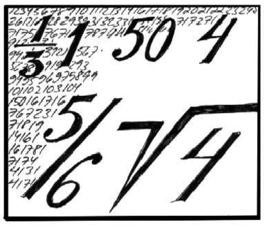
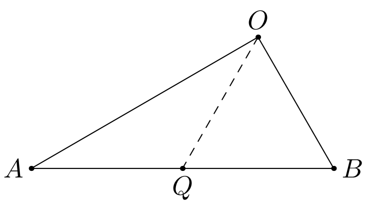


Pythagoraan lause vektoreilla

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Nettisivulta [1] löytyy 96 erilaista perustelua Pythagoraan lauseelle. Aluksi esitellään Eukleideen Elementan ykköstodistus, joka on sellaisenaan ollut monissa entisajan oppikirjoissa kautta maailman. Se saattaa olla jopa alkuperäinen Pythagoraan keksimä todistus. Eukleides todisti ensimmäisenä Pythagoraan lauseen toiseen suuntaan. Lukion matematiikassa käänteislause saadaan tavallisesti kosinilauseen seurauksena. Se onnistuu helposti myös vektoreita käyttäen, joten seuraava esitys sopinee lukion nykyisen viitoskurssin kevennykseksi.

Olkoon Q sivun AB keskipiste kolmiossa OAB.



Merkitään $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{s}$ ja $\overrightarrow{QB} = \mathbf{r}$, jolloin

$$\overrightarrow{QA} = -\mathbf{r},\ \overrightarrow{OA} = \mathbf{s} - \mathbf{r},\ \overrightarrow{OB} = \mathbf{s} + \mathbf{r} \text{ ja } \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{r}.$$

Kolmion sivujen pituuksien neliöt ovat

$$\begin{aligned} OA^2 &= (\mathbf{s} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{r}) = |\mathbf{s}|^2 + |\mathbf{r}|^2 - 2\,\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \\ OB^2 &= (\mathbf{s} + \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{s} + \mathbf{r}) = |\mathbf{s}|^2 + |\mathbf{r}|^2 + 2\,\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \\ AB^2 &= |2\mathbf{r}|^2 = 4|\mathbf{r}|^2. \end{aligned}$$

Pienellä laskulla nähdään, että Pythagoraan yhtälö

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \tag{1}$$

toteutuu, jos ja vain jos

$$|\mathbf{s}|^2 = |\mathbf{r}|^2. \tag{2}$$

Samoja merkintöjä käyttäen havaitaan vektorit $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$ toisiaan vastaan kohtisuoriksi, jos ja vain jos yhtälö (2) on voimassa. Siis (1) on voimassa, jos ja vain jos $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, joten Pythagoraan lause on todistettu molempiin suuntiin.

Viitteet

[1] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml