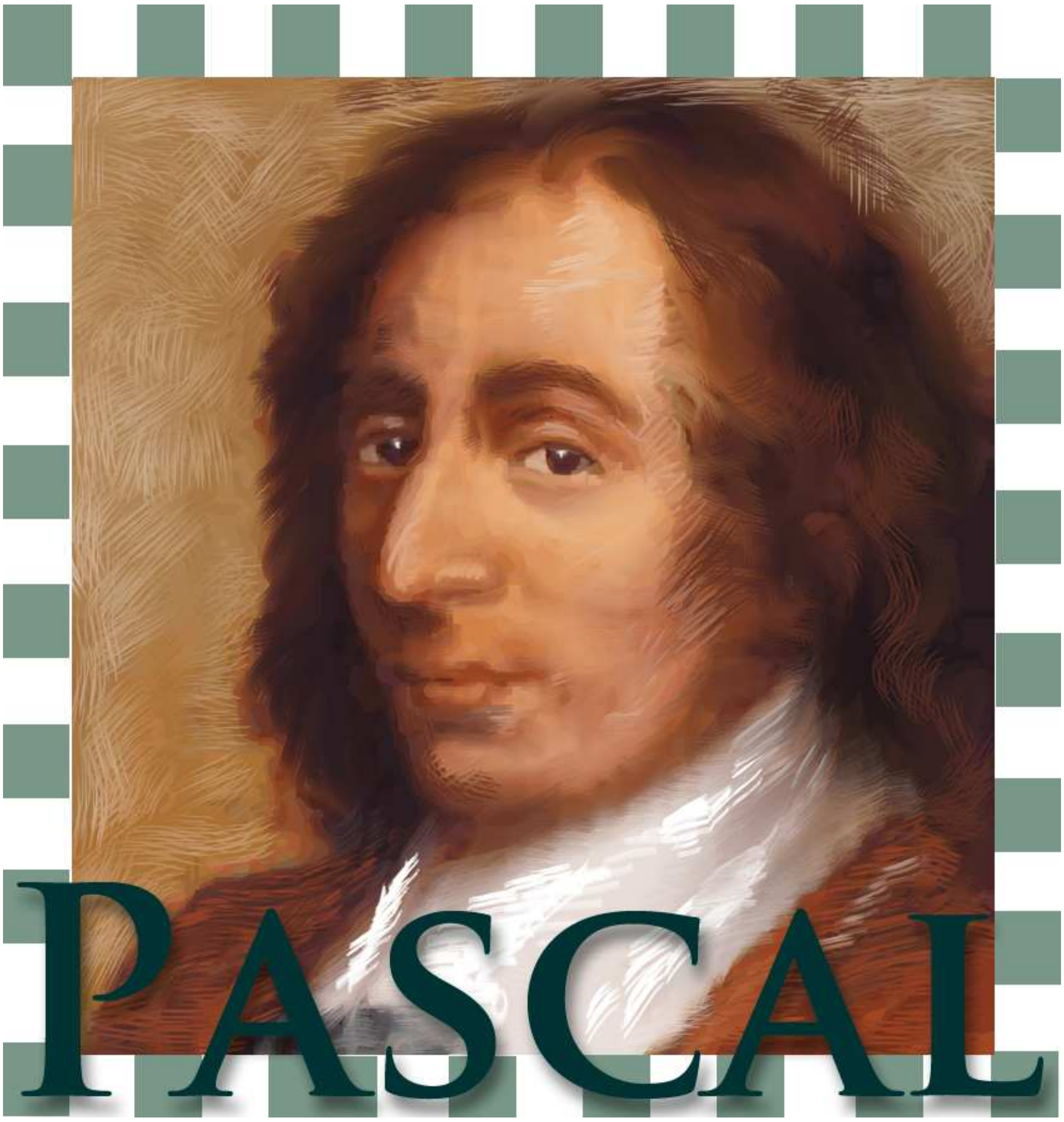
Solmu

Matematiikkalehti
2/2012

http://solmu.math.helsinki.fi



Solmu 2/2012

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi

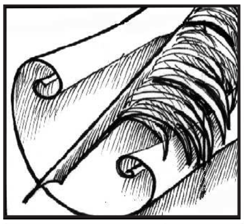
Numeroon 3/2012 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 3.9.2012 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus: Perusopetuksen tuntijakoesityksesta (Markku Halmetoja) 4
Väitteitä matematiikan opetuksesta ja vastauksia niihin (Tuomas Korppi) 6
Vedonlyönnin matematiikkaa (Jukka Liukkonen) 10
Piin ja taun päivät (Niklas Hietala) 13
Määrätyn integraalin opettamisesta likiarvotarkasteluin (Kyösti Tarvainen) 14
Miten integroitiin, kun ei vielä osattu integroida? (Matti Lehtinen) 18
Pääsiäinen on aina sunnuntaina (Kimmo Vehkalahti) 22
Yhtenäisyydestä (Tuomas Korppi) 29
Pythagoraan lause vektoreilla (Markku Halmetoja) 34



Perusopetuksen tuntijakoesityksestä

Matematiikan tuntimäärää ei sentään vähennetä

Perusopetuksen tuntijakoa miettinyt työryhmä on julkaissut raporttinsa [1] ja asia viedään päätökseen kuluvan kevään aikana. Sisältökysymykset ratkaistaan myöhemmin opetussuunnitelmien tekemisen yhteydessä, mutta matematiikan asemaa tulevassa peruskoulussa voi arvioida jo annetun esityksen pohjalta. Työryhmä lienee ollut tietoinen LUMA-raportissa [2, s. 16] todetusta matematiikan tuntimäärän pienuudesta. Suomen peruskoulussa matematiikan opiskeluun käytetään keskimäärin 2,6 viikkotuntia, kun eurooppalainen keskiarvo on 4,3 tuntia. Tästä huolimatta oppituntimäärä on esityksessä ennallaan. Onneksi työryhmä kuitenkin toteaa, että ”perusopetuksessa matematiikkaan varattua vähimmäistuntimäärää ei tulisi laskea.”

Eriyttäminen on välttämätöntä

Suomalaisesta peruskoulujärjestelmästä pyritään eräiden lehtitietojen mukaan tekemään uusi vientituote. Sen markkinointi edellyttää menestymistä PISA-testeissä, mikä luo painetta laatia opetussuunnitelmat niitä silmälläpitäen. Tällöin on vaarana, että jatko-opinnoissa tarvittavat *todelliset* valmiudet unohtuvat lopullisesti. PISA-matematiikka on pääasiassa matematiikan lukutaitoa, mikä tarkoittaa suuruusluokkien arviointia, graafisten esitysten tulkintaa ja erilaisten laskentamallien antamien tulosten tarkastelua. Tämä tärkeä kansalaistaito ei kuitenkaan riitä matematiikkaa syvällisemmin edellyttäviin jatko-opintoihin, missä oleellisinta on se, mistä tuntijakotyöryhmä raportissaan toteaa: ”Algebran ja geometrian osaamisen on sen sijaan todettu olevan heikkoa.” Työryhmä ei ilmeisesti ole kuitenkaan *ymmärtänyt* kirjoittamaansa lausetta, sillä esityksestä puuttuu edellisen vaalikauden viime hetken poliittisissa myrskyissä kaatuneen tuntijakoesityksen sisältämä mahdollisuus pariin eriyttävään matematiikan kurssiin, joilla nimenomaan voitaisiin opiskella puuttuvia algebran ja geometrian taitoja. Toivottavasti päättäjillä on riittävästi kaukonäköisyyttä ja asiantuntemusta eriyttämismahdollisuuden palauttamiseen, sillä siinä on kyseessä loppujen lopuksi korkeakoulujemme taso ja työpaikkojen säilyminen kotimaassa, kuten mm. LUMA-sanomissa käydyissä keskusteluissa on moneen kertaan todettu.

Matematiikkakin on taidetta

Tuntijakotyöryhmän raportissa esitetään taito- ja taideaineiden aseman parantamista. Valitettavasti ei yleisesti ymmärretä, että matematiikkakin kuuluu tähän aineryhmään. Miksi matematiikka on myös taidetta? Siksi, että monet matemaattiset totuudet ovat hyvin kauniita ja niiden löytäminen edellyttää luovaa ajattelua. Luovuuteen päästään parhaimmillaan jo peruskoulun matematiikassa, sillä miltei poikkeuksetta keskimääräistä vaativammille harjoitustehtäville löytyy useita toisistaan poikkeavia ratkaisutapoja. Mutta voi-

Pääkirjoitus

daanko koulumatematiikassa päästä näkemään *todella kauniita* matematiikan tuloksia? Kyllä; seuraavassa muutama esimerkki.

Kertotaulua opeteltaessa havaitaan, jos jätetään ykkösellä kertomiset huomiotta, että tietyt luvut eivät koskaan esiinny vastauksina. Tällaiset luvut ovat alkulukuja. Jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan esittää alkulukujen tulona, jolloin alkuluvut tulkitaan yksitekijäisiksi tuloiksi. Kreikkalainen matemaatikko Eukleides todisti jo yli 2000 vuotta sitten, että alkulukuja on ääretön määrä. Tulokseen johtava ajatuskulku on yksi matematiikan kauneimmista ja peruskoululaisen tavoitettavissa:

Olkoot $p_1, p_2, \ldots p_n$ äärellinen joukko alkulukuja. Tällöin luku

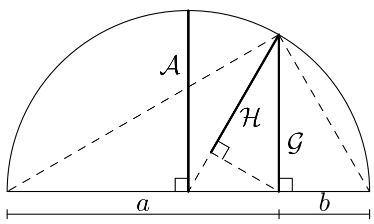
$$m = 1 + p_1 p_2 \ldots p_n$$

ei ole jaollinen yhdelläkään niistä, sillä jokaisesta jakolaskusta $m : p_\imath$ jää jakojäännökseksi ykkönen. Koska m kuitenkin voidaan esittää alkulukujen tulona, on olemassa muitakin alkulukuja kuin nuo mainitut. Siis mikään äärellinen alkulukujoukko ei sisällä kaikkia alkulukuja.

Eräissä lukion oppikirjoissa todistetaan algebrallisesti kahden positiivisen luvun aritmeettisen, geometrisen ja harmonisen keskiarvon välinen suuruusjärjestys

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A}.$$

Tämä epäyhtälöketju yhtäsuuruusehtoineen voidaan päätellä myös geometrisesti oheisen kuvion avulla.



Jatko-opintojen kannalta onkin erinomaisen tärkeää, että oppilas tajuaa algebran ja geometrian välisiä yhteyksiä.

Yllä todettiin, että alkulukuja on ääretön määrä. Niiden ominaisuuksia tutkitaan lukiossa lukuteorian kurssilla. Siellä todistetaan esimerkiksi, että jos a on mikä tahansa kokonaisluku ja p on alkuluku, niin $a^p - a$ on jaollinen luvulla p, eli

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Tässä kauneus ja hyöty kulkevat käsikädessä, sillä tämän yhtälön taustalla oleviin ajatuksiin perustuu mm. eräs nykyaikainen tiedonsalausalgoritmi.

Matematiikkaa opiskeltaessa ja opetussuunnitelmia laadittaessa ei ole mielekästä alati kysellä, missä mitäkin osa-aluetta tarvitaan ja mitä hyötyä mistäkin yksityiskohdasta on. Se on yhtä turhaa kuin veden pumppaaminen karille ajaneen laivan alle. Jos veden pinta nousee ja vuotoja ei ole, niin laiva irtoaa karilta. Jos matematiikkaa opiskellaan avoimella mielellä oppiaineen omaa logiikkaa noudattaen, saavutetaan automaattisesti valmiudet tarttua vaativiinkin sovelluksiin.

Uusi professuuri

Helsingin yliopistoon on nimitetty sen historian ensimmäinen matematiikan opettajankoulutuksen professori. Virkaan kutsutun matematiikan tohtori Juha Oikkosen mielenkiintoinen haastattelu on luettavissa LUMA-sanomissa [3]. Solmun toimitus onnittelee uutta professoria nimityksen johdosta ja toivoo syvenevää yhteistyötä yhteisten ongelmien voittamiseksi.

Viitteet

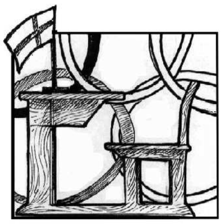
[1] `http://www.minedu.fi/OPM/Julkaisut/2012/Tulevaisuuden_perusopetus.html`

[2] LUMA – Suomen menestystekijä nyt ja tulevaisuudessa `http://www.oph.fi/instancedata/prime_product_julkaisu/oph/embeds/110468_luma_neuvottelukunnan_muistio_2009.pdf`

[3] `http://www.luma.fi/artikkelit/1093/tuore-matematiikan-opettajankoulutuksen-professori-kaipaa-opetukseen-lisaeae-mielekyyttae-ja-kohtaamisia`

Markku Halmetoja

Pääkirjoitus



Väitteitä matematiikan opetuksesta ja vastauksia niihin

Tuomas Korppi

Maallikoilla on mitä kummallisimpia näkemyksiä matematiikasta, ja nämä näkemykset heijastuvat siihen, millaisena he näkevät matematiikan kouluopetuksen[1] roolin. Tässä kirjoitelmassa esitän tällaisia näkemyksiä väitemuodossa ja annan oman vastaukseni väitteisiin. Vaikka väitteiden muotoilu on minun tekemäni, kaikilla esitetyillä väitteillä on esikuvansa todellisuudessa.

Matematiikan luonne

Väite 1. *Matematiikkahan on pelkästään joukko sopimuksia.*

Vastaus: Kaikilla tieteenaloilla on omaa erikoisterminologiaansa, ja termien merkitykset voidaan nähdä sopimuksina. Matematiikka ei ole mikään poikkeus, ja matemaatikkojen ammattikielessä tällaista termin merkityksen määrittelyä kutsutaan *määritelmäksi*.

Määritelmät itsessään eivät ole matematiikassa se asian pihvi, vaan se, että niistä voidaan loogisesti päätellä uusia väittämiä, joita kutsutaan *teoreemoiksi*. Päättelyketjut ovat useissa tapauksissa hyvinkin monipolvisia, ja se, että jokin teoreema on määritelmien looginen seuraus, voi olla päättelyketjua tuntemattomalle ihmiselle (jopa matemaatikolle) hyvinkin yllättävää.

Muista tieteistä matematiikka eroaa siten, että muissa tieteissä tulokset eivät ole pelkästään termien merkitysmäärittelyjen loogisia seurauksia, vaan tulokset riippuvat sekä termien merkityksistä että ympäröivän todellisuuden luonteesta.

Matematiikan varsinaisesti mielenkiintoisen sisällön voidaankin katsoa muodostuvan lauseista tyyppiä "Näistä-ja-näistä määritelmistä seuraavat nämä-ja-nämä teoreemat". Tällaisten lauseiden totuus tai epätotuus ei sitten enää olekaan sopimuksenvarainen asia vaan looginen välttämättömyys.

Matematiikka suhteessa muihin kouluaineisiin

Väite 2. *Koulun on tarkoitus tarjota yleissivistystä eikä keskittyä insinöörien tuotantoon talouselämän palvelukseen. Näin ollen matematiikkaa ei tule painottaa.*

Vastaus: Matematiikassa on osia, jotka kuuluvat yleissivistykseen. Tällaista on esimerkiksi ala-asteella opittava peruslaskento, joka jokaisen länsimaisen ihmisen kuuluu osata. Kirjainalgebrasta yleissivistykseen kuuluu ainakin sen ymmärtäminen, kuinka kirjainten avulla voidaan esittää yleisiä, kaikkia lukuja koskevia väitteitä. Tämä on yleissivistävää, koska se esittää oppilaille uuden tavan ilmaista asioita.

Yleissivistävää materiaalia löytyy myös nykyisen koulukurssin ulkopuolelta. Tärkeimpänä tällaisena asiana pidän deduktiivisen metodin hallintaa, jossa lähdetään aksioomista, ja niistä käsin todistetaan eli perustellaan

[1] Koululla tarkoitan tässä kirjoitelmassa peruskoulua ja lukiota.

aukottomasti teoreemoja. Tämä on yleissivistävää siksi, että tällaisessa ympäristössä tutustutaan siihen, millaista on tieto, joka voidaan tietää varmasti, ja joka eroaa empiirisissä tieteissä saavutettavasta tiedosta, joka on epävarmaa.

Deduktiivinen metodi, Eukleideen geometriana, on myös kuulunut klassiseen yleissivistykseen.

Myös modernimmassa matematiikassa on osia, joiden hallinta on mielestäni yleissivistävää. Tällaisia ovat ainakin seuraavat:

- δ–ε-metodi, jolla jatkuvaa muutosta voidaan käsitellä matemaattisen täsmällisesti.
- Kardinaalilukujen teorian alkeita sen verran, että ymmärretään, että parhaiden matemaattisten teorioiden mukaan äärettömiä joukkoja on eri kokoisia.
- Lebesguen mitan teoria, joka kertoo, kuinka omituisen mallisiin joukkoihin käsitteitä ”pituus”, ”pinta-ala” ja ”tilavuus” voidaan mielekkäästi soveltaa.
- Sen ymmärtäminen, mitä Gödelin epätäydellisyyslauseet sanovat. Tämä kertoo matemaattisen metodin rajat. Lisäksi nämä lauseet osoittavat, että totuus transsendenttina ominaisuutena on erotettava todistuvuudesta inhimillisesti saavutettavissa olevana ominaisuutena. Monissa maallikoiden käymissä filosofisissa keskusteluissa olen huomannut, että ihmisillä on mitä kummallisimpia harhaluuloja koskien Gödelin epätäydellisyyslauseita.

Yllä olen esimerkinomaisesti luetellut matematiikan osia, jotka ovat yleissivistäviä. Luetteloa ei ole tarkoitettu kattavaksi; yleissivistävää materiaalia löytyy varmasti lisääkin. Näin ollen kouluopetuksen muuttaminen yleissivistävämmäksi ei tarkoita matematiikan osalta sitä, että sen määrää vähennettäisiin, vaan ennemmin sitä, että painopistettä siirretään matematiikan sisällä insinöörien tarvitsemasta ”välinematematiikasta” kohti käsitteellisesti mielenkiintoista matematiikkaa.

Väite 3. *Matematiikka ja kovat luonnontieteet edustavat kovia arvoja. Kouluopetuksen on sitä vastoin painotettava pehmeitä arvoja.*

Vastaus: Ensinnäkin tekisi mieli muistuttaa Humen giljotiinista. Matematiikka ja luonnontieteet tuottavat tietoa siitä, kuinka asiat ovat, eivätkä ne suoranaisesti kerro siitä, kuinka asioiden pitäisi olla. Näin ollen ne ovat neutraaleja arvokeskustelussa.

Kovia arvoja edustaakin nähdäkseni lähinnä rahan ja yleisemmin talouden roolin painottaminen päätöksenteossa, eikä matematiikka sinällään sano juuta eikä jaata koskien sitä, pitäisikö näitä asioita painottaa.

Taloustieteen teorioissa toki sovelletaan matematiikkaa, ja jotta ihminen voisi uskottavasti argumentoida kovia taloudellisia arvoja kannattavia ihmisiä vastaan, hänen täytyy hallita talouden lainalaisuudet, ja näin ollen myös matematiikkaa. Näin matematiikka on, hiukan kiertotietä, hyödyllistä myös ihmiselle, joka haluaa edesauttaa pehmeiden arvojen toteutumista.

Väite 4. *Koulun on opetettava kriittistä ajattelua, ja sitä tukevat parhaiten humanistiset aineet, ei matematiikka.*

Vastaus: Ensinnäkin kouluopetuksessa on sellainen ongelma, että tieteiden metodologiaan ei yleensä päästä, mikä rajoittaa kriittisen ajattelun opettamista ylipäätänsä, koska oppilaat eivät näe, millaisia ovat ne ajattelutavat, joita tiedon keräämisessä käytetään. Myös humanistisissa aineissa ”kriittinen ajattelu” jää koulussa usein mielipiteiden ilmaisemisen tasolle.

Matemaattinen metodi, deduktiivinen päättely, on periaatteessa opetettavissa jo lukiotasolla (katso vastaus Väitteeseen 2). Tämä edesauttaa kriittisen ajattelun valmiuksia, koska oppilaat tutustuvat päättelyketjuihin, jotka ovat tiukasti totuuden säilyttäviä. Tämä auttaa hahmottamaan hyvän ja huonon päättelyn eroa.

On tietysti totta, että kriittinen ajattelu on paljon muutakin kuin deduktiivista päättelyä, mutta väitän, että humanististen tieteiden summittaisella painottamisella matematiikkaan verrattuna tavoitetta ei saavuteta. Eräs mahdollisuus kriittisen ajattelun opettamiseen olisi matemaattisen deduktion opettaminen, ja sen lisäksi väittelytaidon kurssi, jolla keskityttäisiin argumentaatiovirheiden karsimiseen. Argumentaatiovirheet kun ovat yleensä seurausta ajatusvirheistä.

Matemaattisista ajatusprosesseista

Väite 5. *Koulun tulee opettaa luovuutta, ja koska matematiikka ei ole luovaa, sitä ei tule painottaa.*

Vastaus: Koulumatematiikassa hinkataan hyvin paljon mekaanisia laskutehtäviä, mikä tosiaan ei ole luovaa. Yliopistomatematiikassa tilanne on toinen. Siellä törmätään ongelmiin, jotka toteuttavat molemmat seuraavista ehdoista:

1. Ongelman ratkaisun oikeellisuuden tarkastaminen on mekaaninen toimenpide.
2. Ongelman ratkaisun löytämiseen ei ole mekaanista menetelmää.

Tällaisissa olosuhteissa törmätään aivan omanlaiseensa luovuuden lajiin. Kohdan (2) takia luovuutta tosiaan tarvitaan: Valmiin ratkaisukonseptin mekaaninen soveltaminen ei ole mahdollista. Kohdan (1) takia kenenkään ei ole mahdollista tarjota epäkelpoa ratkaisua ja väittää, että sen hyvyys on mielipidekysymys.

Tällainen luovuus eroaa jonkun verran siitä luovuudesta, jota esimerkiksi kuvataiteilija käyttää, koska esimerkiksi tehtävänannon ”luova tulkitseminen” ei ole sallittua. Toisaalta tällainen luovuus tulee lähelle runoilijan luovuutta silloin kun runoilija kirjoittaa runoa johonkin mittaan: Mitta asettaa reunaehdot runon rytmille ja loppusoinnuille samaan tapaan kuin matematiikan oikeellisuuden säännöt asettavat reunaehdot matemaattisen tehtävän ratkaisulle. Nähdäkseni mittaan kirjoittava runoilija tarvitsee vapaaseen mittaan kirjoittavaan verrattuna huomattavasti enemmän luovuutta, koska hänen on löydettävä sanat, jotka *sekä* sopivat mittaan *että* välittävät sen, mitä hän haluaa sanoa.

Uskoisin, että elävässä elämässä tarvitsemme enemmän matemaatikon luovuutta kuin kuvataiteilijan luovuutta, koska todellisuus asettaa selkeitä rajoja ratkaisujen hyvyydelle.

Näin ollen olenkin vahvasti sitä mieltä, että matematiikan kouluopetukseen olisi tuotava mahdollisuuksien mukaan tehtäviä, jotka toteuttavat ehdot (1) ja (2). Eräs tehtävätyyppi, jossa tähän törmätään ilman, että vaaditaan syvällistä matematiikan teorioiden tuntemusta, ovat tehtävät, joissa etsitään voittostrategioita yksinkertaisiin peleihin.

Väite 6. *Matemaatikot pelkästään tuijottavat kaavoihinsa. Haluamme, että koulussa ihmisille opetetaan laaja-alaisempaa ymmärryskykyä.*

Vastaus: Kuten edellä on tullut ilmi, matematiikka on päättelyä ja ongelmanratkaisua, ja kaavat ovat vain kieli matemaattisten asioiden esittämiseen. Itse asiassa matemaattisessa tekstissä yleensä vaihdellaan luonnollisen kielen ja kaavojen välillä aina sen mukaan, kummalla on esitettävä asia helpompi ilmaista.

Matemaattisen ymmärryskyvyn omaavat ihmiset yleensä myös ymmärtävät, mistä kaavat tulevat, mikä on ainoa tapa hahmottaa jonkun kaavan sovellusalueen rajat tai kysymys kaavan pätevyydestä ylipäätänsä. Kritiikitön kaavan soveltaminen on yleensä merkki matemaattisen ymmärryskyvyn puutteesta, ja eräs matematiikan opettamisen syistä onkin antaa ihmisille ymmärrys, jolla punnita kaavoja tai matematiikkaan pohjaavia väitteitä ylipäätänsä.

Matematiikan käytännön hyöty

Väite 7. *Koulujen matematiikan opetuksessa on siirryttävä soveltaviin tehtäviin.*

Vastaus: Tässä sana ”soveltava” on aika monitulkintainen. Ensinnäkin sillä voidaan tarkoittaa sovelluksia käytännön elämään. Toisekseen sillä voidaan tarkoittaa esitetyn matemaattisen teorian soveltamista uusiin matemaattisiin ongelmiin, joilla ei välttämättä ole yhteyttä käytännön elämään.

Mielestäni käytäntöön soveltaminen ei saa olla oppisisältöjen valinnassa itseisarvo. Tärkeää on se, että oppilaat oppivat matemaattista teorianmuodostusta sekä luovaa matemaattista ongelmanratkaisukykyä, eli yhteenvetona matemaattista ajattelua. Käytäntöön soveltavia ongelmia kannattaa esittää vain sikäli, kun se palvelee tätä tarkoitusta. Erityisesti sellaisia soveltavia tehtäviä on vältettävä, joissa tehdään vain mekaaninen, suoraviivainen sovellutus esitetystä teoriasta.

Soveltaminen uusiin matemaattisiin ongelmiin on selkeämmin kannatettavaa. Tällaiset tehtävät ovat hyvin usein niitä, joissa sovellus ei ole suoraviivainen, vaan vaatii kekseliäisyyttä, eli yleensä toteuttaa Väitteen 5 vastauksessa mainitut pykälät (1) ja (2).

Väite 8. *Matematiikan opettaminen koulussa on turhaa. En ole eläessäni tarvinnut derivaattaa mihinkään.*

Vastaus: Ensinnäkin on kohtuutonta yleistää derivaatan tarpeettomuus koko matematiikan tarpeettomuudeksi. Esimerkiksi ala-asteella opetettavia peruslaskutoimituksia jokainen tarvitsee arkipäiväisessä elämässään.

Lisäksi differentiaali- ja integraalilaskenta, johon derivaattakin kuuluu, on välttämätöntä luonnontieteisiin ja tekniikkaan jatko-opinnoissa suuntautuville oppilaille, ja koulun on annettava valmiudet myös heille. Tässä merkittävä on lukion matematiikan jako pitkään ja lyhyeen matematiikkaan. Ne jotka aikovat jatkossa suuntautua luonnontieteisiin ja tekniikkaan, voivat lukiossa valita pitkän matematiikan.

Kuitenkin suuri osa koulussa opetettavasta asiasta muissakin aineissa on sellaista, jota ei jatkossa konkreettisesti tarvita, mutta jonka hallitsemisen katsotaan olevan arvokasta yleissivistystä. Siitä, mikä osa matematiikasta on mielestäni tällaista, olen kirjoittanut Väitteen 2 vastauksessa.

On totta, että en katso derivaatan kuuluvan matemaattiseen perusyleissivistykseen. Sitä vastoin differentiaali- ja integraalilaskentaa tarvitaan hyvinkin yksinkertaisen fysiikan ymmärtämisessä. Esimerkiksi nopeus on kuljetun matkan derivaatta ajan suhteen. Mielestäni tietty määrä fysiikkaa, ympäröivän todellisuuden perimmäisten lainalaisuuksien tutkimisena, kuuluu yleissivistykseen jos mikä. Näin derivaattakin kuuluu yleissivistykseen, ei osana matemaattista yleissivistystä vaan osana fysikaalista yleissivistystä.

Liite: Aksioomien ja määritelmien suhteesta

Väitteen 1 vastauksessa puhun siitä, että teoreemat seuraavat määritelmistä. Koska joillekin koelukijoilleni heräsi kysymys, eikö aksioomia tarvita myös, selvennän tässä liitteessä kantaani.

Tässä kannattaa huomata aksiooman roolin muuttuminen antiikista nykyaikaan. Aiemmin aksioomia pidettiin itsestäänselvyyksinä, jotka eivät tarvinneet perustelua, ja joita siksi voitiin pitää päättelyn lähtökohtana.

Nykyisin aksioomiin ei liity tuollaista itsestäänselvyyden vaatimusta, ja ne esiintyvät osana määritelmiä. Esimerkiksi topologinen avaruus määritellään miksi tahansa systeemiksi, joka toteuttaa topologisen avaruuden aksioomat. Ryhmät määritellään samalla tavoin aksiomaattisesti. Itse yleistäisin vielä tästä, ja pitäisin esimerkiksi 2. kertaluvun Peanon aksioomia luonnollisten lukujen systeemin määritelmänä: Määrittelen luonnollisten lukujen systeemin siksi isomorfiaa vaille yksikäsitteiseksi systeemiksi, joka toteuttaa 2. kertaluvun Peanon aksioomat. Reaaliluvut määrittelen vastaavasti.

Tällä lähestymistavalla tarvitsemme matematiikan lähtökohdaksi kolme asiaa:

1. Määritelmät
2. Päättelysäännöt
3. Matemaattisen konstruoimisen säännöt

Väitteen 1 vastauksessa tarkoitukseni oli käyttää sanaa ”looginen” löyhässä mielessä niin, että se kattaa pykälät (2) ja (3). Jos ollaan tarkkoja, ylläoleva lista tarkentuu muotoon

1. Määritelmät
2. 1. kertaluvun predikaattilogiikka
3. ZFC-joukko-opin aksioomat

Näin ZFC-joukko-opin aksioomat (tai, jos niin halutaan, joku niiden vahvennus, jossa voidaan puhua myös aidoista luokista) ovat ainoa aksioomien muoto, jotka ovat aksioomia vanhassa, antiikinaikaisessa mielessä. Puolustan kuitenkin niiden sisällyttämistä ”logiikkaan” vastauksessani sillä, että suuri osa matemaatikoista ei edes tunne kyseisiä aksioomia perusteellisesti, vaan suorittavat matemaattiset konstruktiot itsestäänselvänä pitämällään tavalla, joka yhtyy ZFC:ssä sallittuihin operaatioihin.

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

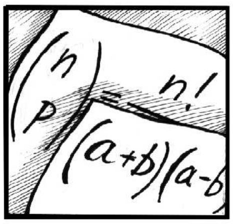
K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät



Vedonlyönnin matematiikkaa

Jukka Liukkonen
Metropolia ammattikorkeakoulu

Vedonlyönnissä *vedonlyöntitoimisto* sitoutuu maksamaan vedonlyöjälle eli *asiakkaalle* hänen vetoon sijoittamansa rahamäärän eli *panoksen* tietyllä *kertoimella* kerrottuna, mikäli vedonlyöjän veikkaama tulos toteutuu. Muussa tapauksessa asiakkaan maksamat rahat jäävät vedonlyöntitoimistolle. Jos toimisto julkistaa kertoimet ennen vedonlyönnin alkamista, kertoimia sanotaan *kiinteiksi*. Käytännössä kertoimet useimmiten määräytyvät asiakkaiden yhteenlaskettujen panosten perusteella ja ne muuttuvat sitä mukaa kun uusia vetoja lyödään. Tämän esityksen tavoitteena on tutustuttaa lukija (itse asiassa kirjoittaja, jos rehellisiä ollaan!) vedonlyönnin matematiikkaan ja erityisesti arbitraasin käsitteeseen. Sen takia tarkastelemme mahdollisimman yksinkertaista tilannetta, jossa kertoimet ovat kiinteät.

Olkoon vedonlyönnin *kohteena* kahden jalkapallojoukkueen, sanokaamme FC_1 ja FC_2, tietyn pelin tulokset kiinteillä kertoimilla. Tulosvaihtoehdot ovat

(1) joukkue FC_1 voittaa,

(x) joukkueet pelaavat tasapelin ja

(2) joukkue FC_2 voittaa.

Kun tulokset koodataan reaaliluvuiksi x_1, x_2 ja x_3, niitä voidaan pitää satunnaismuuttujan X arvoina: esimerkiksi $x_1 = 1$ (FC_1 voittaa), $x_2 = 1.5$ (tasapeli) ja $x_3 = 2$ (FC_2 voittaa). Vedonlyöntitoimisto asettaa vedonlyöntikertoimet λ_1, λ_2 ja λ_3 sen perusteella, miten todennäköisiksi se arvioi pelin tulosvaihtoehdot. Kertoimiin vaikuttaa luonnollisesti myös se, kuinka suuren osan asiakkaan sijoittamista varoista toimisto keskimäärin haluaa palauttaa asiakkaalle. Olkoot kohteen tulosvaihtoehtojen x_1, x_2 ja x_3 arvioidut todennäköisyydet vastaavasti p_1, p_2 ja p_3. Niiden summan tulee tietysti olla yksi:

$$p_1 + p_2 + p_3 = \sum_{k=1}^{3} p_k = 1. \qquad (1)$$

Jos asiakas sijoittaa vetoihin tulosten x_1, x_2 ja x_3 puolesta r_1, r_2 ja r_3 euroa tässä järjestyksessä, asiakkaan saama *palautus* on vastaavasti $\lambda_1 r_1$, $\lambda_2 r_2$ tai $\lambda_3 r_3$ riippuen siitä, mikä tulosvaihtoehdoista toteutuu:

Pelin tulos	Todennäköisyys	Kerroin	Panos	Palautus
x_1	p_1	λ_1	r_1	$\lambda_1 r_1$
x_2	p_2	λ_2	r_2	$\lambda_2 r_2$
x_3	p_3	λ_3	r_3	$\lambda_3 r_3$

Asiakkaan saaman palautuksen odotusarvo μ on

$$\mu = p_1\lambda_1 r_1 + p_2\lambda_2 r_2 + p_3\lambda_3 r_3 = \sum_{k=1}^{3} p_k\lambda_k r_k.$$

Merkitään symbolilla r asiakkaan sijoittamien panosten summaa:

$$r = r_1 + r_2 + r_3 = \sum_{k=1}^{3} r_k.$$

Suhdetta μ/r kutsutaan *palautusprosentiksi.* Jotta vedonlyöntitoimisto hyötyisi toiminnastaan taloudellisesti, palautusprosentin tulee olla pienempi kuin yksi – siis alle 100 %. Yleisessä tapauksessa palautusprosentti riippuu panoksista r_k. Kertoimet λ_k on kuitenkin mahdollista säätää *panosinvarianteiksi* eli sellaisiksi, että palautusprosentti ei riipu panoksista. Tällöin panostuksilla

$$\begin{cases} r_1 = r \\ r_2 = 0 \\ r_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = r \\ r_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \\ r_3 = r \end{cases}$$

tulee olla sama palautusprosentti c. Vaatimukset

$$c = \frac{\mu}{r} = \frac{p_i \lambda_i r}{r} = p_i \lambda_i$$

johtavat *panosinvarianssiehtoihin*

$$\lambda_i = \frac{c}{p_i} \quad \Leftrightarrow \quad p_i = \frac{c}{\lambda_i}, \qquad i = 1,2,3. \tag{2}$$

Merkitsemällä

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i}$$

ja ottamalla huomioon yhtälö (1) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{3} p_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i}{c} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} = \Lambda \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\Lambda}. \end{aligned} \tag{3}$$

Tässä artikkelissa kertoimet oletetaan panosinvarianteiksi, ellei erikseen mainita.

Esimerkki 1. Olkoot vedonlyöntitoimiston ilmoittamat panosinvariantit vedonlyöntikertoimet $\lambda_1 = 2.30$, $\lambda_2 = 2.90$ ja $\lambda_3 = 3.00$. Koska

$$\Lambda = \frac{1}{2.30} + \frac{1}{2.90} + \frac{1}{3.00} \approx 1.1129,$$

palautusprosentti on

$$c \approx \frac{1}{1.1129} \approx 0.8986 \approx 90\ \%.$$

Vedonlyöntitoimiston arvioimat todennäköisyydet ovat siten

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{c}{\lambda_1} \approx \frac{0.8986}{2.30} \approx 0.3907 \approx 39\ \% \\ p_2 &= \frac{c}{\lambda_2} \approx \frac{0.8986}{2.90} \approx 0.3099 \approx 31\ \% \\ p_3 &= \frac{c}{\lambda_3} \approx \frac{0.8986}{3.00} \approx 0.2995 \approx 30\ \% \end{aligned}$$

■

Summasta

$$\sum_{k=1}^{3} cr\lambda_k^{-1} = cr\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\lambda_k} = cr\Lambda \overset{(3)}{=} r$$

nähdään, että panokset voidaan asettaa kaavan

$$r_k = cr\lambda_k^{-1} \tag{4}$$

mukaisiksi, $k = 1, 2, 3$. Tällä panostuksella asiakkaan saama palautus on aina tasan cr. Vaihtoehdon x_i toteutuessa nimittäin palautus on $\lambda_i r_i = \lambda_i cr\lambda_i^{-1} = cr$ kaikilla $i = 1, 2, 3$. Panostusta (4) voidaan siis kutsua *neutraaliksi panostukseksi.* Tilanne muuttuu asiakkaan kannalta mielenkiintoiseksi, jos

$$\Lambda < 1. \tag{5}$$

Silloin palautusprosentti on yhtälön (3) nojalla suurempi kuin 100 %. Mikään positiiviseen taloudelliseen tulokseen tähtäävä vedonlyöntitoimisto ei tahallaan aseta tällaisia kertoimia, mutta entä jos toimistoja on useita ja niillä on erilaiset kertoimet samalle kohteelle. Asiakashan voi hajauttaa vetonsa eri toimistojen kesken. Toimistot ovat saattaneet arvioida kohteen tulosvaihtoehtojen todennäköisyydet eri tavalla, mistä on seurauksena eri kertoimet yhtälön (2) mukaisesti.

Olkoon ehto (5) voimassa. Tutkitaan mahdollisuutta saada voitto v varmasti. Kaikilla $i = 1,2,3$ pitää siis olla

$$\lambda_i r_i - r = v \quad \Leftrightarrow \quad r_i = \frac{r+v}{\lambda_i}. \tag{6}$$

Summaamalla saadaan

$$\begin{aligned} & r = \sum_{i=1}^{3} r_i = (r+v)\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\lambda_i} = (r+v)\Lambda \\ \Leftrightarrow \quad & (1-\Lambda)\, r = v\Lambda \\ \Leftrightarrow \quad & r = \frac{\Lambda}{1-\Lambda}\, v. \end{aligned} \tag{7}$$

Tällöin

$$r_i \overset{(6)}{=} \frac{\frac{\Lambda}{1-\Lambda} v + v}{\lambda_i} = \frac{v}{(1-\Lambda)\lambda_i}.$$

Yhteenvetona saadaan seuraava tulos:

Lause 1. *Jos vedonlyöntikertoimet toteuttavat yhtälön* $\Lambda < 1$, *ja panokset ovat*

$$r_i = \frac{v}{(1-\Lambda)\lambda_i}, \quad i = 1,2,3,$$

asiakas saa aina positiivisen voiton v *riippumatta siitä, mikä tulosvaihtoehdoista* x_1, x_2 *ja* x_3 *toteutuu.*

Lauseessa kuvattu vedonlyöntimenettely on esimerkki *arbitraasista*, hinnoitteluerojen mahdollistamasta riskittömään tuottoon johtavasta toimintatavasta. Arbitraasi voidaan toteuttaa vain ehdolla $\Lambda < 1$.

Esimerkki 2. Muutetaan esimerkki 1 sellaiseksi, että vetoa lyödään samanaikaisesti kolmessa vedonlyöntitoimistossa. Oheiseen taulukkoon on merkitty kunkin toimiston osalta palautusprosentti ja toimiston arvio tulosvaihtoehtojen todennäköisyyksistä. Lopuksi on laskettu kerrointen käänteisluvuille $\lambda_k^{-1} = p_k c^{-1}$ likiarvot. Toimisto numero 3 on sama kuin esimerkissä 1.

Tsto	Pal.-pros.	Todennäköisyydet prosentteina			Kerrointen käänteisluvut		
	c	p_1	p_2	p_3	λ_1^{-1}	λ_2^{-1}	λ_3^{-1}
1	95	35	29	36	0.37	0.31	0.38
2	93	42	26	32	0.45	0.28	0.34
3	90	39	31	30	0.43	0.34	0.33

Ideana on veikata kussakin toimistossa vain yhtä tulosvaihtoehtoa. Katsomalla kolmelta viimeisimmältä sarakkeelta pienimmät luvut havaitaan, että summa $\Lambda = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1}$ saa pienimmän arvon, kun toimistossa 1 veikataan tulosta x_1, toimistossa 2 veikataan tulosta x_2 ja toimistossa 3 veikataan tulosta x_3 (sattumalta tuli sama järjestys). Koska tämä pienin arvo on $0.98 < 1$, voimme soveltaa arbitraasivedonlyöntiä.

Seuraavassa taulukossa ajatellaan, että vetoa lyödään kuvitteellisessa toimistossa, jonka kertoimet on kerätty kolmesta todellisesta toimistosta edellä kuvatun mukaisesti. Todennäköisyyksiä merkitään sekaannusten välttämiseksi symbolilla q_k. Viimeisille sarakkeille on laskettu kertoimet $\lambda_k = c_k q_k^{-1}$ ja panokset $r_k = v(1-\Lambda)^{-1}\lambda_k^{-1}$. Laskenta on tehty maksimitarkkuudella, mutta luvut esitetään kahdella desimaalilla. Panokset on laskettu päämääränä saada 100 euron varma voitto. Siis $v = 100$.

Tsto	Pal.-pros.	Todennäk. pros.	Kerroin	Panos eur
k	c_k	q_k	λ_k	r_k
1	95	35	2.71	1972.73
2	93	26	3.58	1496.97
3	90	30	3.00	1784.85
Σ		91		5254.55

Koska toimistot ovat erimielisiä todennäköisyyksistä, hajautetussa vedossa eri tulosvaihtoehtojen arvioitujen todennäköisyyksien summa on 91 % eikä 100 %. Asiakkaan saama voitto 100 euroa on vain 1.9 % noin 5250 euron kokonaispanoksesta, mutta se on riskitöntä tuottoa. Muutama tällainen voitto vuodessa tuottaisi sijoitetulle pääomalle tavoittelemisen arvoisen koron. ∎

Otetaanpa vielä korostetun yksinkertainen ja äärimmäinen esimerkki, jotta varman voiton mahdollisuus tietyissä olosuhteissa tulisi varmasti selväksi:

Esimerkki 3. Olkoon veikattavassa kohteessa kaksi tulosvaihtoehtoa x_1 ja x_2. Hajautetaan veto kahteen toimistoon T_1 ja T_2, joilla kummallakin on palautusprosentti 90 %. Toimisto T_1 arvioi tuloksen x_1 todennäköisyydeksi 75 % ja tuloksen x_2 todennäköisyydeksi 25 %. Toimiston mielestä tulos x_2 tulee siis keskimäärin joka neljännellä pelikerralla. Jos toimisto ei tavoittelisi taloudellista hyötyä, se maksaisi tulosvaihtoehdolle x_2 asetetun panoksen nelinkertaisena takaisin asiakkaalle aina, kun tulos x_2 sattuu tulemaan. Toimisto kuitenkin haluaa asiakkaan panoksista keskimäärin 10 % itselleen, joten se maksaa tuloksen x_2 toteutuessa sille asetetun panoksen vain 3.6-kertaisena takaisin. Vastaavin perustein toimisto maksaa tulokselle x_1 asetetun panoksen kertoimella 1.2 kerrottuna takaisin tuloksen x_1 toteutuessa. Toimisto T_2 arvioi todennäköisyydet juuri päinvastoin. Sen mielestä tuloksen x_1 todennäköisyys on 25 % ja tuloksen x_2 todennäköisyys on 75 %.

Toimisto	Pal.pros.	Todennäköisyydet prosentteina		Kertoimet	
		p_1	p_2	λ_1	λ_2
T_1	90	75	25	1.2	3.6
T_2	90	25	75	3.6	1.2

Asiakkaan kannalta merkitykselliset tosiasiat ovat seuraavat:

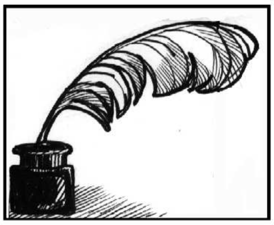
1) Tuloksen x_2 toteutuessa T_1 maksaa vaihtoehdolle x_2 asetetun panoksen 3.6-kertaisena takaisin.

2) Tuloksen x_1 toteutuessa T_2 maksaa vaihtoehdolle x_1 asetetun panoksen 3.6-kertaisena takaisin.

Asiakas päättää lyödä toimiston T_1 kanssa 100 eurolla vetoa sen puolesta, että x_2 toteutuu. Lisäksi asiakas päättää lyödä toimiston T_2 kanssa 100 eurolla vetoa sen puolesta, että x_2 ei toteudu eli että x_1 toteutuu. Tapahtuipa sitten niin tai näin, asiakas saa aina 360 euroa takaisin. Voitto on 160 euroa 200 euron sijoituksella. Asiakas saa siis 80 % riskittömän tuoton sijoittamalleen pääomalle. ∎

Verkko-Solmun oppimateriaalit ovat nyt omalla sivullaan

`http://solmu.math.helsinki.fi/oppimateriaalit.html`



Piin ja taun päivät

Niklas Hietala

Joka maaliskuun 14. päivänä monet matemaatikot tai muuten matematiikasta innostuneet juhlivat piin päivää. Päivän suosio on suurimmillaan maissa, joissa päivämäärät kirjoitetaan nurinkurisessa järjestyksessä eli kuukausi ennen päivää. 3.14. – 14. maaliskuuta – on tietenkin piin likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

Suomalaiseen päivämääräjärjestelmään sopivampi juhlapäivä piille olisi 22.7. (eli 22/7), koska hyvä likiarvo piille on $\frac{22}{7}$. Tämä päivä ei kuitenkaan ole saavuttanut kovin suurta suosiota. Ehkä murtolukulikiarvot eivät ole digitaalisessa maailmassa enää niin tärkeitä.

Englanninkielisissä maissa iso osa piin päivän juhlintaa on piirakoiden leipominen ja syönti (lausutaanhan 'pi' ja 'pie' samalla tavalla). Onko pii-rakoilla yhtä suuri rooli suomalaisessa piin päivässä? Pii-rakoista puhuminen ei kuulosta kauhean herkulliselta. Jos **pii**rakat ovat osa piin päivää, niin miksei yhtälailla **pii**mä, **pii**loleikit ja **pii**rtäminen? Ehkei kuitenkaan **pii**kit, **pii**skaaminen ja **pii**na.

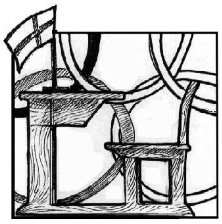
Suomenkielen sana pii ei tarkoita vain kreikan kirjainta ja matemaattista vakiota, vaan myös alkuainetta. Koska piitä käytetään mikropiirien valmistamiseen, niin ehkä piin päivä voisikin olla matemaatikkojen ja tietojenkäsittelytieteilijöiden yhteinen juhlapäivä.

En osaa oikein päättää, tulisiko minun suomalaisena juhlia piin päivää maaliskuussa ja näin osoittaa tukeni takaperoiselle päivämäärämerkinnälle. Ehkä ongelma ratkeaa hylkäämällä pii. Piihän on väärin, kuten esimerkiksi Bob Palais (The Mathematical Intelligencer, 23 (3), s. 7, 2001) ja Michael Hartl (tauday.com) ovat tuoneet esiin. Ei piissä sinällään mitään vikaa ole. On vain kummallista, että puhumme ympyrän kehän ja halkaisijan suhteesta, emmekä kehän ja säteen suhteesta. Yleensähän ympyröistä puhuttaessa säde on halkaisijaa paljon tärkeämmässä asemassa.

Halkaisijan käyttö säteen sijasta johtaa joihinkin epäloogisuuksiin. Radiaaneissa täysi kierros on 2π. Miksi tässä täytyy olla tuo kakkonen mukana? Radiaanien oppiminen olisi varmaan helpompaa, jos näin ei olisi. Samaten kerroin 2π tulee esiin lukuisissa eri yhteyksissä, joissa olisi kätevämpää, että olisi vain yksi merkki.

Piin kilpailijalle, kehän ja säteen suhteelle, on ehdotettu nimeä tau. Olisi siis $\tau = 2\pi$. Englanninkieliselle tau on helppo muistaa siitä, että kierros eli 'turn' alkaa t:llä. Suomenkielinen voisi pitää muistisääntönään sitä, että tau tarkoittaa **t**äyttä kierrosta ja pii **p**uolta kierrosta. Symboli τ muistuttaa myös π:tä. Tau on kuin pii, jolta on yksi jalka katkaistu. Tau on siis kuin viiva, jonka alla on yksi jalka – kierros jaettuna yhdellä – ja pii on viiva, jonka alla on kaksi jalkaa – kierros jaettuna kahdella.

Taun päivää vietetään kesäkuun 28. päivänä. Jälleen nurinperinen järjestys 6.28. Milloin olisi suomalainen taun päivä? Ehkä tulisi tyytyä yhden desimaalin tarkkuuteen ja viettää taun päivää 6.2. Vai pyöristyisikö se pikemminkin maaliskuun kuudenteen? Vaikka alistuisikin vieraaseen merkintätapaan ja viettäisi taun päivää kansainvälisyyden hengessä 28.6. (tai siis 6.28.), niin yksi kysymys jää kuitenkin vaille vastausta: miten tätä päivää vietetään, kun ei kai silloin oikein sovi piirakoitakaan syödä? Vai olisiko piirakoiden tuhoaminen syömällä juuri oikeanlainen protesti piitä vastaan?



Määrätyn integraalin opettamisesta likiarvotarkasteluin

Kyösti Tarvainen
Matematiikan yliopettaja, Metropolia ammattikorkeakoulu

Johdanto

Määrätyn integraalin lauseke muodostetaan fysiikan ja tekniikan sovellutuksissa päättelyllä, joka lähtee liikkeelle likiarvosummista (myös differentiaalisten tarkastelujen pohjalla ovat likiarvosummat). Jatko-opintoja ajatellen olisi siten tarpeen, että lukion matematiikassa määrätty integraali esiteltäisiin ja määriteltäisiin vastaavanlaisella tavalla. Näin tehtiin legendaarisessa Väisälän oppikirjassa [1], mutta nykyisin lukiokirjoissa määrättyjä integraaleja esitellään myös tavoilla, jotka poikkeavat sovellutuksissa käytetyistä tarkastelutavoista.

Pari kirjaa ovat jopa suoraan määritelleet määrätyn integraalin integraalifunktion avulla, pitäen yhtälöä

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (*)$$

jossa F on f:n integraalifunktio, määrätyn integraalin matemaattisena määritelmänä. Mutta se, että määrätty integraali voidaan laskea tämän yhtälön avulla ilman likiarvosummia, on matematiikan tärkeimpiä tuloksia, ei määritelmä. Ilmeisesti se, että yhtälö (*) on haluttu esittää määrätyn integraalin määritelmänä, johtuu siitä, että näin vältytään likiarvotarkasteluilta.

Mutta sovellutuksissa määrättyjä integraaleja johdettaessa ei voi välttyä likiarvotarkasteluista. Selvennykseksi todettakoon, että niissä ei ole kyse puhtaasti matemaattisesta kysymyksestä, lähestyykö jokin matemaattinen likiarvosumma (esimerkiksi Riemannin summa) jotain tiettyä matemaattista arvoa. Kyse on siitä, onko jokin likiarvosumma niin hyvä likiarvo jonkin geometrisen tai fysikaalisen suureen arvolle, että tämä likiarvo lähestyy tämän geometrisen tai fysikaalisen suureen tarkkaa arvoa.

Seuraavassa esitetään ensin yleinen kuvaus, miten määrätyn integraalin lausekkeita johdetaan sovellutuksissa lähtien liikkeelle likiarvosummista. Vaikeutena on usein nähdä se, että likiarvosummat lähestyvät laskettavan suureen tarkkaa arvoa. Kirjoituksen tarkoituksena on esittää erilaisia tapoja, jotka auttavat näissä likiarvotarkasteluissa.

Abstrakti kuvaus määrätyn integraalin lausekkeen muodostamisesta

Sovellutusten kannalta määrätty integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ on tietynlaisiin likiarvosummiin liittyvän tarkan arvon symboli. Tarkempi kuvaus on pitkä, mutta sinänsä kyse ei ole vaikeasta asiasta, sillä määrättyjä integraaleja laskettiin jo Antiikissa. Seuraavassa esitetään yleisellä tasolla kuvaus määrätyn integraalin muodostamisesta, joka vastaa sitä tapaa, jolla jo Leibnitz johti määrättyjen integraalien lausekkeita (joita hän merkitsi vain hieman nykykäytännöstä poikkeavalla tavalla).

1) Meillä on lukusuoran, esimerkiksi x-akselin, väli $[a, b]$, jossa $b > a$. Tämä väli voi olla suoraan tarkas-

telun alainen tai meillä voi olla esimerkiksi kappale, johon liitetään x-akseli, ja kappale rajautuu tällöin välille $[a, b]$.

2) Meidän on laskettava tähän väliin liittyvän suureen arvo. Ongelmana on se, että laskettavan suureen arvoon vaikuttaa jokin x:n funktio $f(x)$, joka olkoon jatkuva. Oletetaan, että me kuitenkin pystymme laskemaan vastaavan *vakiotapauksen* ($f(x)$ on vakio) siten, että laskettavan suureen arvo välillä $[a, b]$ ja kaikilla sen osaväleillä saadaan kertomalla vakioarvo välin pituudella (*vakiokaava*).

3) Oletetaan, että vaikeampi tapaus, jossa $f(x)$ ei ole vakio välillä $[a, b]$, voidaan geometrisen tai fysikaalisen näkemyksen perusteella ratkaista likimäärin seuraavasti vakiokaavaa käyttämällä. Jaetaan väli $[a, b]$ n:ään yhtä pitkään osaväliin, joiden pituutta merkitään Δx:llä. Merkitään osavälien alkupisteitä $x_1 (= a), x_2, x_3, \ldots, x_n$. Ideana on se, että kullakin osavälillä jatkuva funktio $f(x)$ ei ehdi muuttua paljon eli kullakin osavälillä funktio on likipitäen vakio – sitä tarkemmin, mitä lyhempiä osavälit ovat eli mitä enemmän niitä on. Määrätään tarkasteltavan suureen likiarvo kullakin osavälillä vakiokaavan avulla kertoen funktion f arvo osavälin alkupisteessä osavälin pituudella Δx eli k:nnen osavälin ($k = 1, 2, \ldots, n$) kohdalla laskettavan suureen likimääräinen *kertymä* on $f(x_k)\Delta x$.

4) Oletetaan (käytännössä tämä on yleensä selvä asia geometrisen tai fysikaalisen näkemyksen perusteella), että laskettavan suureen tarkka arvo koko tarkasteluvälillä $[a, b]$ saadaan summana osaväleillä tapahtuvien kertymien tarkoista arvoista. Täten koko välillä $[a, b]$ laskettavan suureen likiarvo saadaan osaväleillä tapahtuvien kertymien likiarvojen summana $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$.

5) Oletetaan (tämä voi olla vaikea nähdä geometrisesti tai fysikaalisesti; siksi siitä jäljempänä), että likiarvo $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ lähestyy laskettavan suureen tarkkaa arvoa, kun osavälien lukumäärä n kasvaa rajatta.

6) Tällöin tarkkaa arvoa *merkitään* symbolilla $\int_a^b f(x)\,dx$, joka heijastaa likiarvosummia, joilla yhä tarkempia likiarvoja voidaan määrittää.

Tämä likiarvostrategia keksittiin siis jo Antiikissa. Arkhimedes pystyi esimerkiksi pallon tilavuuden likiarvosummien (palloa approksimoivien kiekkojen tilavuuksien summien) avulla päättelemään, mitä arvoa ne lähestyvät. Pallon tilavuuden määrittämistä hän piti elämänsä suurimpana saavutuksena. Sittemmin 1600-luvulla, derivaatan keksimisen jälkeen, keksittiin myös, miten tarkka arvo voidaan laskea ilman likiarvosummia yhtälön (*) avulla.

Huomautus. Joissain sovellutuksissa meillä on suoraan lähtökohtana 4. kohdan likiarvosummat $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$. Näin on esimerkiksi tarkasteltaessa veden paineen aiheuttamaa kokonaisvoimaa padon seinämään.

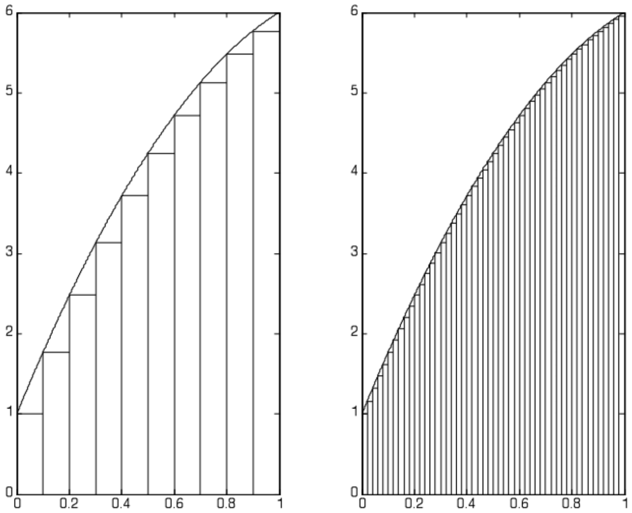
Huomautus. Koska määrätyn integraalin lausekkeiden johtamisessa toistuu aina samanlaisia merkintöjä ja päättelyitä, tekniikan ja fysiikan sovellutuksissa nämä johdot tehdään virtaviivaistetusti *differentiaalisella* päättelyllä.

Likiarvostrategiaan ja sen toimivuuteen tutustutaan luonnollisesti ensin numeerisilla esimerkeillä. Olen huomannut ammattikorkeakoulussa, että opiskelijat pitävät siitä, että tässäkin palataan historiassa taaksepäin eli siihen tapaan, jolla Arkhimedes määritti likiarvoja.

Arkhimedeen ala- ja ylälikiarvoja määrätylle integraalille

Arkhimedes sovelsi likiarvo-strategiaa aina siten, että hän määräsi laskettavalle arvolle ala- ja ylälikiarvot. Alalikiarvon hän sai, kun hän kullakin osavälillä käytti sellaista funktion $f(x)$ osavälillä saamaa arvoa $f(x'_k)$, että likimääräinen kertymä $f(x'_k)\Delta x$ on pienempi tai yhtä suuri kuin todellinen kertymä kyseisellä osavälillä. Vastaavasti hän määritti ylälikiarvon.

Tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä: on määrättävä likiarvo x-akselin välin $[0, 1]$ yläpuolelle ja funktion $f(x) = -3x^2 + 8x + 1$ kuvaajan alapuolelle jäävälle pinta-alalle (kuva 1).



Kuva 1. Funktion $f(x) = -3x^2 + 8x + 1$ kuvaaja välillä $[0, 1]$. *Vasemmassa osakuvassa väli on jaettu 10 osaväliin ja kullakin osavälillä funktiota on esitetty likimäärin vakiofunktiolla, jonka arvo on funktion arvo osavälin alkupisteessä. Oikeassa osakuvassa osavälejä on 50.*

Sovelletaan tähän esimerkkiin edellä selostettua likiarvomenettelyä. Vakiotapauksena on nyt suorakaiteen pinta-alan määrääminen (korkeus on vakio). Kuvan 1 vasempaan osakuvaan on piirretty tapaus, jossa väli

$[0,1]$ on jaettu kymmeneen osaväliin. Kunkin osavälin yläpuolella olevan pinta-alan suuruus lasketaan likimäärin suorakaiteen avulla, jonka korkeus on funktion kuvaajan korkeus osavälin alkupisteessä.

Kun kymmenen osavälin tapauksessa sovelletaan edellä kuvattua likiarvomenettelyä, kohdassa 4 päädytään pinta-alan likiarvoon 3,745. Tämä likiarvo onkin alalikiarvo pinta-alalle, sillä likiarvo on kuvaan piirrettyjen suorakaiteiden pinta-alojen summa, joka on selvästi pienempi kuin laskettava pinta-ala.

Vastaavasti tämän monotonisesti kasvavan funktion kohdalla saadaan pinta-alan ylälikiarvo, kun jokaisella osavälillä vakioarvona käytetään osavälin loppupisteessä olevaa funktion arvoa (tästä voi piirtää kuvaa 1 vastaavan kuvan).

On helppo vakuuttua geometrisesti (vertaa kuvan 1 osakuvat), että alalikiarvot (samoin kuin ylälikiarvot) lähestyvät pinta-alan tarkkaa arvoa, kun tarkasteluväli jaetaan yhä useampaan osaväliin. Seuraava taulukko esittää, miten ala- ja ylälikiarvot muuttuvat, kun osavälien lukumäärää kasvatetaan.

Osavälien lukumäärä	Alalikiarvo pinta-alalle	Ylälikiarvo pinta-alalle
10	3.745000000000000	4.245000000000000
100	3.974950000000002	4.024950000000001
1 000	3.997499499999999	4.002499499999999
10 000	3.999749995000002	4.000249995000002
100 000	3.999974999950032	4.000024999950032
1 000 000	3.999997499999456	4.000002499999456
10 000 000	3.999999750000234	4.000000250000234

Taulukko 1. Kuvan 1 pinta-alan ala- ja ylälikiarvoja osavälien lukumäärän kasvaessa.

Taulukon alimmalta riviltä näemme, että laskettava pinta-ala on varmuudella välillä 3,999 999 7 ... 4,000 000 3. Toisin sanoen se on $4 \pm 0{,}000\,000\,3$, ja näyttää siltä, että pinta-alan tarkka arvo olisi 4.

Määrätyn integraalin lausekkeen johtamisesta ja matemaattisesta määritelmästä

Sen jälkeen kun edellisen kaltaisissa numeerisissa esimerkeissä on saatu tuntumaa likiarvostrategian toimivuuteen, voidaan johtaa algebrallisia integraalilausekkeita eri sovellutuksille. Ala- ja ylälikiarvotarkastelut tekevät ilmeiseksi sen, että kummatkin likiarvot lähestyvät tarkkaa arvoa. Edelleen tällöin on ilmeistä, että ei tarvitse tarkastella ala- tai ylälikiarvoja, vaan voi tarkastella edellä olevan 6-kohtaisen likiarvostrategian mukaisia likiarvosummia (joiden arvot ovat pakosti ala- ja ylälikiarvojen välissä). Algebrallisissa tarkasteluissa päädytään esimerkiksi tavanomaisessa pinta-alan tapauksessa määrättyyn integraaliin $\int_a^b f(x)\,dx$.

Esitetyssä likiarvostrategiassa määrätyn integraalin määritelmä on sanallinen. Itse asiassa olen ammattikorkeakoulujen matematiikassa siirtynyt yleensä tällaiseen varhaisen analyysin tapaan määritellä määrätty integraali sanallisesti, siis käyttämättä raja-arvomerkintöjä (koska matemaattista määritelmää ei myöhemmin käytetä hyväksi). Näin on menetelty yhdessä lukiokirjassa ja ammattikorkeakoulun oppikirjassa [2]. Näissä kirjoissa ei ole käytetty edes summamerkkiä likiarvosummissa, vaan summat on kirjoitettu auki. Mutta ilman summamerkkiä on ehkä vaikea hahmottaa, miten määrätyn integraalin lauseke syntyy heijastamaan likiarvolaskuja.

Olisi hyvä, jos integraalilaskenta palautettaisiin lukion lyhyeen matematiikkaan. Tällöin määrätty integraali voitaisiin esittää ilman raja-arvomerkintöjä. Integraalilaskennalla on niin suuri merkitys esimerkiksi tekniikan opinnoissa, että olisi hyvä tutustua sen perusteisiin jo lukiossa.

Kun määrätty integraali määritellään matemaattisesti, niin edellä olevaan 6-kohtaiseen likiarvomenettelyyn suoraan liittyvä määritelmä on seuraava:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

Näin Väisäläkin (ks. [1], s. 154) määritteli määrätyn integraalin matemaattisesti (tosin toisenlaisia merkintöjä käyttäen). Ainoa ehto yllä olevan määritelmän pätevyydelle on funktion f jatkuvuus. Sovellutuksissa esiintyy epäjatkuvuuksia, mutta silloin yleensä tarkasteluväli jaetaan osaväleihin, joissa funktio on jatkuva, ja osavälit tarkastellaan erikseen.

Likiarvosummien tarkentumisesta

Kun siis sovellutuksissa muodostetaan määrätyn integraalin lausekkeita, lähtökohtana ovat likiarvosummat. Lukion matematiikassa tämä on ainoa kerta, kun käytännön suureisiin liittyvät likiarvot tulevat enemmälti esiin. Tämä voi olla monelle opettajallekin asia, josta on vähän omia kokemuksia, mihin johdannossa viitattiin. Siksi asiaan tulee kiinnittää huomiota, ja johtojen loogisuuden vuoksi on tärkeää perustella, miksi likiarvosummat lähestyvät laskettavan suureen tarkkaa arvoa, kun osavälien lukumäärä kasvaa rajatta. Yksi perustelutapa ovat edellisen esimerkin kaltaiset numeeriset laskut ja geometriset perustelut (kuva 1).

Mutta esimerkiksi tapausta, jossa määrätään kappaleen tilavuus määrättynä integraalina, kun poikkipinta-alan funktio tunnetaan, on yleisessä tapauksessa hankala havainnollistaa geometrisesti. Perustelu voidaan tehdä vastaansanomattomasti algebrallisen keskiarvotarkastelun avulla, kuten on esitetty esimerkiksi lukion kirjan [3] lisätiedoissa. Yleisemmällä tasolla vastaavanlaisia vakuuttavia keskiarvoperusteluja, jotka sopivat korkeakoulujen matematiikan opintoihin, on käsitelty viitteessä [4].

Ei ole mitään yleistä tapaa, jolla voidaan perustella se, että likiarvot lähestyvät laskettavan suureen tarkkaa arvoa. Ehkä yleisin tapa perustella likiarvotarkastelut on se, että todetaan, että kunkin osavälin kertymän likiarvon *suhteellinen virhe* menee nollaan osavälin pituuden lähestyessä nollaa. Tämä riittää, sillä seuraava mahdollinen epäilys on turha: vaikka osavälien lukumäärän kasvaessa kullakin osavälillä vakiokaava toimisi yhä tarkemmin, kasvaako kokonaisvirhe sen takia, että likimääräisten termien lukumäärä kasvaa. Tämän epäilyksen torjuu seuraava lause.

Lause. *Olkoon meillä sellaisia positiivisia likiarvoja (tai kaikki negatiivisia), että kunkin tarkka arvo poikkeaa korkeintaan p % likiarvosta. Tällöin tarkkojen arvojen summa poikkeaa korkeintaan p % likiarvojen summasta.*

Tämän lauseen merkitys on siinä, että jos saamme jokaiseen osaväliin liittyvän kertymän likiarvon esimerkiksi 0,01 %:n suhteellisella tarkkuudella, niin vaikka osavälejä olisi kuinka monta, tarkkojen kertymien summa poikkeaa korkeintaan 0,01 % kertyminen likiarvojen summasta.

Tämä lause on helppo todistaa algebran avulla. Todistuksen idean näkee seuraavasta numeroesimerkistä. Olkoon meillä likiarvot 100, 200 ja 500, joista tarkat arvot poikkeavat korkeintaan 1 %:n verran. Siten summan tarkka arvo on lukujen 792 $(= 99 + 198 + 495)$ ja 808 $(= 101 + 202 + 505)$ välillä eli pahimmassa tapauksessa summan tarkka arvo poikkeaa 1 %:n likiarvojen summasta 800.

Jos likiarvosummassa on sekä positiivisia että negatiivisia termejä, on ilmeistä, että positiivisten termien summa tarkentuu, kuten myös negatiivisten termien summa, ja siten koko summa tarkentuu.

Suhteellisen virheen nollaan menemisestä voi vakuuttua usein seuraavanlaisella päättelyllä. Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 1 pinta-alan tapausta (joka edellä perusteltiin myös toisenlaisella tavalla). Oikeanpuoleisen osakuvan ensimmäisellä osavälillä kertyvän pinta-alan likiarvoksi on otettu suorakaiteen pinta-ala, jonka korkeus on funktion kuvaajan korkeus välin alkupisteessä. Alueen korkeus kasvaa kuitenkin noin 20 % tällä osavälillä. Siten aivan karkeasti arvioiden tämän osavälin pinta-alan likiarvossa (suorakaiteen pinta-ala) on 20 %:n virhe.

Ajatellaan, että kaksinkertaistamme osavälien lukumäärän, jolloin osavälien pituus puolittuu. Geometrisesti näemme kuvasta 1, että kun puolitamme ensimmäisen osavälin, niin uudella ensimmäisellä osavälillä funktion kasvukin noin puolittuu eli on noin 10 %, jolloin pinta-alan likiarvon suhteellinen virhekin suunnilleen puolittuu ensimmäisellä osavälillä. Kaikkien osavälien kohdalla tapahtuvat vastaavanlaiset suhteellisten virheiden puolittumiset. Osavälien lukumäärän kaksinkertaistumisia edelleen ajateltaessa, osaväleihin liittyvien pinta-alojen suhteelliset virheet aina suunnilleen puolittuvat, jolloin lauseen mukaisesti likiarvosummankin suhteellinen virhe joka kerta suunnilleen puolittuu. Täten likiarvosummat lähestyvät pinta-alan tarkkaa arvoa (tästä voi piirtää lukusuorakuvan).

Vastaavasti erittäin monessa muussakin sovellutuksessa voidaan funktion $f(x)$ *jatkuvuuden perusteella* vakuuttua geometrisesti tai fysikaalisesti siitä, että jokaisen osavälin kertymän likiarvon $f(x_k)\Delta x$ suhteellinen virhe menee nollaan, kun Δx lähestyy nollaa.

Lauseen esittäminen ja sen mukaiset perustelut suhteellisine virheineen vievät ehkä niin paljon aikaa, että ne on jätettävä korkeakouluopintoihin.

Yhteenveto

Jatko-opintojen tarpeita silmälläpitäen kirjoituksessa on ehdotettu palaamista Väisälän [1] esittämään tapaan motivoida ja määritellä määrätty integraali. Hänen ja nykyisten amerikkalaisten calculus-kirjojen tapaan kannattanee lukioissa määrättyjen integraalien lausekkeet johtaa likiarvosummien kautta, ei differentiaalisesti.

Väisälän oppikirjan ja calculus-kirjojen puutteena voi pitää sitä, että niissä ei yleensä riittävästi perustella sitä, että geometristen tai fysikaalisten suureiden likiarvosummat lähestyvät laskettavan suureen tarkkaa arvoa. On huomattava, että koska kyse on geometriaan tai fysiikkaan liittyvien suureiden likiarvojen tarkasteluista, myös perustelut vetoavat geometrisiin ja fysikaalisiin mielikuviin ja käsityksiin, ei puhtaasti matemaattisiin asioihin Mitään kaikkiin tapauksiin soveltuvaa perustelutapaa ei ole olemassa. Artikkelissa on tarkasteltu, miten perusteluja voi tehdä esimerkiksi numeerisin laskuin, geometrisen tarkasteluin ja esitettyä lausetta hyväksi käyttäen. Myös muita tapoja esiintyy, mutta esimerkiksi lukiossa varmaan riittää se, että muutama määrätyn integraalin lauseke perustellaan kunnolla ja muut annetaan valmiina kaavoina.

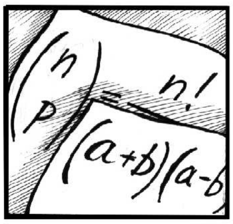
Viitteet

[1] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 2*, WSOY, 1963.

[2] E. Sorvali, P. Toivonen, *TAM alfa*, WSOY, 2004.

[3] P. Kontkanen, J. Lehtonen, K. Luosto, S. Savolainen, *Pyramidi10*, Tammi, 2007.

[4] K. Tarvainen, Justifying differential derivations when setting up definite integrals, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 39, No 1, 61–68, 2008.



Miten integroitiin, kun ei vielä osattu integroida?

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Koulussa ja muuallakin differentiaali- ja integraalilaskentaan tutustutaan nykyään niin, että ensin opitaan derivaatta ja sitten määritellään funktion f integraalifunktio $\int f(x)\,dx$ sellaisena funktiona, jonka derivaatta on f. Sitten muistellaan derivointisääntöjä ja päätellään niistä erinäisiä integrointikaavoja, kuten

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}.$$

Hiukan yllättävänä bonuksena tulee sitten tieto, jonka mukaan integraalin avulla voi määrittää mielenkiintoisten suureiden, esimerkiksi pinta-alojen ja tilavuuksien arvoja.

Integraalin historiallinen kehitys ei ole ihan kulkenut näitä latuja. Integroinnin ja derivoinnin yhteyden oivalsivat *Isaac Newton* ja *G. W. Leibniz* 1600-luvun lopulla. Tarve määrittää esimerkiksi pinta-aloja johti kuitenkin jo aikaisemmin moniin kekseliäisiin ”integrointimenetelmiin”. Tässä esitellään muutamia.

Kun on tarkoitus selvittää jonkin käyrärajaisen alueen pinta-ala tai kappaleen tilavuus, niin aika luonnollinen lähestymistapa on yrittää täyttää kyseessä oleva kuvio mahdollisimman hyvin sellaisilla kuvioilla tai kappaleilla, joiden ala tai tilavuus hallitaan. Jos ympyrä pakataan mahdollisimman täyteen tasakylkisiä kolmioita, joiden kärki on ympyrän keskipisteessä ja kannan päätepisteet ympyrän kehällä, ja jos kolmioiden kannat ovat lyhyitä, niin niiden korkeus on likimain ympyrän säde ja yhteenlaskettu ala lähellä lukua, joka on puolet ympyrän säteestä kerrottuna ympyrän kehän pituudella. Likiarvo on sitä tarkempi, mitä pienempiin ja useampiin kolmioihin ympyrä jaetaan. Kun ympyrän kehän pituuden ja säteen r suhde on – määritelmän mukaan – 2π, niin ympyrän alan kaava $A = \pi r^2$ tulee ainakin hyvin uskottavaksi. Samalla tavalla voimme jakaa pallon melkein kokonaan pyramideiksi, joiden huippu on pallon keskipisteessä ja muut kärjet pallon pinnalla. Jos r-säteisen pallon pinta-ala on $S(r)$, niin pyramidin tilavuuskaava johtaa siihen, että pallon tilavuus on $V = \frac{1}{3}rS(r)$. Jos vielä tiedettäisiin, että $S(r) = 4\pi r^2$, saataisiin tuttu pallon tilavuuden kaava.

Tällaiset päättelyt eivät ole ihan näin suoraviivaisia, jos tutkittava alue tai kappale ei ole yhtä symmetrinen kuin ympyrä tai pallo. Katsotaan seuraavassa, miten muutamat varhaiset matemaatikot selvittivät sellaisen alueen pinta-alaa, jota rajoittaa paraabelin $y = x^2$ kaari tai yleisemmin käyrän $y = x^p$ kaari ja kaksi janaa. Oiomme vähän: xy-koordinaatit ovat olleet käytössä vasta 1600-luvulta, ja varhaisten aikojen matemaatikot joutuivat käsittelemään käyriään hankalammin.

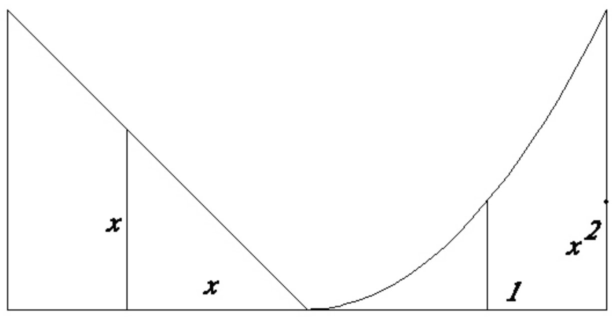
Arkhimedes

Arkhimedeen laista ja *heureka!* -huudahduksesta kuuluisa *Arkhimedes Syrakusalainen* (287–212 eKr.) on yksi kaikkien aikojen merkittävimpiä matemaatikkoja. Arkhimedes laski kahdella tavalla paraabelin segmentin alan. Toinen tapa perustui segmentin pilkkomiseen kolmioiksi, joiden alat muodostivat geometrisen lukujonon; tämän summan Arkhimedes hallitsi ja pystyi aukottomasti perustelemaan saamansa tuloksen. Toinen Arkhimedeen menetelmä oli lähempänä nykyaikaista integrointia. Esitellään se tilanteessa, jossa laskettavana on paraabelin $y = x^2$ ja suorien $y = 0$ ja $x = 1$ rajaama alueen pinta-ala S. Nykyaikaisin merkinnöin haemme siis integraalin

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

arvoa.

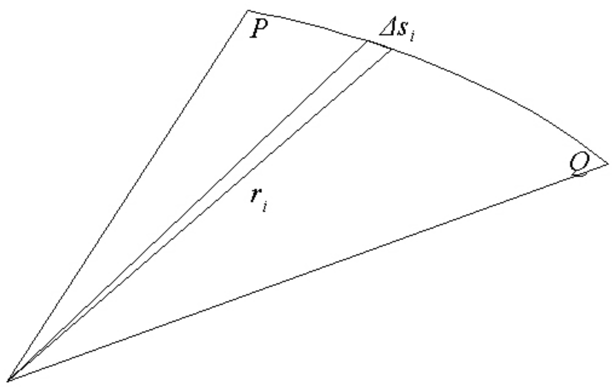
Arkhimedes ajatteli näin: pinta-ala koostuu pystysuorista janoista joiden päätepisteet ovat $(x, 0)$ ja (x, x^2) eli janoista $[(x, 0),(x, x^2)]$. Tällaisen janan pituus on siis x^2. Siirretään jana janaksi $[(1, 0),(1, x^2)]$, ikään kuin pystyyn pisteen $(1, 0)$ kohdalle. Ajatellaan sitten vaakaa, joka tasapainotetaan pisteessä $(0, 0)$. Nyt siirretty jana ja jana $[(-x, 0),(-x, x)]$ tasapainottavat vaa'assa toisensa: toisen varren pituus on 1 ja varren päässä on massa x^2, toisen varren pituus on x ja varren päässä on massa x. Mutta kun x kasvaa nollasta yhteen, niin tasapainopisteen vasemmalla puolella olevat janat peittävät kolmion, jonka kärjet ovat $(-1, 0)$, $(0, 0)$ ja $(-1, 1)$. Koska kolmio koostuu kaikista janoista $[(-x, 0),(-x, x)]$ ja kukin jana tasapainottaa janan $[(0, 1),(0, x^2)]$, niin kolmion massa tasapainottaa suoralle $x = 1$ kootun alueen A massan. Kolmion ala eli massa on $\frac{1}{2}$ ja sen voidaan ajatella keskittyvän kolmion painopisteeseen, jonka x-koordinaatti on $-\frac{2}{3}$ (muistamme, että kolmion painopiste on sen keskijanojen leikkauspiste ja että keskijanojen leikkauspiste jakaa keskijanat suhteessa $2 : 1$). Vaa'an tasapainoehdoksi tulee $S \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$. Siis $S = \frac{1}{3}$.



Stevin ja Kepler

Hollantilainen *Simon Stevin* (1540–1603) oli monitoiminen mies. Nykykielellä häntä voisi nimittää insinööriksi, mutta matematiikan historia muistaa hänet yhtenä ensimmäisistä desimaalilukujen käyttäjistä. Stevin suoritti integrointeja mm. painopisteen määrittämiseksi. Hän ajatteli, että jos kolmio jaetaan sivun suuntaisiksi kapeiksi kaistaleiksi, niin jokainen tällainen tasapainottuu keskipisteensä kohdalla. Mutta tästä seuraa, että koko kolmio on tasapainossa, kun se tuetaan pitkin keskijanaa. Sama pätee jokaiselle kolmelle keskijanalle, joten kolmion painopisteen on oltava keskijanojen leikkauspiste.

Johannes Kepler (1571–1630) muistetaan planeettojen liikkeitä hallitsevista Keplerin laeista, joiden pohjalle Newton myöhemmin rakensi gravitaatioteoriansa. Yhden lakinsa Kepler muotoili pinta-alan avulla: hän esitti, että auringosta planeettaan piirretty säde pyyhkäisee aina samassa ajassa saman pinta-alan. Näin ollen planeetta liikkuu nopeammin ollessaan lähellä aurinkoa ja hitaammin ollessaan kauempana.



Erikoista on, että Kepler teki lakiaan johtaessaan kaksi toisensa kumoavaa virhettä niin, että lopputulos on oikein. Kepler ajatteli, että jos planeetta kulkiessaan radallaan pisteestä P pisteeseen Q käyttää ajan t, ja jos kaari P:stä Q:hun jaetaan lyhyisiin osakaariin, joiden pituus on Δs_i niin, että osakaaren Δs_i kohdalla planeetan etäisyys auringosta on r_i, ja jos planeetan nopeus osakaaren Δs_i kohdalla on v_i ja se käyttää osakaaren yli kulkemiseen ajan Δt_i, niin

$$t = \sum \Delta t_i = \sum \frac{\Delta s_i}{v_i}.$$

Nyt Kepler otaksui lisäksi, erheellisesti, että planeetan nopeus on kääntäen verrannollinen sen etäisyyteen auringosta eli $v_i = \frac{k}{r_i}$. Siis

$$t = \frac{1}{k} \sum r_i \Delta s_i.$$

Keplerin toinen erehdys oli pitää kolmiota, jonka yksi kärki on aurinko ja toiset kaksi osakaaren Δs_i päätepisteet, tasakylkisenä ja olettaa sen pinta-alaksi $\frac{1}{2} r_i \Delta s_i$ Kun auringosta planeettaan piirretty säde pyyhkii ajassa t suunnilleen kolmioiden yhteen lasketun alan A, Keplerin kaksi virhettä yhdessä johtivat tulokseen $t = \frac{2}{k}A$, eli aika ja ala ovat verrannollisia.

Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598–1647) oli italialainen matemaatikko, Galileo Galilein oppilas. Cavalieri laski ”integraaleja” yhdistelemällä luovalla tavalla eriulotteisia suureita ja laskemalla yhteen esimerkiksi äärettömän monta nollan suuruista pinta-alaa.

Selvitetään

$$I = \int_0^1 x^2\,dx$$

Cavalierin tavalla. Cavalieri ajatteli, että ”I” on kaikkien x-sivuisten, mutta paksuutta vailla olevien neliöiden ”summa”, kun x saa arvot nollasta yhteen. Jos yksikköneliö jaetaan lävistäjällä, esimerkiksi suoralla $y = x$ kahtia, niin jokainen y-akselin suuntainen jana jakautuu kahdeksi osaksi, joiden pituudet ovat x ja $1-x$. Kaikkien 1-sivuisten neliöiden summa, joka eittämättä on 1-särmäinen kuutio, jonka tilavuus on 1, on siis sama kuin $x + (1-x)$ sivuisten neliöiden summa. Koska $(x+(1-x))^2 = x^2+(1-x)^2+2x(1-x)$, ja kaikkien x-sivuisten ja kaikkien $(1-x)$-sivuisten neliöiden summa on sama, on oltava

$$1 = 2\sum x^2 + 2\sum x(1-x). \tag{1}$$

(Summamerkkiä $\sum$ on tässä käytetty hiukan epäpuhdasoppisesti, Cavalierin hengessä.) Mutta jos nyt

$$x = \frac{1}{2} - z, \quad 1 - x = \frac{1}{2} + z,$$

niin

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - z^2$$

ja

$$1 = 2\sum x^2 + \frac{1}{2} - 2\sum z^2. \tag{2}$$

Kun x käy läpi kaikki arvot nollasta yhteen, niin z käy kahdesti läpi arvot nollasta puoleen. Yhdenmuotoisten kolmiulotteisten kappaleiden tilavuuksien suhde on vastinjanojen pituuksien suhteen kolmas potenssi. Niinpä

$$\sum z^2 = \frac{1}{8}\sum x^2.$$

Kun otetaan huomioon, että kaavassa (2) oleva z^2-summa on laskettava kahdesti, saadaan

$$\frac{1}{2} = 2\sum x^2 - 2\cdot 2\cdot\frac{1}{8}\sum x^2.$$

Tästä on helppo ratkaista, että

$$\sum x^2 = \frac{1}{3} \tag{3}$$

eli

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Sama tekniikka puree korkeampiinkin potensseihin, vaikka geometrinen intuitio onkin vaikeampaa: tarvittaisiin enemmän kuin kolme ulottuvuutta. Mutta merkitään $y = 1 - x$ ja ”lasketaan”:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum 1^3 = \sum (x+y)^3 \\ &= \sum x^3 + \sum y^3 + 3\sum x^2y + 3\sum xy^2 \\ &= 2\sum x^2 + 6\sum x^2y. \end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruusmerkki perustuu symmetriaan: kun x saa kaikki arvot nollasta yhteen, niin y:kin saa, vaikka eri järjestyksessä. Kaavojen (1) ja (3) nojalla

$$1 = 2\sum x^2 + 2\sum xy$$

eli $\sum xy = \dfrac{1}{6}$. Mutta nyt

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \sum xy = \sum (1\cdot xy) \\ &= \sum (x+y)xy = \sum x^2y + \sum xy^2, \end{aligned}$$

joten

$$\sum x^2y = \frac{1}{12}.$$

Mutta tästä seuraa, että

$$\sum x^3 = \frac{1}{2}\left(1 - 6\cdot\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$

Siis

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

Pascal

”Kolmiostaan” ja uskonnollis-filosofisista mietekirjoituksistaan tunnettu ranskalainen *Blaise Pascal* (1623–62) lähti selvittämään ongelmaa $\int_0^1 x^p\,dx = ?$ aivan eri suunnasta. Merkitään $x_k = \dfrac{k}{n}$. On aika luonnollista ajatella, että käyrän $y = x^p$ ja x-akselin välistä pinta-alaa voi approksimoida kapeilla suorakaiteilla, joiden kärjet ovat pisteissä $(x_k, 0)$, $(x_{k+1}, 0)$, (x_k, x_{k+1}^p) ja (x_{k+1}, x_{k+1}^p). Tällaisen suorakaiteen ala on $x_{k+1}^p \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{(k+1)^p}{n^{p+1}}$ ja suorakaiteiden yhteinen ala on

$$\frac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + \cdots + n^p). \tag{4}$$

Kun n kasvaa, suorakaiteiden ala tulee lähelle käyrän ja suoran välistä alaa. Jos (4):n lauseke lähestyy arvoa $\dfrac{1}{p+1}$, niin

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1},$$

niin kuin pitääkin. Mutta miten selvitetään kaavassa (4) oleva summa?

Otetaan avuksi Pascalin kolmio eli binomikaava. Sen mukaanhan esimerkiksi

$$(k+1)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} k^i,$$

missä olemme merkinneet tavan mukaan

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!};$$

$\binom{p}{i}$ on siis Pascalin kolmion p:nnen rivin i:s luku (kun ensimmäinen rivi on se, jolla on kaksi ykköstä ja kunkin rivin vasemmanpuoleisimmalle luvulle, joka on 1, annetaan järjestysluku 0). Pascalin idea on kirjoittaa erotus $(n+1)^{p+1} - 1^{p+1}$ summaksi $((n+1)^{p+1} - n^{p+1}) + (n^{p+1} - (n-1)^{p+1}) + \cdots + (2^{p+1} - 1^{p+1})$ ja soveltaa jokaiseen yhteenlaskettavaan binomikaavaa. Silloin käy näin:

$$\begin{aligned}(n+1)^{p+1} - 1^{p+1} &= \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} k^i\\ &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i\\ &= \sum_{i=1}^{p} \binom{p+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i + n.\end{aligned}$$

Edellinen relaatio näyttää selvemmältä, jos se kirjoitetaan muotoon

$$\begin{aligned}(n+1)^{p+1} - (n+1) = \binom{p+1}{p} \sum_{k=1}^{n} k^p\\ + \binom{p+1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1} \sum_{k=1}^{n} k.\end{aligned}$$

Kun tätä kaavaa sovelletaan peräkkäin arvoilla $p = 1, 2, \ldots$, niin havaitaan, että aina

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \text{ alempia } n\text{:n potensseja.}$$

Mutta tästähän seuraa, että

$$\frac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + \cdots + n^p)$$

lähestyy n:n kasvaessa arvoa $\dfrac{1}{p+1}$! Pascal on päässyt kaavaan

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}.$$

Fermat

Pierre de Fermat (1601–65), ranskalainen lakimies, saavutti kuolemattoman maineen matemaatikkona rohkeiden lukuteoreettisten tulosten ja otaksumiensa vuoksi. Fermat'n lähestymistapa kysymykseen $\int_0^1 x^p\,dx = ?$ oli sekin omanlaisensa ja laskennollisesti yksinkertaisempi kuin Pascalin menettely. Fermatkin lähestyi käyrän $y = x^p$ ja x-akselin väliin jäävää pinta-alaa suorakaiteiden avulla, mutta Fermat'n suorakaiteiden leveys ei ollut vakio. Fermat valitsi luvun a, joka on vähän ykköstä pienempi, ja tarkasteli suorakaiteita, joiden x-akselilla olevat kärjet ovat pisteissä $1, a, a^2, a^3, \ldots$. Jos suorakaiteen kärjet ovat $(a^{k+1}, 0)$, $(a^k, 0)$, $(a^k, (a^k)^p)$ ja $(a^{k+1}, (a^k)^p)$, niin sen ala on $a^{kp}(a^k - a^{k+1}) = (1-a)a^{(p+1)k}$ ja kaikkien suorakaiteiden alojen summa saadaan geometrisen sarjan summan avulla; se on

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=0}^{\infty} a^{(p+1)k} &= \frac{1-a}{1-a^{p+1}}\\ &= \frac{1}{1+a+a^2+\cdots+a^p}.\end{aligned}$$

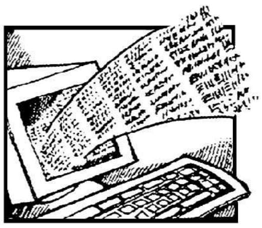
Kun a tulee lähelle ykköstä, jokainen nimittäjän yhteenlaskettava tulee lähelle ykköstä ja nimittäjä itse lähelle lukua $p+1$. Kaava

$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$$

on saatu.

Verkko-Solmussa on ilmestynyt lukuteorian diplomitehtävät

`http://solmu.math.helsinki.fi/2008/diplomi/diplomi_lukuteoria.pdf`



Pääsiäinen on aina sunnuntaina

Kimmo Vehkalahti
Sosiaalitieteiden laitos, tilastotiede
Helsingin yliopisto

Innostuin (otsikkoa myöten!) *Matti Lehtisen* jutusta "Jouluaatto on harvemmin sunnuntaina" (Solmu 3/2011). Juhlapäivien sijoittuminen kalenteriin on kiehtova aihe, ja sitä voi lähestyä matemaattisesti monelta suunnalta. Keskitän huomioni pääasiassa pääsiäiseen, joka on laskennallisesti erityisen mielenkiintoinen.

Tarkastelen lisäksi eräitä muita juhlapäiviä, joista osa on pääsiäisen tapaan kirkollisia (kuten pyhäinpäivä) ja osa maallisia (kuten vappu). Yhteiskunnallisesti kiinnostavia juhlapäivistä tekevät niiden aiheuttamat poikkeukset arkirutiineihin, esimerkiksi kauppojen aukioloaikoihin. Juhlapäivät ja etenkin niitä edeltävät aattopäivät asettavat myös yllättäviä haasteita muun muassa myyntiennusteiden laatimiseen. Tarkasteluje-ni taustalla onkin pari vuotta sitten eräälle yritykselle räätälöity myynnin analysointijärjestelmä, jota ohjelmoidessa sai perehtyä juhlapäiviin perusteellisesti.

Uskonnollisia juhlia kuten uskontojakin on maailmassa lukuisia, mutta rajaan tarkastelut Suomessa vietettäviin, kristillisen kirkkovuoden juhliin. Yhdessä maallisten juhlien kanssa ne muodostavat sarjan, joka toistuu suomalaisessa kalenterissa vuodesta toiseen. Sarja on silti aina hieman erilainen riippuen siitä, mihin kohtiin tietyt juhlat kulloinkin sijoittuvat. Erikoisen mielenkiintoisia tilanteita voi syntyä kirkollisten ja maallisten juhlien "törmätessä". Laskennallisilla keinoilla tällaisia ilmiöitä voi mukavasti tutkia minkä tahansa vuoden osalta. Soveltavana tilastotieteilijänä lähestyn aihetta tilastollisen tietojenkäsittelyn näkökulmasta.

Muste leviää ja jättää jälkiä

Kirjoitan tätä Musteella, joka on uusi, R-ohjelmistolle kehitetty, vapaasti saataville tuleva avoimen lähdekoodin toteutus Survo-ohjelmistosta. Survo on professori *Seppo Mustosen* elämäntyö, joka alkoi jo 1960-luvulla ja jatkuu edelleen. Musteen päävastuullinen kehittäjä on *Reijo Sund*, joka 2009 esitti idean Musteesta sekä sen toteuttamisesta R:n laajennuspakettina.

R on *Ross Ihakan* ja *Robert Gentlemanin* alullepanema toteutus professori *John M. Chambersin* johdolla kehitetystä tilastollisesta S-ohjelmointikielestä. Nykyisin R on laajan kansainvälisen käyttäjäyhteisön kehittämä, vapaasti saatava ohjelmisto, joka on noussut 2000-luvun aikana suosioon tilastotieteen, matematiikan ja tietojenkäsittelyn piirissä, mutta myös yhä useammalla näitä menetelmätieteitä hyödyntävillä tieteenaloilla.

Survo ja R ovat hioutuneet vuosikymmenien aikana ja ne sisältävät monia kekseliäitä tapoja data-analyysiin, matriisilaskentaan, kuvien piirtoon ja raportointiin. Tärkein Survon innovaatioista on *editoriaalinen käyttötapa*, jolla työskentelystä jää talteen hyödyllisiä jälkiä. Muste liittää tämän uniikin käyttötavan osaksi R:ää.

Aloittaessani tätä juttua (5.2.2012) Musteen versionumero oli 0.4.80. Tämänhetkisen versionumeron voi tarkistaa sivulta `www.survo.fi/muste`, josta Musteen voi myös ladata käyttöönsä. Muste leviää kaikkialle (Windows, Mac, Linux).

Juhlallista laskentaa

Pääsiäinen on joulun ohella kirkkovuoden suurimpia juhlia. Siihen kuuluu peräti kolme pyhäpäivää: *pitkäperjantai*, joka nimensä mukaisesti on perjantai, *pääsiäispäivä*, joka on aina sunnuntai sekä *toinen pääsiäispäivä*, joka on maanantai. Pääsiäinen hallitsee kirkollista juhlavuotta, sillä se määrittää useiden muiden juhlapäivien, kuten helatorstain, ajankohdan. Laskennallisesti kiinnostavaksi pääsiäisen tekee sen ajankohta, joka riippuu muun muassa kuun kierrosta. Tuo ajankohta vaihtelee vuosittain yli kuukauden pituisen ajanjakson puitteissa: aikaisin mahdollinen pääsiäissunnuntai on jo 22. maaliskuuta ja myöhäisin vasta 25. huhtikuuta.

Pääsiäissunnuntain päivämäärä on osattu selvittää laskennallisesti jo keskiajalla. Tätä aikoinaan erittäin tärkeällä sijalla ollutta toimintaa kutsuttiin latinankielisellä sanalla *computus*, joka on sittemmin alkanut yleisemminkin tarkoittaa laskentaa. Englanniksi sanan johdoksia ovat muun muassa *computation* ja *computer*. Ei niistä pääsiäinen ihan ensimmäiseksi tule mieleen!

Ensimmäisen matemaattisen algoritmin pääsiäissunnuntain päivämäärän laskemiseen kehitti lukemattomista muistakin yhteyksistä kuuluisa matemaatikko *Carl Friedrich Gauss* 1800-luvun alussa. Tuolloin oli jo monissa maissa siirrytty vanhasta, epätarkasta juliaanisesta kalenterista tarkempaan, nykyisinkin käytössä olevaan, gregoriaaniseen kalenteriin. Suomessa siirtyminen tapahtui Ruotsi–Suomen aikana vuonna 1753, eräissä muissa Euroopan maissa vasta 1900-luvulla.

Gaussin algoritmi ja muut vastaavat menetelmät perustuvat melko monimutkaisiin, taivaankappaleisiin liittyviin tekijöihin, ja niissä on otettava huomioon koko joukko kalenteria koskevia sääntöjä ja poikkeuksia. Matemaattisesti algoritmit ovat yksinkertaisia, sillä ne perustuvat pelkkiin peruslaskutoimituksiin, ennen kaikkea jakolaskuihin ja jakojäännöksiin.

Yksi suoraviivaisimmista pääsiäisalgoritmeista julkaistiin *Nature*-lehdessä vuonna 1876. Sen laatija jäi hämärän peittoon, kun tekijäksi mainittiin vain lehden ”New Yorkin kirjeenvaihtaja”, mutta algoritmista tuli pian suosittu, kun sitä kopioitiin useisiin aikakauden kalenterijulkaisuihin.

Sovelsin kyseistä algoritmia alussa mainitsemassani analysointijärjestelmässä, jonka toteutin Survolla. Sivutuotteena tulin tehneeksi pienen pääsiäisaiheisen animaatiodemon, johon voi tutustua verkossa osoitteessa `www.survo.fi/demos/index.html#ex19`.

Seuraavassa sama algoritmi näkyy Musteen *toimituskenttään* kirjoitettuna *laskentakaaviona*, jossa funktio `mod(x,y)` tarkoittaa jakojäännöstä, kun `x` jaetaan `y`:llä, ja `int(x)` annetun luvun tai lausekkeen `x` kokonaisosaa. Symbolit `a`, `b`, …, `n` ovat algoritmin mukaisia lausekkeita, joiden yksityiskohtia ei ryhdytä avaamaan.

```
Selvitetään pääsiäissunnuntain ajankohta. Algoritmi:
  Anonymous (1876). To find easter. Nature, 13, 487.

Luku n=(h+l-7*m+114) lasketaan 12 muun luvun avulla:

a=mod(vuosi,19)  b=int(vuosi/100) d=int(b/4) i=int(c/4)
f=int((b+8)/25)  c=mod(vuosi,100) e=mod(b,4) k=mod(c,4)
g=int((b-f+1)/3)             h=mod((19*a+b-d-g+15),30)
m=int((a+11*h+22*l)/451)       l=mod((32+2*e+2*i-h-k),7)
```

Sanalliset ilmaisut lausekkeiden lomassa eivät häiritse laskentaa. Kaavion voi kirjoittaa vapaasti; tässä se on sovitettu palstakoon sallimaan tilaan.

Kaavion jatko-osassa on määritelty `n`:stä (ja sen myötä kaikista muista) riippuvat symbolit `kuukausi` ja `päivä`. Tarkastelun kohteena oleva vuosi on myös ohimennen ilmaistu osana virkettä:

```
Kaavion avulla selviää minkä tahansa pääsiäissunnuntain
kuukausi=int(n/31) ja päivä=mod(n,31)+1 - esimerkiksi,
jos vuosi=2012, niin kuukausi=  ja päivä=
```

Mitään laskentaa ei kuitenkaan toistaiseksi tapahdu: kaavio on vain kokoelma tekstiä, lukuja ja numeroita.

Mitä taitoja koulussa aktivoidaan?

Elämä sujuu, kun osaa **lukea**, **laskea** ja **kirjoittaa**. Myös Muste ja Survo osaavat nämä arvokkaat taidot, aivan omalla tavallaan.

Aktivoimalla lauseke (joko hiiren kaksoisklikkauksella tai esc-napilla merkin = vierestä) edellä oleva kaavio sähköistyy hetkeksi: toimituskenttää hallinnoiva editoriohjelma **lukee** lausekkeen ympäriltä tarvitsemansa tiedot, **laskee** vaaditut laskut ja **kirjoittaa** tulokset. Kaikki tapahtuu yhdessä silmänräpäyksessä.

Kun siis kaavion alimmalla rivillä `kuukausi` ja `päivä` aktivoidaan, rivi muuttuu muotoon

```
jos vuosi=2012, niin kuukausi=4 ja päivä=8
```

eli pääsiäissunnuntai on tänä vuonna 8. huhtikuuta. Muuttamalla vuodeksi 2008 ja aktivoimalla uudelleen saadaan:

```
jos vuosi=2008, niin kuukausi=3 ja päivä=23
```

Kokeillaan vielä kerran ja kurkataan tulevaisuuteen:

```
jos vuosi=2222, niin kuukausi=3 ja päivä=31
```

Musteen (tai Survon) laskentakaavio toimii siis samaan tapaan kuin mikä tahansa tietokoneohjelma. Erona on se, että laskentakaavion voi kirjoittaa huomattavasti vapaamuotoisemmin, tarvitsematta niin paljoa välittää ohjelmointikielille ominaisista muotosäännöistä.

Tuhat vuotta ja yhdeksän pyhää

Siirrytään tutkimaan suomalaisen kalenterin juhlapäiviä tarkemmin. Keskeisiä, yhteiskunnallisesti merkittäviä juhlia on yhdeksän: uusivuosi, loppiainen, pääsiäinen, helatorstai, vappu, juhannus, pyhäinpäivä, itsenäisyyspäivä ja joulu. Näitä juhlia on tapana kutsua myös "juhlapyhiksi" tai "pyhäpäiviksi" riippumatta siitä, ovatko ne kirkollisia vai maallisia.

Laskennan kannalta on hyödyllisempää jakaa "pyhät" kahteen ryhmään sen mukaan, *kumpi vaihtelee vuosittain: viikonpäivä vai päivämäärä*. Juhlat, joiden viikonpäivä vaihtelee, ovat itsenäisyyspäivä, joulu, uusivuosi, loppiainen ja vappu. Juhlat, joiden päivämäärä vaihtelee, mutta viikonpäivä ei, ovat pyhäinpäivä, pääsiäinen, helatorstai ja juhannus.

Osa juhlista koostuu pääsiäisen tapaan useista pyhäpäivistä, mutta laskelmissani jokaista juhlaa edustaa täsmälleen yksi päivä: uudenvuodenpäivä, loppiaispäivä, pääsiäissunnuntai, helatorstai, vapunpäivä, juhannuspäivä, pyhäinpäivä, itsenäisyyspäivä ja jouluaatto.

Kalenterissa on useita muitakin yleisiä juhlapäiviä, mutta niillä ei ole vastaavaa merkitystä, koska ne eivät eroa tavallisista arki- tai sunnuntaipäivistä. Esimerkiksi helluntai, jonka vuodesta 1705 suomeksi ilmestynyt *Yliopiston almanakka* sisällyttää virallisiin juhlapäiviin, on seitsemäs pääsiäisen jälkeinen sunnuntai.

Toisinaan juhlapäivien määrittelyt voivat muuttuakin. Helatorstai on viimeiset 20 vuotta ollut perinteisellä paikallaan, torstaina, tasan 40 päivää pääsiäislauantain jälkeen, mutta vuosina 1973–1991 sitä vietettiin jo edeltävän viikon lauantaina nimellä Kristuksen taivaaseenastumisen päivä.

Aloitin jutun kirjoittamisen kynttilänpäivänä, joka sattui olemaan myös Runebergin päivä. Edellinen on kirkollinen, jälkimmäinen maallinen. Nämäkin juhlat voidaan luokitella mainittuihin ryhmiin: Runebergin päivä voi olla minä viikonpäivänä tahansa, kun taas kynttilänpäivä on aina sunnuntaina. Molemmilla on merkitystä lähinnä niille, jotka kyseisiä päiviä juhlistavat.

Tarkastellaan seuraavaksi kalenteria ja juhlia tilastollisen tietojenkäsittelyn keinoin rakentamalla data eli tilastoaineisto, joka ulottuu vuosisatojen päähän sekä menneisyyteen että varsinkin tulevaisuuteen.

Valitsin tarkasteltavaksi **tuhannen vuoden** pituisen ajanjakson 1.1.1800–31.12.2799. Todellisuudessa osaa juhlista ei ole vietetty vielä sataakaan kertaa, mutta laskennallisia kokeiluja se ei mitenkään estä.

Nyt jutun toimituskentästä poimituissa näkymissä on mukana myös eräitä Musteen ja Survon editoriaalisen käyttötavan hallintaan kuuluvia elementtejä. Niistä näkyvimpiä ovat vasemman reunan *kontrollisarake* ja toimituskenttää osiin jakavat *rajarivit*.

Kontrollisarake koostuu oletuksena tähdistä `*`, mutta jokainen rivi voidaan varustaa millä tahansa muullakin kontrollimerkillä. Niihin voi kytkeä erilaisia toimintoja, joista alla olevissa näkymissä on joitain esimerkkejä. Selkeyden vuoksi näkyvissä ovat vain välttämättömät kontrollimerkit; todellisuudessa tähdet ynnä muut kontrollimerkit tuikkivat himmeämmin erottuen siten varsinaisesta tekstinkirjoitusalueesta.

Rajarivi erottaa laskentakaavioita tai komentoja ohjaavia *täsmennyksiä* eli merkillä `=` varustettuja sanoja. Sen muodostaa vähintään kymmenen peräkkäistä pistettä tähtirivillä. Usein rajarivit vedetään täyteen leveyteen:

```
*.......................................................
 Tämän aktivointi aktivoi kaikki '+':lla merkityt rivit:
 /ACTIVATE +

+TIME COUNT START  / mitataan rakentamiseen kuluva aika

+FILE CREATE KALJU / luodaan tyhjä datatiedosto (.svo)
 KALJU: KALenteri ja JUhlat / KV 15.2.2010 (19.2.2012)
 FIELDS:
   1 S 10 pvm      päivämäärä muodossa vvvv-kk-pp
   2 N  4 pvJulian päivän järjestysnro (1 = 1.1.1800)
   3 N  1 pvViikko viikonpäivä (1-7)
   4 S  2 pvNimi   viikonpäivä [ma,ti,ke,to,pe,la,su]
   5 N  2 pvVuosi  päivän järjestysnumero (1-366)
   6 N  1 vkoVuosi viikon järjestysnumero (1-53)
   7 S  3 Juhla    [Juh,Pyh,Its,Jou,Uus,Lop,Paa,Vap,Het]
   8 S  4 vvvv     pvm: vuosi    (1800-2799)
   9 S  2 kk       pvm: kuukausi [01,02,...,12]
  10 S  2 pp       pvm: päivä/kk [01,02,...,31]
 END
```

Koska vuosia on tasan tuhat, on päiviä melko tarkkaan 365000. Lisäksi tulee pieni määrä karkauspäiviä, joilla gregoriaaninen kalenteri pysyy synkronissa maan kiertoliikkeiden kanssa. Karkauspäivien idea on selostettu tarkemmin muun muassa Matti Lehtisen alussa mainitussa artikkelissa. Karkeasti karkauspäivä on joka neljäs vuosi, joten niitä osuu jaksolle vajaat 250.

Lasketaan päivien määrä tarkasti `DATE`-komennolla ja rakennetaan sen jälkeen vaiheittain koko data:

```
*.......................................................
 DATE 1.1.2800 - 1.1.1800 / Difference=365242

+FILE INIT KALJU,365242      / ajellaan data kaljuksi
+VAR pvJulian=ORDER TO KALJU / ja numeroidaan päivät

 Mitoitetaan päivien numerot tähän dataan sopivammiksi:
 DATE 1.1.1800,Julian / Jan 01 1800 Julian_day=2378497
 JULIAN_DAY0=2378496 (31.12.1799) -> 1, 2, ..., 365242
 ja muodostetaan DATE-komennolla pvm ym. muuttujia:

+DATE KALJU / ODATE=YYYYMMDD ODEL=- MASK=di-ajw----
   Vähän selostusta yllä käytetyistä täsmennyksistä:
   ODATE ("output date") ja ODEL ("output delimiter")
   ohjaavat päivämäärät haluttuun muotoon "2012-02-19".
   MASK määrää kullekin valitulle muuttujalle roolin,
   esim. d ("date"), i ("input") ja w ("week number").
*.......................................................
```

```
 Suomennetaan ja numeroidaan päivien lyhennetyt nimet:

+CLASSIFY KALJU,Viikko1,pvNimi,pvNimi
 CLASSIFICATION Viikko1
 Mo: ma
 Tu: ti
 We: ke
 Th: to
 Fr: pe
 Sa: la
 Su: su
 END

+CLASSIFY KALJU,Viikko2,pvNimi,pvViikko
 CLASSIFICATION Viikko2
 ma: 1
 ti: 2
 ke: 3
 to: 4
 pe: 5
 la: 6
 su: 7
 END
*.......................................................

 Erotellaan pvm:stä muuttujat vuosi, kuukausi ja päivä:
 IDATE=YYYYMMDD IDEL=- (kuten edellä, mutta nyt "input")

+DATE KALJU / ODATE=YYYY VARS=pvm(D),vvvv(d)
+DATE KALJU / ODATE=MM   VARS=pvm(D),kk(d)
+DATE KALJU / ODATE=DD   VARS=pvm(D),pp(d)
*.......................................................

 Datan alku- ja loppupää näyttävät nyt tällaisilta:

 #FILE LOAD -KALJU CUR+1 / IND=ORDER,1,10
  1800-01-01       1 3 ke   1  1 -   1800 01 01
  1800-01-02       2 4 to   2  1 -   1800 01 02
  1800-01-03       3 5 pe   3  1 -   1800 01 03
  1800-01-04       4 6 la   4  1 -   1800 01 04
  1800-01-05       5 7 su   5  1 -   1800 01 05
  1800-01-06       6 1 ma   6  2 -   1800 01 06
  1800-01-07       7 2 ti   7  2 -   1800 01 07
  1800-01-08       8 3 ke   8  2 -   1800 01 08
  1800-01-09       9 4 to   9  2 -   1800 01 09
  1800-01-10      10 5 pe  10  2 -   1800 01 10
*#######################################################

 #FILE LOAD -KALJU CUR+1 / IND=ORDER,365233,365242
  2799-12-22  365233 3 ke 356 51 -   2799 12 22
  2799-12-23  365234 4 to 357 51 -   2799 12 23
  2799-12-24  365235 5 pe 358 51 -   2799 12 24
  2799-12-25  365236 6 la 359 51 -   2799 12 25
  2799-12-26  365237 7 su 360 51 -   2799 12 26
  2799-12-27  365238 1 ma 361 52 -   2799 12 27
  2799-12-28  365239 2 ti 362 52 -   2799 12 28
  2799-12-29  365240 3 ke 363 52 -   2799 12 29
  2799-12-30  365241 4 to 364 52 -   2799 12 30
  2799-12-31  365242 5 pe 365 52 -   2799 12 31
*#######################################################

 Data on valmis! Vain juhlapäivien tiedot puuttuvat (-).
```

Edellä on käytössä *risuaitatekniikka*, jolla Muste lisää itse toimituskenttään tarvitsemansa tilan tulostuksille (tässä datan listaukselle). Rivitunnus `CUR` viittaa komentoriviin; vastaavasti `END` kentän viimeiseen eityhjään riviin. Ilman risuaitoja `#` tilan hallinnasta vastaa käyttäjä, jolloin `END+2` on suositeltavampi valinta tulostuksen aloitusriviksi kuin yllä sovellettu `CUR+1`.

Yhdeksän tuhatta juhlaa

Täydennetään data merkkaamalla juhlapäivät muuttujaan `Juhla`. Juhlista käytetään kolmikirjaimisia lyhenteitä, jotka näkyvät `FILE CREATE` -kaaviosta.

Aloitetaan helpoimmista eli niistä juhlista, joiden sijainti kalenterissa määräytyy päivämäärän perusteella, mutta viikonpäivä vaihtelee vuosittain. Näitä ovat siis itsenäisyyspäivä, joulu, uusivuosi, loppiainen ja vappu.

Kun `VAR`-komento aktivoidaan, se kirjoittaa kyseisen juhlan lyhenteen dataan kaikkien ehdot täyttävien päivien kohdalle. Jokainen `VAR`-komento käy siis läpi koko datan ja päivittää tuhat tietuetta, yhden per vuosi:

```
*.......................................................

 Ehtolauseke SELECT=K*P on yhteinen ja yksinkertainen:
 sen mukaan K:n ja P:n tulee molempien toteutua, jotta
 koko SELECT-ehto toteutuu. Käytetyt alkeisehdot K ja P
 määrittelevät juhlat täsmällisesti:

     1) Itsenäisyyspäivä: 6.12.  K=kk,12 P=pp,6
+VAR str(Juhla)="Its" TO KALJU

     2) Joulu: 24.12.
+VAR str(Juhla)="Jou" / K=kk,12 P=pp,24

     3) Uusivuosi: 1.1.
+VAR str(Juhla)="Uus" / P=kk,1  K=pp,1

     4) Loppiainen: 6.1.
+VAR str(Juhla)="Lop" / K=kk,1  P=pp,6

     5) Vappu: 1.5.
+VAR str(Juhla)="Vap" / K=kk,5  P=pp,1
*.......................................................
```

Äskeisessä (kohdat 1–5) ei tarvita rajarivejä erottamaan `VAR`-komentoja, sillä itse komentorivi on etusijalla, kun Muste lukee täsmennyksiä. Näin `SELECT` vaikuttaa kaikkiin viiteen `VAR`-komentoon, mutta alkeisehdot `K` ja `P` määritellään tilannekohtaisesti. Kohdassa 1 käyttöön tulevat tässä rajarivien välisessä *osakentässä* ensimmäisenä annetut määritykset.

Seuraavassa (kohdat 6–7) rajariviä ei myöskään tarvita, kun `SELECT`-ehto on komentokohtainen, ja alkeisehdot ovat viikonpäivää lukuunottamatta eri nimisiä:

```
*.......................................................

     6) Juhannus: lauantai 20.-26.6.

 K=kk,6 P=pp,20,26 V=pvNimi:la

+VAR str(Juhla)="Juh" / SELECT=K*P*V

     7) Pyhäinpäivä: lauantai 31.10.-6.11.

 K1=kk,10 P1=pp,31 (toisinaan lokakuun puolella!)
 K2=kk,11 P2=pp,1,6

+VAR str(Juhla)="Pyh" / SELECT=(K1*P1+K2*P2)*V

*.......................................................
```

Vuorossa (kohta 8) on juhlista vaativin. Pääsiäinen on aina sunnuntaina, mutta se tieto ei riitä: tarvitaan taas alussa esitettyä algoritmia. Jotta päästään soveltamaan sitä, poimitaan erilleen yksi päivä jokaisesta vuodesta. Muuttujista mukaan riittää ottaa päivämäärän kolme komponenttia sekä juhlapäivän ilmaisin:

```
*......................................................

    8) Pääsiäinen: sunnuntai 22.3.-25.4.

+FILE AGGR KALJU BY vvvv TO KALJUPAA / (!)
 VARIABLES:
 vvvv   LAST  vvvv   /  Jokaisesta tuhannesta vuodesta
 kk     LAST  kk     /  poimitaan sen viimeinen päivä
 pp     LAST  pp     /  (LAST) ja kootaan näistä uusi,
 Juhla  LAST  Juhla  /  vain tuhannen havainnon data.
 END

*......................................................
```

Edellä esitetty algoritmi on havainnollisuuden vuoksi toistettu tässä ilman ylimääräisiä kommentteja, vain hieman eri tavalla aseteltuna. Nyt vuositieto haetaan uuden datan muuttujasta `vvvv`, ja `VAR`-aktivointi päivittää samaisen datan muuttujien `pp` ja `kk` sisällöt:

```
  Anonymous (1876). To find easter. Nature, 13, 487.
   a=mod(vvvv,19)  f=int((b+8)/25)  d=int(b/4)
   b=int(vvvv/100) g=int((b-f+1)/3) e=mod(b,4)
   c=mod(vvvv,100) n=(h+l-7*m+114)  i=int(c/4)
       h=mod((19*a+b-d-g+15),30)    k=mod(c,4)
       l=mod((32+2*e+2*i-h-k),7)   kk=int(n/31)
        m=int((a+11*h+22*l)/451)   pp=mod(n,31)+1

+VAR pp,kk TO KALJUPAA
+VAR str(Juhla)="Paa" / (ei ehtoja: lisätään kaikkiin)
*......................................................

 Isoon dataan kopiointia varten lisätään etunollat, niin
 datojen täsmäytys MATCH-täsmennyksellä onnistuu:

+VAR str(pp,1,1)="0" / IND=pp,1,9
+VAR str(kk,1,1)="0" / IND=kk,3,4 (vältetään rajarivi)
*......................................................

 Kopioidaan pääsiäiset omasta datastaan isoon dataan:

 MATCH=vvvv,kk,pp (kaikkien pitää täsmätä!)
+FILE COPY KALJUPAA TO KALJU / VARS=Juhla

*......................................................
```

Nyt kaikki tuhat pääsiäistä ovat oikeilla paikoillaan. Enää on jäljellä helatorstai. Koska sen sijainti riippuu täysin pääsiäisestä, kohta 9 hoituu helposti:

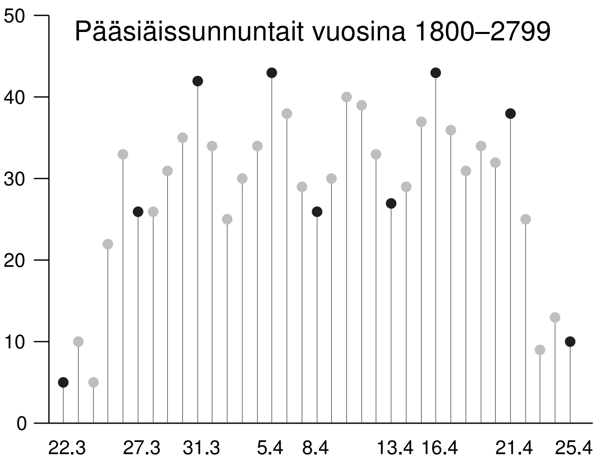
```
*......................................................

    9) Helatorstai: 39. päivä pääsiäissunnuntaista

+VAR str(Juhla[+39])="Het" TO KALJU / CASES=Juhla:Paa

+TIME COUNT END   60.032

Aikaa kului siis noin minuutti: 60.032(s:hms)=00:01:00
*......................................................
```



Pääsiäisten kuvailua

Kuvion perusteella varhaiset ja myöhäiset pääsiäiset esiintyvät harvimmin. Tämä pätee yleisesti, vieläpä niin, että kaikkein varhaisin on kaikkein harvinaisin.

Tuhat vuotta saattaa tuntua pitkältä ajalta, mutta se on lopulta vain lyhyt jakso, sillä pääsiäissunnuntain päivämäärien kiertokulku toistuu samanlaisena vasta **5,7 miljoonan vuoden** jälkeen. Jakson täydellinen kuva löytyy muun muassa pääsiäisen laskennallisia kysymyksiä käsittelevältä englanninkieliseltä Wikipedia-sivulta.

Kuvanpiirtoa varten edellä (kohdassa 8) syntynyt pääsiäisdata on järjestetty kuukauden ja päivän mukaan ja talletettu lajitteluavain uudeksi muuttujaksi `kkpp`. Sen avulla on muodostettu uusi data, joka sisältää vain 35 havaintoa; yhden jokaisesta mahdollisesta pääsiäissunnuntain päivämäärästä. Muuttujaan `n` tulevat kuvan pystyakselilla esitetyt lukumäärät:

```
 FILE SORT KALJUPAA BY kk,pp TO PAA1000 / KEY_SAVED=kkpp

 FILE AGGR PAA1000  BY kkpp  TO PAA1000A
 VARIABLES:
 i:S2    MISSING   -
 kkpp    FIRST     kkpp  / aggregointitunniste
 v1      ORDER(1)  vvvv  / 1. vuosi
 v2      ORDER(2)  vvvv  / 2. vuosi
 v3      ORDER(3)  vvvv  / 3. vuosi
 vj      ORDER(-3) vvvv  / j. vuosi (j=n-3+1)
 vk      ORDER(-2) vvvv  / k. vuosi (k=n-2+1)
 vn      ORDER(-1) vvvv  / n. vuosi (n=n-1+1)
 n:S2    N         -     / vuosien lukumäärä
 color:1 MISSING   -
 END
*......................................................
```

Muuttujiin `v1`, `v2`, ..., `vn` tallentuu kolme ensimmäistä ja kolme viimeistä vuotta, jolloin pääsiäinen on (tai on ollut) kyseisen havainnon ilmaisemana päivänä.

Dataa on aina hyvä selailla, jotta pysyy selvillä siitä, mitä on tekemässä. Nyt sen alku maaliskuun päivien osalta näyttää tällaiselta:

```
FILE LOAD PAA1000A CUR+2 / CASES_WILD*=* CASES=kkpp:03*

*DATA PAA1000A*,A,B,C
C   i kkpp v1   v2   v3   vj   vk   vn   n  col
A   - 0322 1818 2285 2353 2353 2437 2505  5   -
    - 0323 1845 1856 1913 2532 2600 2752 10   -
    - 0324 1940 2391 2475 2475 2543 2695  5   -
    - 0325 1883 1894 1951 2638 2779 2790 22   -
    - 0326 1815 1826 1837 2711 2722 2733 33   -
    - 0327 1842 1853 1864 2738 2749 2760 26   -
    - 0328 1869 1875 1880 2624 2771 2776 26   -
    - 0329 1807 1812 1891 2714 2787 2798 31   -
    - 0330 1823 1834 1902 2719 2730 2741 35   -
B   - 0331 1839 1850 1861 2746 2757 2768 42   -

*.................................................
```

Listauksesta näkyy, kuinka harvinainen pääsiäisen esiintyminen 22. maaliskuuta oikein on: viime kerrasta on jo 2012-1818=194 vuotta. Seuraavaa saadaan odottaa vielä 2285-2012=273 vuotta.

Vilkaistaan toisesta datasta, miltä maaliskuun pääsiäisten tilanne näyttää seuraavien 20 vuoden aikana:

```
CASES=kk:03 IND=vvvv,2013,2032 MASK=AAA--
FILE LOAD -PAA1000 CUR+2

 2016 03 27
 2027 03 28
 2032 03 28
 2013 03 31
 2024 03 31

*.................................................
```

Näemmä pääsiäissunnuntai osuu maaliskuun puolelle heti ensi vuonna. Kuvan perusteella 31. maaliskuuta onkin varsin tyypillinen pääsiäissunnuntain ajankohta.

Juhlat törmäyskurssilla

Tarkastellaan lopuksi, millaisia tilanteita voi syntyä kirkollisten ja maallisten juhlapäivien kohdatessa. Taas tapahtumien keskipisteessä on pääsiäinen.

Jos pääsiäinen on myöhään, se sijoittuu vapun lähelle. Väliin jää vähimmillään vain viisi päivää, joista yksi on pääsiäismaanantai. Kaupallisissa sovelluksissa, joissa saatetaan olla kiinnostuneita sekä juhlia edeltävistä että seuraavista myyntipäivistä, on tällöin vaikea erottaa näiden kahden juhlan vaikutusalueita toisistaan.

Jos pääsiäinen on aikaisin, sijoittuu helatorstai vapun lähelle. Tämä onkin kaikista törmäyskursseista mielenkiintoisin. Pääsiäisen liikkuvuudesta seuraa, että helatorstai, joka on yleensä toukokuussa, on toisinaan vasta kesäkuun alussa. Aikaisimmillaan helatorstai voi olla jopa huhtikuussa, samana päivänä kuin vappuaatto:

```
Haetaan päivät isosta datasta: CASES=Juhla:Het IND=kk,4
FILE LOAD -KALJU CUR+2 / VARS=Juhla,pvm

 Het 1818-04-30
 Het 2285-04-30
 Het 2353-04-30
 Het 2437-04-30
 Het 2505-04-30

*.................................................
```

Kyseiset viisi esiintymää ovat täsmälleen niinä vuosina, jolloin pääsiäinen on aikaisimmillaan, 22. maaliskuuta:

```
CASES=Juhla:Paa IND=vvvv:1818,2285,2353,2437,2505
FILE LOAD -KALJU CUR+2 / VARS=Juhla,pvm

 Paa 1818-03-22
 Paa 2285-03-22
 Paa 2353-03-22
 Paa 2437-03-22
 Paa 2505-03-22

*.................................................
```

R ja kadonneiden juhlien metsästys

Tehdään tässä välissä pieni vierailu R-puolelle, joka on kokoajan käytettävissä Musteen välityksellä. Ensin muunnetaan Musteen KALJU-data R-dataksi `kalju`:

```
FILE LOAD KALJU TO R>kalju
```

Raaputetaan `kaljusta` pari tietoa R-funktioilla, joita Musteen toimituskentästä aktivoidaan joko komennolla `R` tai napilla `Ctrl-R`:

```
dim(kalju) # tarkistetaan datan dimensiot
```

R-funktion `dim` tulos kirjoittuu oletuksena Musteen rinnalla toimivaan R:n omaan komentoikkunaan, mutta minkä tahansa R-funktion tulokset saa myös halutessaan suoraan Musteen toimituskenttään jatkokäsittelyä varten. Nyt tulos sisältää ainoastaan kaksi lukua:

```
[1] 365242     10
```

R-funktiolla `summary` tiivistetään tiedot kevätjuhlista:

```
summary(as.factor(kalju$Juhla))[c('Paa','Het','Vap')]

 Paa  Het  Vap
1000 1000  990
```

Mihin on kadonnut 10 vappua? Kun juhlapäivät edellä merkattiin dataan, oli selvää, että kaikkia on täsmälleen tuhat kappaletta. Siinä yhteydessä ei kuitenkaan huomattu, että *juhlat voivat osua samallekin päivälle.* Aina kun tekee datalle jotain, sitä olisi syytä katsoa.

Katsotaan nyt tarkemmin Musteen STAT-komennolla:

```
STAT KALJU CUR+2 / VARS=Juhla

Basic statistics: KALJU N=365242
Variable: Juhla    [Juh,Pyh,Its,Jou,Uus,Lop,Paa,Vap,Het]
N(missing)=356252
Juhla         f     %      *=32 obs.
Het        1000  11.1 *******************************
Its        1000  11.1 *******************************
Jou        1000  11.1 *******************************
Juh        1000  11.1 *******************************
Lop        1000  11.1 *******************************
Paa        1000  11.1 *******************************
Pyh        1000  11.1 *******************************
Uus        1000  11.1 *******************************
Vap         990  11.0 ******************************

*....................................................
```

Nuo 10 vapunpäivää ovat näemmä ainoat kadonneet. Ne törmäävät helatorstaihin, joka juhlapäiviä merkatessa (kohdassa 9) ajaa aiemmin (kohdassa 5) merkatun vapun yli. Törmäyskurssi on sangen harvinainen, mutta sattumalta koettu aivan hiljattain, vuonna 2008:

```
helatorstai=Juhla:Het SELECT=helatorstai*toukokuun*1
toukokuun=kk,5 1=pp,1
FILE LOAD KALJU CUR+2 / VARS=vvvv FORMAT=LIST

DATA vvvv: 1845 1856 1913 2008 2160 2228 2380 2532 2600
2752 END
*....................................................
```

Näemmä edellisen kerran näin tapahtui 99 vuotta sitten, ennen ensimmäistä maailmansotaa. Jutun alussa mainitussa analysointijärjestelmässä, joka käsittelee aikasarja-aineistoja vuodesta 2000 lähtien, vuoden 2008 törmäyksellä oli työllistävä vaikutus: jouduin ottamaan sen erikseen huomioon yli 20 kohdassa ohjelman lähdekoodia. Kuten edeltä näkyy, seuraava törmäys odottaa – mutta vasta noin 150 vuoden päässä.

Lopuksi

Pääsiäisaiheisen jutun myötä olen tullut käyneeksi läpi muutamia esimerkkejä Musteen ja Survon käytöstä laskelmien teossa, datan muokkauksessa ja kuvien piirrossa. Nämä (ja monet muut) tehtävät sujuvat mukavasti editoriaalisella käyttötavalla. Siitä tuli Survon käyttöliittymä vuonna 1979, jolloin se nopeasti syrjäytti valikkopohjaisen käyttötavan silloisessa SURVO 76:ssa (ks. `www.survo.fi/julkaisut` erit. vuosilta 1979–1980).

Lyhyesti lähteistä

Heikki Ojan *Aikakirja* on varsinainen kalentereiden ja juhlapäivien runsaudensarvi. Jean Meeusin teos on erinomainen johdatus astronomisten algoritmien lähteille. Reinhold Bien valottaa historian hämäriä.

Jatkot verkossa!

Artikkelin työkaaviot ynnä muuta täydentävää materiaalia löytyy sivulta `www.survo.fi/juhlat`. Ottamalla käyttöön Musteen (sivulta `www.survo.fi/muste`) voi toistaa kaikki jutussa esitetyt datan käsittelyt, piirtää edellä olevan kuvan tai vaikka laajentaa kokeiluja vielä kauemmas historiaan tai tulevaisuuteen.

Kiitokset

Seppo Mustonen ja Reijo Sund esittivät eri vaiheissa lukuisia hyödyllisiä kommentteja. Kiitos kaikista!

Viitteet

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Computus`.

[2] Anonymous. To find easter. *Nature*, 13:487, 1876.

[3] Reinhold Bien. Gauss and beyond: The making of easter algorithms. *Archive for History of Exact Sciences*, 58:439–452, 2004.

[4] Ross Ihaka and Robert Gentleman. R: A language for data analysis and graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5:299–314, 1996.

[5] Matti Lehtinen. Jouluaatto on harvemmin sunnuntaina. *Solmu*, (3):17–18, 2011.

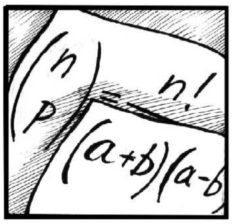
[6] Jean Meeus. *Astronomical Algorithms*. Willmann–Bell, 2nd edition, 1998.

[7] Seppo Mustonen. SURVO MM: käyttöympäristö tekstin ja numeerisen tiedon luovaan käsittelyyn. 2001–2012, `http://www.survo.fi`.

[8] Heikki Oja. *Aikakirja*. Helsingin yliopiston almanakkatoimisto, Helsingin yliopisto, 2007. `http://almanakka.helsinki.fi/aikakirja/Aikakirja2007kokonaan.pdf`.

[9] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2012. `http://www.R-project.org`.

[10] Reijo Sund. Muste – Multiplatform Survo Type Editorial Environment for Data Analysis. 2009–2012, `http://www.survo.fi/muste`.

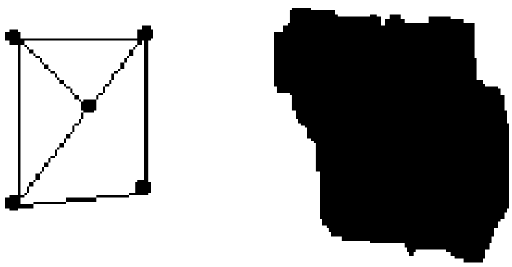


Yhtenäisyydestä

Tuomas Korppi

Johdanto

Tarkastellaan kuvassa 1 näkyviä verkkoa[1] ja $\mathbb{R}^2$:n (eli tason) osajoukkoa.



Kuva 1. Yhtenäinen verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

Niillä on yhteinen ominaisuus: Ne ovat kumpikin yhtenäisiä. Kaikki verkot ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukot eivät ole yhtenäisiä. Esimerkiksi Kuvassa 2 oleva verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko koostuvat kumpikin kolmesta yhtenäisestä komponentista.

Kuva 2. Epäyhtenäinen verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

Kuvan 2 verkko voidaan jakaa kolmeen osaan niin, että osien välillä ei ole verkon kaaria, ja kuvassa 2 näkyvä $\mathbb{R}^2$:n osajoukko voidaan puolestaan jakaa kolmeen osaan niin, että osat ovat kaukana toisistaan. Kuvan 1 objekteilla ei vastaavaa ominaisuutta ole.

Sekä verkkojen yhtenäisyyttä että $\mathbb{R}^2$:n osajoukkojen yhtenäisyyttä kuvaavat teoriat ovat hyvin tunnettuja.

Matemaattista mieltä kiinnostaa kuitenkin kysymys: Onko verkon ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyydellä (ja vastaavasti yhtenäisillä komponenteilla) jotain yhteistä? Toisin sanoen, onko olemassa yleistä yhtenäisyyden määritelmää, josta seuraisi erikoistapauksina sekä verkon että $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyys?

Paljastuu, että tällainen teoria on olemassa, ja se kehitettiin 1900-luvun alkupuolella, joskin nykyään se on painunut suurelta osin unholaan. Se löytyy teoksesta [1], luvuista 14 ja 20. Esitämme sen alla huomattavasti mukaillen.

Esitämme teorian todistuksineen. Matemaattisen tekstin lukemiseen tottumattomat lukijat voivat sivuuttaa todistukset ja vain uskoa tulokset. Niitä lukijoita varten, jotka eivät tunne joukko-opin notaatioita, liitteessä on todellinen crash course aiheesta.

Lähipisteavaruus

Tutkitaan $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoa $A = \{(x,0) \mid 0 < x < 1\}$. Sillä on sellainen ominaisuus, että pisteet $(0,0)$ ja $(1,0)$ eivät kuulu kyseiseen joukkoon, mutta kuitenkin ovat

[1] Tässä kirjoitelmassa verkot ovat suuntaamattomia, jos muuta ei mainita.

lähellä joukkoa A. Vastaavasti, jos B on verkon solmujen joukon osajoukko, voidaan ajatella, että solmu on lähellä joukkoa B, jos solmusta on kaari johonkin joukon B solmuun.

Sekä verkon että $\mathbb{R}^2$:n osajoukon rakenne voidaan siis ilmaista läheisyyden avulla: Kerrotaan, mitkä pisteet ovat lähellä mitäkin tutkittavan olion osajoukkoa. Seuraavaksi aksiomatisoimmekin lähelläolemisrelaation, eli annamme sellaisen lähelläolemisen määritelmän, että sitä voidaan soveltaa sekä verkkoihin että $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoihin. Seuraavat ominaisuudet tuntuvat luonnollisilta lähelläolemisen ominaisuuksilta.

- Jos x kuuluu joukkoon A, niin se on lähellä joukkoa A.
- Mikään piste ei ole lähellä tyhjää joukkoa.
- Jos $A \subset B$, ja piste x on lähellä joukkoa A, niin x on myös lähellä joukkoa B.

Itse asiassa ilmenee, että nämä ominaisuudet ovat riittäviä sen teorian kehittämiseen, minkä teemme tässä kirjoitelmassa.

Nyt muodollinen määritelmä:

Olkoon X joukko. Merkitään $\mathcal{P}(X)$:llä kaikkien X:n osajoukkojen[2] joukkoa.

Pari $(X, \bar{\in})$ on *lähipisteavaruus*, jos X on joukko ja $\bar{\in}$ on relaatio $\bar{\in} \subset X \times \mathcal{P}(X)$, joka toteuttaa seuraavat aksioomat:

1. Jos $A \subset X$ ja $a \in A$, niin $a \bar{\in} A$.
2. $x \bar{\in} \emptyset$ ei päde millään $x \in X$.
3. Jos $A \subset B \subset X$ ja $x \in X$, jolle $x \bar{\in} A$, niin tällöin $x \bar{\in} B$.

Jos $x \bar{\in} A$, sanomme, että x on joukon A lähipiste. Jos $A \subset X$, merkitään $\operatorname{cl} A = \{x \in X \mid x \bar{\in} A\}$.

Seuraavaksi selitämme, kuinka verkot ja tason osajoukot voidaan mieltää lähipisteavaruuksina.

Olkoon (X,S) verkko, missä X on solmujen joukko ja S kaarien joukko. Määritellään, että jos $x \in X$ ja $A \subset X$, niin x on joukon A lähipiste, $x \bar{\in} A$, jos $x \in A$ tai solmusta x on kaari johonkin joukon A solmuun. Kiinnostunut lukija voi helposti tarkistaa, että antamamme lähipisteen määritelmä verkossa toteuttaa kaikki lähipisterelaation aksioomat. Nyt verkko (X,S) voidaan mieltä lähipisteavaruutena $(X, \bar{\in})$.

Olkoon sitten $X \subset \mathbb{R}^2$. Jos $x,y \in X$, merkitään $d(x,y)$:llä pisteiden x ja y etäisyyttä (linnuntietä). Jos $A \subset X$ ja $x \in X$, sanomme, että x on joukon A lähipiste, $x \bar{\in} A$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $y \in A$, jolle $d(x,y) < \epsilon$. Kiinnostunut lukija voi tarkistaa, että antamamme lähipisteen määritelmä toteuttaa kaikki lähipisteavaruuden aksioomat. Nyt X voidaan mieltää lähipisteavaruutena $(X, \bar{\in})$.

Olkoon $X = \mathbb{R}^2$. Esimerkiksi joukon $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) < 1\}$ lähipisteiden joukko on $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) \leq 1\}$. Toisena esimerkkinä joukon $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) \leq 1\}$ lähipisteiden joukko on joukko A itse.

Jos $X \subset \mathbb{R}^2$, $(X, \bar{\in})$ toteuttaa vielä seuraavat ehdot:

- Kaikilla $A,B \subset X$ ja kaikilla $x \in X$ pätee $x \bar{\in} (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.
- Kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl} \operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$.

Nämä ehdot toteuttavia lähipisteavaruuksia kutsutaan topologisiksi avaruuksiksi, ja ne näyttelevät hyvin keskeistä roolia modernissa matematiikassa.

Yhtenäisyys

Tutkitaan kuvassa 2 esiintyviä verkkoa ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoa, jotka kumpikin koostuvat kolmesta komponentista. Laittamalla kaksi komponenttia yhteen lokeroon ja yksi komponentti toiseen lokeroon, havaitaan, että ne voidaan kumpikin jakaa kahteen erilliseen osaan (ja helposti havaitaan, että mistä tahansa yhtä suuremmasta komponenttimäärästä koostuva kokonaisuus voidaan aina jakaa kahteen osaan, mutta kahdesta komponentista koostuvaa kokonaisuutta ei voida jakaa useampaan kuin kahteen osaan). Kuvan 1 objekteilla, jotka ovat yhtenäisiä, ei tätä ominaisuutta ole. Näin ollen määrittelemmekin epäyhtenäisyyden käyttäen tätä ideaa:

Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus. Sanomme, että X on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa $A,B \subset X$ siten, että seuraavat ehdot pätevät:

1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A \cup B = X$.
4. $\operatorname{cl} A = A$ ja $\operatorname{cl} B = B$.

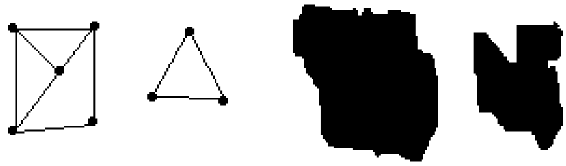
Viimeinen ehto voidaan ilmaista myös muodossa

- Jos $x \in B$, niin $x \bar{\in} A$ ei päde, ja jos $x \in A$, niin $x \bar{\in} B$ ei päde.

Kyseinen ehto siis sanoo, että osien välillä ei vallitse lähipisterelaatioita.

Lukija voi helposti tarkistaa, että kuvan 3 verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko ovat epäyhtenäisiä tämän määritelmän mukaan. (Asian osoittamiseksi valitaan A:ksi ja B:ksi X:n yhtenäiset komponentit.)

[2] Joukon X osajoukoiksi lasketaan myös joukot $\emptyset$ ja X.



Kuva 3. Kahdesta komponentista koostuva verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

Sanomme, että $(X, \bar{\in})$ on *yhtenäinen*, jos se ei ole epäyhtenäinen. Kuvassa 1 esitetyt verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko ovat tämän määritelmän mukaan yhtenäisiä.

Komponenttien määrä

Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus. Olkoon $A \subset X$. Nyt $(A, \bar{\in}_A)$ on lähipisteavaruus, kun $\bar{\in}_A \subset A \times \mathcal{P}(A)$ määritellään

$$x \mathrel{\bar{\in}_A} B \text{ jos ja vain jos } x \mathrel{\bar{\in}} B$$

kaikilla $B \subset A, x \in A$. Merkitään A:n sulkeumaoperaattoria cl_A, eli jos $B \subset A$, $\mathrm{cl}_A B$ on kaikkien niiden A:n pisteiden joukko, jotka ovat lähellä joukkoa B.

Ylläolevan määritelmän perusteella mitä tahansa X:n osajoukkoa voidaan käsitellä lähipisteavaruutena, joten minkä tahansa X:n osajoukon yhtenäisyydestä ja epäyhtenäisyydestä voidaan puhua.

Jos $A \subset X$, sanomme, että A on X:n *yhtenäinen komponentti*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. A on yhtenäinen.
2. Jos $B \subset X$ on sellainen, että $A \subset B$, $A \neq B$, niin tällöin B on epäyhtenäinen.

Siis X:n yhtenäiset komponentit ovat X:n maksimaalisia yhtenäisiä osajoukkoja.

Tämän määritelmän nojalla kuvassa 2 on verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko, joilla on kummallakin kolme yhtenäistä komponenttia.

Seuraavaksi todistamme kaksi yhtenäisten komponenttien perustulosta. Ensinnäkin sen, että jokainen piste kuuluu johonkin yhtenäiseen komponenttiin, sekä sen, että kahden yhtenäisen komponentin leikkaus on tyhjä. Aloitamme kuitenkin kahdella lemmalla, joista ensimmäistä käytämme jatkossa ilman eri viittausta.

Lemma 1. *Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $B \subset X$ sellainen, että $\mathrm{cl}\, B = B$. Olkoon $A \subset X$. Tällöin $\mathrm{cl}_A(A \cap B) = A \cap B$.*

Todistus: Selvästi $A \cap B \subset \mathrm{cl}_A(A \cap B)$ ja $\mathrm{cl}_A(A \cap B) \subset A$. Siis täytyy todistaa $\mathrm{cl}_A(A \cap B) \subset B$.

Lähipisteavaruuden määritelmän ehdosta 3 seuraa, että jos $C \subset D$, niin $\mathrm{cl}\, C \subset \mathrm{cl}\, D$. Näin ollen $\mathrm{cl}_A(A \cap B) \subset \mathrm{cl}(A \cap B) \subset \mathrm{cl}\, B = B$. □

Lemma 2. *Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus, ja $(C_i)_{i \in I}$ kokoelma X:n yhtenäisiä osajoukkoja siten, että on olemassa $x \in X$, jolle $x \in C_i$ kaikilla $i \in I$. Tällöin $\bigcup C_i$ on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: $\bigcup C_i$ on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Symmetrian perusteella voidaan olettaa $x \in A$. Olkoon i sellainen, että $C_i \cap B \neq \emptyset$. Nyt $A \cap C_i$ ja $B \cap C_i$ ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä joukolle C_i, joka on yhtenäinen. Ristiriita. □

Korollaari 3. *Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $x \in X$. Tällöin x kuuluu johonkin X:n yhtenäiseen komponenttiin.*

Todistus: Olkoon $(C_i)_{i \in I}$ kaikkien X:n yhtenäisten osajoukkojen kokoelma, jotka sisältävät x:n. Koska x:n yksiö $\{x\}$ on yhtenäinen, kokoelma on epätyhjä. Lemman 2 nojalla $\bigcup C_i$ on maksimaalinen yhtenäinen osajoukko, eli yhtenäinen komponentti. □

Korollaari 4. *Jos C ja D ovat X:n yhtenäisiä komponentteja, $C \neq D$, niin $C \cap D = \emptyset$.*

Todistus: Tehdään vastaoletus, $C \cap D \neq \emptyset$. Joko $C \not\subset D$ tai $D \not\subset C$. Oletetaan symmetrian perusteella ensimmäinen. Nyt $C \cup D$ on Lemman 2 nojalla yhtenäinen, joten D ei ole maksimaalinen, eikä näin ollen yhtenäinen komponentti. Ristiriita. □

Yhtenäiseksi todistaminen

Lähipisteavaruuksia voidaan todistaa epäyhtenäisiksi yksinkertaisesti löytämällä joukot A ja B, jotka ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Yhtenäiseksi todistaminen on usein vaikeampaa, ja tässä luvussa esittelemme pari tulosta, joista yhtenäisyys tietyissä tapauksissa seuraa.

Aluksi esittelemme tuloksen, jonka avulla voidaan osoittaa verkon yhtenäisyys. Olkoon $(X, \bar{\in})$ verkkoa vastaava lähipisteavaruus ja $x \in X$. Merkitään $\mathrm{cl}\, x = \mathrm{cl}\{x\}$, ja $\mathrm{cl}^n x = \mathrm{cl}\, \mathrm{cl} \ldots \mathrm{cl}\, x$, missä sulkeumia otetaan n kappaletta.

Teoreema 5. *Olkoon $(X, \bar{\in})$ verkkoa vastaava lähipisteavaruus ja $x \in X$. Jos on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolle $\mathrm{cl}^n x = X$, niin X on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: X on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Symmetrian perusteella voidaan olettaa $x \in A$. Määritellään jokaiselle $y \in X$ arvo $v(y)$ siten, että $v(y)$ on pienin luku m, jolla $y \in \mathrm{cl}^m x$ (ja määritellään $v(x) = 0$). Olkoon $z \in B$ piste, jolla on pienin

v-arvo joukon B pisteistä. Nyt pisteestä z on särmä johonkin sellaiseen pisteeseen z', jolle $v(z') = v(z) - 1$. Mutta $v(z)$:n minimaalisuuden perusteella $z' \in A$. Siis $z \in \operatorname{cl} A$. Ristiriita. $\square$

Seuraavaksi esittelemme tuloksen, josta seuraa aika monen $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyys. Aloitamme kuitenkin aputuloksilla.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Sanomme, että $x \in \mathbb{R}$ on joukon A yläraja, jos kaikilla $a \in A$ pätee $a \leq x$. Reaaliluvuilla on seuraava käyttökelpoinen ominaisuus: Jos $A \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä ja joukolla A on yläraja, tällöin joukon A ylärajojen joukossa on pienin yläraja. Kutsumme joukon A pienintä ylärajaa joukon A *supremumiksi*.

Lemma 6. *Jokainen jana $\mathbb{R}^2$:ssa on yhtenäinen.*

Todistus: Olkoon J jana, jonka päätepisteet ovat x ja y. Kun $t \in [0,1]$, merkitään $f(t) = (1-t)x + ty$. Nyt $J = \{f(t) \mid t \in [0,1]\}$. Tehdään vastaoletus: J on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Oletetaan symmetrian perusteella, että $x \in A$.

Olkoon t_0 supremum luvuista $t \in [0,1]$, joille jana pisteestä x pisteeseen $f(t)$ sisältyy joukkoon A. Nyt mielivaltaisen lähellä $f(t_0)$:aa on joukon A pisteitä, joten $f(t_0) \in \operatorname{cl} A$, ja koska $A = \operatorname{cl} A$, $f(t_0) \in A$.

Jos $t_0 = 1$, pätee $J = A$ ja $B = \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis $t_0 < 1$. Nyt mielivaltaisen lähellä $f(t_0)$:aa on joukon B alkioita, joten $f(t_0) \in \operatorname{cl} B = B$. Siis $f(t_0) \in A \cap B$, ristiriita. $\square$

Olkoot $J_1, \ldots, J_n$ janoja siten, että kaikilla i, $i = 1, \ldots, n-1$, janan J_i loppupiste on janan J_{i+1} alkupiste. Tällöin kutsumme yhdistettä $\bigcup J_i$ *murtoviivaksi.*

Korollaari 7. *Murtoviiva on yhtenäinen.*

Todistus: Yhdestä janasta koostuva murtoviiva on yhtenäinen Lemman 6 perusteella. Useammasta janasta koostuva murtoviiva voidaan näyttää yhtenäiseksi induktiolla käyttäen Lemmaa 2. $\square$

Teoreema 8. *Olkoon $X \subset \mathbb{R}^2$ sellainen, että mitkä tahansa kaksi X:n pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla joukon X sisällä. Tällöin X on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: X on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Valitaan $x \in A$, $y \in B$. Olkoon M murtoviiva pisteestä x pisteeseen y. Mutta nyt $M \cap A$ ja $M \cap B$ ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä joukolle M. Siis M on epäyhtenäinen, mikä on ristiriita edellisen korollaarin kanssa. $\square$

Esimerkki 9. *Olkoon X annulus $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq d(x,0) \leq 2\}$. Nähdään helposti, että mitkä tahansa kaksi X:n pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla joukon X sisällä. Siis X on yhtenäinen.*

Lopuksi

Olkoon X joukko. Sanomme, että $d\colon X \times X \to [0,\infty[$ on metriikka (eli etäisyysfunktio), jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $d(x,y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.
2. Kaikilla $x,y \in X$ pätee $d(x,y) = d(y,x)$.
3. Kaikilla $x,y,z \in X$ pätee $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Huomataan, että tavallinen etäisyys (linnuntietä) missä tahansa $\mathbb{R}^n$:n osajoukossa on metriikka. Lisäksi missä tahansa metriikalla varustetussa joukossa X voidaan määritellä osajoukkojen lähipisteet samalla tavalla kuin teimme sen $\mathbb{R}^2$:n osajoukoille. Metriikan avulla määritelty $\bar{\in}$ toteuttaa aina, paitsi lähipisteavaruuden aksioomat, myös topologisen avaruuden ehdot

- Kaikilla $A,B \subset X$ ja kaikilla $x \in X$ pätee $x \mathrel{\bar{\in}} A \cup B$ jos ja vain jos $x \mathrel{\bar{\in}} A$ tai $x \mathrel{\bar{\in}} B$.
- Kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl}\operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$.

Tämän tuloksen perusteella saamme suuren joukon topologisia avaruuksia.

Yllä olemme havainneet, että topologisen avaruuden yhtenäisten komponenttien lukumäärä voidaan määritellä, kun pelkästään tiedetään kaikkien osajoukkojen lähipisteet. On ehkä hiukan yllättävää, että se voidaan tehdä näin niukkojen tietojen varassa. Itse asiassa näin niukkojen tietojen varassa voidaan määritellä myös topologisen avaruuden reikien lukumäärä ja tyyppi, mutta se kuuluukin sitten algebralliseen topologiaan, jota käsitellään vasta yliopiston kursseilla, ja sielläkin vasta syventävillä vapaaehtoisilla kursseilla.

Pähkinöitä

1. Osoita, että Teoreemassa 5 annettu ehto (äärellisen) verkon yhtenäisyydelle on *jos ja vain jos* -ehto.

2. Olkoon (X,S) suunnattu verkko. Määritellään lähipisterelaatio $\bar{\in} \subset X \times \mathcal{P}(X)$, $x \mathrel{\bar{\in}} A$ jos ja vain jos $x \in A$, tai on olemassa nuoli, jonka alkupiste on A:ssa ja loppupiste on x.

   Määritetään $\operatorname{cl}'\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ siten, että kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl}' A = A \cup B$, missä B on niiden solmujen s joukko, joille on olemassa $s' \in A$ ja nuoli pisteestä s' pisteeseen s tai nuoli pisteestä s pisteeseen s'.

   Olkoon $x \in X$ ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\operatorname{cl}'^n x = X$. Osoita, että $(X, \bar{\in})$ on yhtenäinen.

3. Olkoon $X = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että X ei ole yhtenäinen.

4. Olkoon $X = \{(q,0) \mid q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että X:n yhtenäiset komponentit ovat yhden pisteen kokoisia.

5. Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $C \subset X$ yhtenäinen. Osoita, että $\operatorname{cl} C$ on yhtenäinen.

6. Osoita, että Teoreeman 8 ehto $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyydelle ei ole *jos ja vain jos* -ehto. Voit esimerkiksi käyttää edellistä tehtävää hyväksi.

7. Osoita, että on olemassa lähipisteavaruus $(X, \bar{\in})$, joka ei toteuta ehtoa
   - Kaikilla $A, B \subset X$ ja $x \in X$ pätee, että $x \bar{\in} (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.

Liite: Pikajohdatus joukko-oppiin

Tässä liitteessä esittelemme joukko-opin notaation.

Joukolla tarkoitamme kokoelmaa alkioita[3]. Jos alkio x kuuluu joukkoon A, merkitsemme $x \in A$. Kaksi joukkoa A ja B ovat itse asiassa sama joukko, jos niihin kuuluvat samat alkiot. Eli formaalisti, $A = B$, jos

$$\text{kaikilla } x \text{ pätee } x \in A \text{ jos ja vain jos } x \in B.$$

Jos A ja B ovat joukkoja ja kaikki A:n alkiot ovat myös B:n alkioita, sanomme, että A on B:n osajoukko, mitä merkitään $A \subset B$. Jos A on joukko, A:n osajoukoiksi lasketaan myös A itse sekä tyhjä joukko $\emptyset$.

Joukkojen A ja B yhdiste $A \cup B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat A:han, B:hen tai molempiin. Joukkojen A ja B leikkaus $A \cap B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat sekä A:han että B:hen.

Jos A on joukko ja P on ominaisuus, $\{a \in A \mid P(a)\}$ on joukko, johon kuuluvat ne A:n alkiot, joilla on ominaisuus P. Jos P on ominaisuus, $\{a \mid P(a)\}$ on joukko, johon kuuluvat ne matemaattiset oliot, joilla on ominaisuus P. Äärellinen joukko voidaan kirjoittaa myös luettelemalla sen alkiot, eli $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on joukko, jonka alkiot ovat $x_1, \ldots, x_n$.

Jos a,b ovat mitä tahansa matemaattisia olioita, voidaan muodostaa järjestetty pari (a,b). Jos $a \neq b$, niin $(a,b) \neq (b,a)$, eli tässä alkioiden järjestyksellä on väliä. Kaksi järjestettyä paria (a,b), (c,d) ovat samat, $(a,b) = (c,d)$, jos ja vain jos $a = c$ ja $b = d$.

Jos A ja B ovat joukkoja, niiden karteesinen tulo $A \times B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki järjestetyt parit (a,b), missä $a \in A$ ja $b \in B$. Joukon $A \times B$ osajoukkoja R kutsutaan relaatioiksi joukkojen A ja B välillä. Jos R on relaatio ja $(a,b) \in R$, merkitään aRb.

Relaatio R joukkojen A ja B välillä on funktio, jos jokaisella $a \in A$ on olemassa täsmälleen yksi $b \in B$, jolle aRb. Tällöin merkitään $R \colon A \to B$. Jos R on funktio ja aRb, merkitään $R(a) = b$.

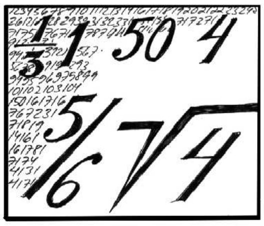
Olkoon I joukko. Oletetaan, että jokaiseen $i \in I$ on liitetty matemaattinen olio C_i. Tällöin kaikkien C_i:den muodostamaa kokonaisuutta merkitään $(C_i)_{i \in I}$ ja kutsutaan indeksoiduksi kokoelmaksi. Jos edellä C_i:t ovat joukkoja, $\bigcup C_i$ tarkoittaa joukkoa, joka on joukkojen C_i yhdiste, eli $x \in \bigcup C_i$ jos ja vain jos $x \in C_i$ jollain $i \in I$.

Tasoa merkitään $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, koska tason pisteet ovat koordinaattipareja.

Viitteet

[1] Čech, Eduard, *Topological Spaces*, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, and Interscience Publishers, a Division of John Wiley and Sons, London, New York, Sydney, 1966.

[3] Russellin paradoksin välttämiseksi alkiokokoelmat on jaettava joukkoihin ja aitoihin luokkiin. Tämä aihepiiri on kuitenkin sen verran vaikea, ettemme tässä mene siihen.

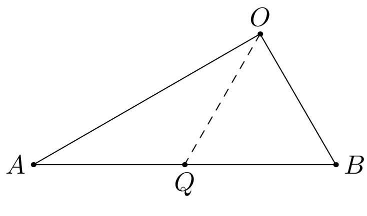


Pythagoraan lause vektoreilla

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Nettisivulta [1] löytyy 96 erilaista perustelua Pythagoraan lauseelle. Aluksi esitellään Eukleideen Elementan ykköstodistus, joka on sellaisenaan ollut monissa entisajan oppikirjoissa kautta maailman. Se saattaa olla jopa alkuperäinen Pythagoraan keksimä todistus. Eukleides todisti ensimmäisenä Pythagoraan lauseen toiseen suuntaan. Lukion matematiikassa käänteislause saadaan tavallisesti kosinilauseen seurauksena. Se onnistuu helposti myös vektoreita käyttäen, joten seuraava esitys sopinee lukion nykyisen viitoskurssin kevennykseksi.

Olkoon Q sivun AB keskipiste kolmiossa OAB.



Merkitään $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{s}$ ja $\overrightarrow{QB} = \mathbf{r}$, jolloin

$$\overrightarrow{QA} = -\mathbf{r},\ \overrightarrow{OA} = \mathbf{s} - \mathbf{r},\ \overrightarrow{OB} = \mathbf{s} + \mathbf{r} \text{ ja } \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{r}.$$

Kolmion sivujen pituuksien neliöt ovat

$$OA^2 = (\mathbf{s} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{r}) = |\mathbf{s}|^2 + |\mathbf{r}|^2 - 2\,\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}$$
$$OB^2 = (\mathbf{s} + \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{s} + \mathbf{r}) = |\mathbf{s}|^2 + |\mathbf{r}|^2 + 2\,\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}$$
$$AB^2 = |2\mathbf{r}|^2 = 4|\mathbf{r}|^2.$$

Pienellä laskulla nähdään, että Pythagoraan yhtälö

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \tag{1}$$

toteutuu, jos ja vain jos

$$|\mathbf{s}|^2 = |\mathbf{r}|^2. \tag{2}$$

Samoja merkintöjä käyttäen havaitaan vektorit $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$ toisiaan vastaan kohtisuoriksi, jos ja vain jos yhtälö (2) on voimassa. Siis (1) on voimassa, jos ja vain jos $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, joten Pythagoraan lause on todistettu molempiin suuntiin.

Viitteet

[1] `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml`