Solmu

Matematiikkalehti
1/2012

http://solmu.math.helsinki.fi

Solmu 1/2012

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

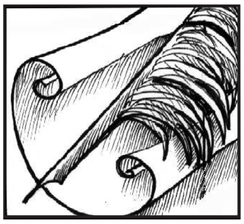
http://solmu.math.helsinki.fi

Numeroon 2/2012 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 10.4.2012 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys



Uuden päätoimittajan mietteitä

Päätoimittaja vaihtuu

Solmun päätoimittaja vaihtuu. Matti Lehtinen jatkaa onneksemme Solmun toimituskunnassa, mutta on kuusivuotisen päätoimittajakautensa jälkeen oikeutettu hieman vapaamuotoisempaan toimintaan matematiikan tunnetuksi tekemisessä. Lukijoiden, toimituskunnan ja omasta puolestani kiitän Mattia hänen ansiokkaasta ja uhrautuneesta työstään Solmun hyväksi. Hänen kymmenet kirjoituksensa ovat osaltaan tekemässä Solmusta tavanomaista oppilaslehteä suuremman: Solmusta on muodostunut todellinen koulumatematiikan tietopankki, jonka nettisivulta löytyy kaikki mahdollinen alakoulun diplomitehtävistä matematiikan olympiavalmennukseen.

Lehden linja jatkuu entisenä. Päätavoitteena on lisätä matematiikan harrastusta lukiolaisten ja peruskoululaisten keskuudessa. Tulemme siis julkaisemaan kirjoituksia, joissa mahdollisimman ymmärrettävällä tasolla laajennetaan koulussa opittua matematiikan oppimäärää ja annetaan siihen uusia näkökulmia. Julkaisemme myös matematiikkaa popularisoivia kirjoituksia, sillä koululaisten on hyödyllistä tuntea matematiikan sovelluksia. Koulussahan niihin ei juurikaan päästä, sillä siellä ollaan vasta ottamassa ensiaskelia sillä tiellä, joka myöhemmin johtaa todellisiin sovelluksiin.

Lehti julkaisee myös matematiikan asemaa koululaitoksessa ja yhteiskunnassa ruotivia poleemisia kirjoituksia, koska tällaisten tekstien julkaisukanavat ovat muuten olemattomat. Varsinkin pääkirjoituksissa tullaan aktiivisesti puuttumaan ajankohtaisiin koulupoliittisiin ilmiöihin matematiikan osalta.

Solmun tekeminen on pääosin talkootyötä, johon alati on voimassa avoin kutsu kaikille matematiikkaa harrastaville. Kirjoituksia ja lehden tunnetuksi tekemistä tarvitaan. Toivomme, että opettajat huolehtivat sen jakamisesta ainakin matematiikasta kiinnostuneille oppilaille. Tällaiset oppilaat voisivat muodostaa kouluunsa Solmu-työryhmän, joka seuraisi aktiivisesti lehden nettisivua ja facebook-ryhmää, mainostaisi lehteä vaikkapa Solmun sivulta saatavaa julistetta levittämällä ja ottaisi vastuulleen lehden jakelun. Luonnollisesti myös oppilaiden kirjoitukset ovat tervetulleita.

Ajankohtaista koulukeskustelua

Sanotaan, että tulevaisuutta on vaikeaa nähdä, sillä se on visioiden peitossa. Toisaalta, ovelasti laaditut visiot muuttuvat helposti yleisesti hyväksytyiksi tavoitteiksi, joihin sitten pyritään tarkemmin ajattelematta. Ennusteet alkavat toteuttaa itseään samalla tavalla kuin jotkut omaksuvat persoonallisuuteensa piirteitä horoskooppikirjoja lukemalla.

Opetushallitus on visioinut lukion tulevaisuutta laadittamalla osoitteesta [1] löytyvän ”Oppimisen tulevaisuus 2030-barometrin”. Sitä on työstänyt Otavan Opiston Osuuskunta, Demos Helsinki ja Turun yliopiston Tulevaisuuden tutkimuskeskus. Barometri on tehty ns. Delfoi-menetelmällä. Jonkinlaisen viitekehyksen pohjalta on esitetty väittämiä lukiokoulutuksen tulevaisuudesta. Niitä pohtii joukko asiantuntijoita, joista on muodostettu pääpaneeli ja haastajapaneeli. Pääpaneeli koostuu koulumaailmassa ja elinkeinoelämässä toimivista henkilöistä. Haastajapaneeliin oli kutsuttu peruskoulun ja lukion kehittäjähenkilöitä eri puolilta maata. Haastajapaneeli pyrkii kyseenalaistamaan pääpaneelilaisten kantoja. Eräistä väittämistä saavutetaan yksimielisyys, eräät jäävät rakentavan keskustelun alaisiksi ja jotkin väittämät muuttuvat ratkaisemattomiksi kiistakysymyksiksi.

Tavoitteena on ollut löytää mahdollisimman paljon erilaisia mahdollisuuksien rajoissa olevia tulevaisuuksia. Niille on kehitetty englanninkielinen nimitys ”futuribles”. Termille ei vielä ole suomenkielistä vastinetta, joten tähän ilmaisuun tullaan vastaisuudessa törmäämään opetushallituksen julkaisuissa ja koulutuksissa. Mahdollisia tulevaisuuden kehityskulkuja on löydetty, niitä on ruodittu ja niiden toteutumistodennäköisyyksiä on arvioitu. Hämmästystä herättää kuitenkin se, että matematiikka on mainittu tekstissä vain muutaman kerran, ja silloinkin lähinnä sivulauseissa. Siitä käytetään myös halventavaa ilmaisua ”välineaine”. Matematiikka on kuitenkin itsenäinen tiede ja se on perustana kaikessa kvantitatiivisessa tutkimuksessa sekä luonnon- että yhteiskuntatieteissä. Siksi barometrin yksi keskeisistä kysymyksistä olisi pitänyt olla matematiikan aseman laadullinen kehittäminen kouluopetuksessa. Aiheutuuhan moni opintojen keskeytyminen ja viivästyminen koulussa saadusta heikosta matematiikan pohjasta.

Mielenkiintoista on, mitä asioita tulevaan kehitykseen vaikuttamaan pyrkivät tahot nostavat esiin tästä 130 sivua käsittävästä opuksesta. Tässä mielessä barometri toimii kuten klassinen mustetahratesti psykologiassa. LUMA-keskus [2] nostaa päällimmäiseksi väitteen, jonka mukaan lukio muuttuu yleissivistävästä oppilaitoksesta soveltavaksi. Ounastellaan, että lukiossa tullaan yhä enemmän keskittymään kansallisten ja globaalien ongelmien pohtimiseen ja että yleissivistys saadaan sosiaalisen median kautta. Naamakirjasivistyksen turvin lähdetään sitten ratkomaan ihmiskuntaa koskevia vakavia ongelmia! Tällaisen näkemyksen omaavan henkilön yleissivistys ilmeisesti on juuri naamakirjasta peräisin. Tietämäni mukaan ainakin osa siellä esiintyvistä aktiviteeteista on kylähullujen yllyttämistä typeryyksiin kuten viikkokausien istuskeluun kaivinkoneen ohjaamossa, osa taas on virtuaalisten hevostallien rakentelua ja sitä, että heitetään kaveria lehmällä. Yleissivistyksen asema tulevaisuuden koulussa jääkin barometrissa lopulta ratkaisemattomien kiistakysymysten joukkoon.

Mikä sitten hyvien käytöstapojen lisäksi on todellista yleissivistystä, jota osa panelisteistakin edellyttää yhä peruskoulussa ja lukiossa opittaviksi? On osattava ilmaista itseään suullisesti ja kirjallisesti. Klassisesta maailmankirjallisuudesta suodattuu elämänkokemus ja viisaus. Historiaan perehtyminen antaa perspektiiviä nykypäivän ongelmiin. Luonnon lainalaisuudet on tunnettava, koska ne eivät ole ihmisen säädettävissä vaan niihin on mukauduttava. Lähes jokaisella lienee tarve ilmaista itseään jossakin määrin taiteen keinoin. Kieliä on osattava. Yleissivistykseen kuuluu myös algebran ja geometrian alkeet siinä mielessä, kuin ne koulumatematiikassa ymmärretään. Kaikki mainittu vaatii henkilökohtaista paneutumista. Koulun tehtävänä on varmistaa oppilaalle nämä taidot, joita ilman ei voi rakentaa tulevaisuuttaan ja ihmissuhteitaan. Tämän ajattoman sivistyksen lisäksi on aikaan sidottua yleissivistystä, kuten erilaisten digitaalisten laitteiden käyttöliittymien hallinta. Se näyttää sujuvan koulusta riippumatta, sillä koulujen laitteistot ovat aina ajastaan jäljessä.

Barometrissa ei siis matematiikasta puhuta paljoakaan ja LUMA-keskus ohittaa sen kokonaan. Sen sijaan puhutaan ”ongelmanratkaisutaidosta”. Onko tämä tulkittava niin, että ainakin osa kouluasioista vastaavista päättäjistä ja vaikuttajista on vakavissaan pyrkimässä oppiainerajojen hävittämiseen? Ollaanko koulumatematiikkaa lopullisesti vesittämässä joksikin ongelmanratkaisuopiksi? Onko nimimerkki Negatiivin keväällä 2011 LUMA-sanomissa esittämä ajatus lukion pitkän ja lyhyen matematiikan yhdistämisestä edelleen hengissä jossakin kouluhallinnon byrokratian syövereissä?

Viitteet

[1] `http://www.oph.fi/download/137072_Lukion_tulevaisuus_2030.pdf`

[2] `http://www.luma.fi/artikkelit/942/miltae-naeyttaeae-lukion-tulevaisuus`

Markku Halmetoja

Pääkirjoitus

Baltian Tie 2011 -joukkuematematiikkakilpailu Greifswaldissa Saksassa

Joni Teräväinen
Helsingin matematiikkalukio

Torstaina 3.11. viisi matemaattisesti lahjakasta lukiolaista Otte Heinävaara, Markus Pajarre, Joni Teräväinen, Felix Vaura ja Jiali Yan sekä joukkueenjohtajat Kerkko Luosto ja Matti Lehtinen kohtasivat Helsinki-Vantaan lentokentällä, kun oli aika lähteä vuotuiseen Baltian tie -joukkuematematiikkakilpailuun, joka järjestettiin tällä kertaa Greifswaldissa Itämeren rannalla Pohjois-Saksassa. Berliinin Tegelin lentokentältä matkustettiin bussilla ja junalla kilpailukaupunkiin, jossa oppaat olivat joukkuetta vastassa. Hotellissa vastaanotto oli erittäin positiivinen, sillä saimme heti järjestäjiltä tyylikkäät paidat ja laukut kilpailun neliöjuuri pii -logolla varustettuina. Ruoka oli myös hyvää.

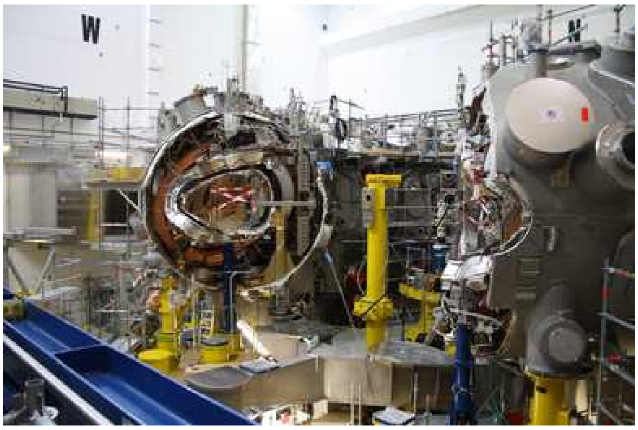
Ensimmäisenä iltana me kilpailijat laskimme pari kilpailutehtävää ja menimme sen jälkeen nukkumaan pitkästä matkasta väsyneinä. Toisena päivänä johtajillamme oli ohjelmassa tehtävien valitsemista ja kääntämistä, kilpailijoilla puolestaan bussiretki, jonka aikana kävimme muun muassa neuvostoliittolaisessa sukellusveneessä, tiedekeskuksessa, jossa oli hieno lasershow, ja Greifswaldin ydinvoimalassa, joka oli Itä-Saksan suurin ydinvoimala mutta lakkautettiin pian Saksojen yhdistymisen jälkeen. Pääsimme käymään sisällä yhdessä reaktoreista, jota ei oltu koskaan otettu käyttöön. Siellä pääsimme tutustumaan ydinvoimalan toimintaperiaatteeseen ja jopa kurkistamaan sisään itse ydinreaktoriin. Hotellilla oli jälleen illallinen, jonka jälkeen keilasimme puolalaisia vastaan. He taisivat voittaa, mutta vain niukasti. Sen jälkeen joukkueemme meni nukkumaan, sillä seuraavana aamuna oli itse kilpailu Greifswaldin Humboldt-Gymnasiumissa.

Suomen joukkue luottavaisena ennen kilpailun alkua. Vasemmalta Joni Teräväinen, Markus Pajarre, Jiali Yan, Otte Heinävara ja Felix Vaura.

Kilpailuaamuna päätin katsoa erään vanhan kansainvälisten matematiikkaolympialaisten funktionaaliyhtälötehtävän ratkaisun, jottei tehtävä jäisi vaivaamaan minua kilpailussa. Yllättäen pääsin käyttämään ratkaisun ideaa eräässä Baltian tien tehtävistä; ellen olisi katsonut ideaa, olisimme todennäköisesti saaneet vähemmän arvokkaita pisteitä. Joukkueemme oli tasapainoinen ja teki hyvin yhteistyötä. Kuitenkin tuntuu, että mukana oli myös hieman onnea. Edellä mainitun onnekkaan sattuman lisäksi yksi kombinatoriikan tehtävä ratkesi viime minuuteilla yhteistyöllä, ja viime hetkellä hutiloidusta algebran tehtävästä irtosi piste vastoin odotuksia. Kilpailun jälkeen kuitenkin suhtauduimme varovaisesti mahdolliseen menestykseen. Söimme Humboldt-lukiossa, minkä jälkeen meidät vietiin Greifswaldin kauniin keskiaikaisen vanhankaupungin opastuskierrokselle. Tämän jälkeen vierailimme Pommersches Landesmuseumissa, jossa oli näytillä niin taidetta kuin luonnontiedettä, mutta tässä vaiheessa monet kilpailijat olivat jo väsyneitä neljä ja puolituntisen kilpailu-urakan jäljiltä. Tämän jälkeen söimme kaupungilla, ja Saksassa hyvin suosittu döner kebab antoi joukkueellemme lisää energiaa. Kyseessä ei ollut ainoa kerta, kun söimme kyseistä kebabia, ja se onkin Saksassa yksi suosituimmista pikaruuista. Syömisen jälkeen kilpailijat vietiin elokuviin katsomaan matematiikka-aiheeseen sopivaa elokuvaa ”21”, joka on fiktiivinen tarina opiskelijoista, jotka tienaavat omaisuuden Las Vegasissa laskemalla kortteja blackjackissä.

Joukkueen johtaja Kerkko Luosto ihailee vastauksia.

Neljäntenä päivänä ohjelmassa oli vierailu Max Planckin plasmafysiikkainstituuttiin, jossa kuuntelimme luentoa fuusioenergiasta ja näimme oikean fuusioreaktorin, ja olimme itse asiassa viimeinen ryhmä, joka näki sen sisään, ennen kuin reaktorin viisikulmion muotoiselta torukselta näyttävä ulkokuori hitsattaisiin umpeen. Iltapäivällä menimme Greifswaldin yliopistoon, jossa Baltian tien tulokset julistettiin. Varovaisesti toivomme ennen palkintojenjakoa vain saavamme paremman tuloksen kuin viime vuonna, jolloin Suomi oli toiseksi viimeinen. Olimme kuitenkin kuudensia, keskimmäisiä yhdestätoista osallistujajoukkueesta. Mikä hienointa, voitimme kaikki osallistuneet naapurimaamme Viron, Norjan ja Ruotsin. Voitto Ruotsista kahdella pisteellä tuntui hyvältä, sillä kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa hävisimme viimeksi ruotsalaisille, nyt oli meidän vuoromme voittaa heidät. Kilpailun voitti Puola, kakkosena oli hieman yllättäen Latvia ja kolmas oli Saksa. Kilpailussa tämän vuoden vierailijamaa Etelä-Afrikka jäi viimeiseksi. Mikäli numerosymboliikkaan on uskomista, sijoituksemme lupaa jatkossakin hyvää menestystä. Saimme nimittäin alkulukuvuonna 2011 täsmälleen puolet pisteistä, ja sijoituksemme oli täydellinen luku 6.



Viittä vaille valmis Wendelstein 7 -fuusioraktori.

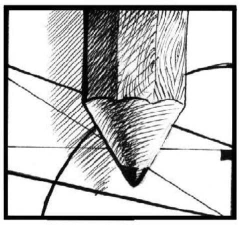
Viimeisenä päivänä lähdimme Greifswaldista aamulla, ja junamatka Berliiniin kului Ruotsin kansallisen kilpailun tehtävät ratkaistessa. Kotimatka sujui hyvin, ja Helsinki-Vantaalta lähdimme omille teillemme. Kaikilla oli varmasti mukavaa ja paljon mielenkiintoista kerrottavaa kotiin päästyään.

Vuoden 2011 Baltian Tie -kilpailun tehtävät löytyvät osoitteesta

`http://www.balticway-2011.de/wp-content/uploads/2011/11/BW_alle_sprachen.pdf`.

Verkko-Solmussa on ilmestynyt lukuteorian diplomitehtävät

`http://solmu.math.helsinki.fi/2008/diplomi/diplomi_lukuteoria.pdf`



Lukion trigonometriaa

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Lukiossa opiskeltava trigonometrian oppimäärä on viimeisimpien opetussuunnitelmauudistusten myötä näivettynyt kaavakokoelman selailuksi. Eräässä nettikeskustelussa muuan lukion opettaja totesi jopa: ”Sinin ja kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavat kuuluvat siihen alueeseen, jota minä opettajana en viitsi pitää aktiivisessa käyttömuistissa.” Tulevaisuudessa artikkelin [2] edustama trigonometrian osaaminen saattaakin olla poikkeuksellista maamme koululaitoksessa.

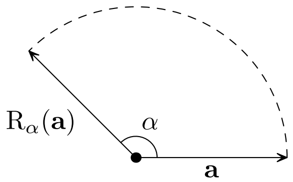
Nykyinen opetussuunnitelma mainitsee trigonometrian osalta tärkeimmiksi opittaviksi asioiksi kosinin ja sinin neliöiden summan ja sen, että tangentti on sinin ja kosinin suhde. Nämä asiat voitaisiin helposti todistaa teräville kulmille jo peruskoulussa, eivätkä ne niinmuodoin tärkeydestään huolimatta sovi lukion trigonometrian kurssin keskeisiksi sisällöiksi. Niiden ja ulkolukuna opittujen derivoimiskaavojen hallitseminen ei anna riittävää pohjaa jatko-opintoihin. Korkeakouluissa joudutaankin useimmiten aloittamaan trigonometrian opiskelu aivan alkeista, mikä hidastaa varsinaisiin opintoihin pääsemistä. Se on tavallaan looginen seuraus siitä, että lukioissa joudutaan nyt opiskelemaan uusina asioina peruskoulun entisen laajan tasokurssin sisältö. Tätä taustaa vasten yllä oleva sitaatti kaikessa järkyttävyydessään on jotenkin ymmärrettävä. Vallalla oleva koulupolitiikka on johtanut siihen, että koulussa opittavan matematiikan määrä ja laatu ovat käänteisessä suhteessa yhteiskunnassa sovellettavan tekniikan määrään ja monimuotoisuuteen. Kauemmin jatkuessaan tämä tilanne johtaa mitä ilmeisemmin asiantuntijapulaan ja joidenkin korkeaan teknologiaan perustuvien järjestelmien romahtamiseen. Uusia rakennuksia sortuu tuuli- ja lumitaakkojen alle jo nyt.

Itsenäiseen opiskeluun kykenevä matematiikasta kiinnostunut lukiolainen, jota jatkossa kutsutaan *aktiiviseksi lukijaksi*, voi Solmun artikkeleita tutkimalla osaltaan korjata tilannetta tai ainakin varmistaa oman jatko-opintokelpoisuutensa. Tämän kirjoituksen myötä hän osallistuu kosinin ja sinin yhteenlaskukaavojen *todistamiseen* ja oppii johtamaan niiden avulla tärkeimmät koulumatematiikassa esiintyvät trigonometristen funktioiden ominaisuudet. Pohjatiedoiksi tarvitaan vektoriopin alkeet, kosinin ja sinin määritelmä yksikköympyrän avulla sekä näiden funktioiden parillisuus ja parittomuus. Käsittelytapa on useimmille aloille riittävä. Tulevat matematiikan pääaineopiskelijat perehtyvät trigonometrisiin funktioihin täsmällisemmin, kun ne määritellään kompleksitasolla päättymättöminä summina, ks. [1]. Se ei kuitenkaan muuta miksikään niitä käytäntöjä ja laskurutiineja, jotka opitaan tämän esityksen perusteella. Samat faktat vain todistuvat eri tavalla, joskin kompleksitasolla näille funktioille avautuu eräitä koulumatematiikalle tavoittamattomissa olevia ominaisuuksia.

Yhteen- ja vähennyslaskukaavat

Trigonometristen funktioiden käsittely tulisi perusmääritelmien jälkeen aloittaa kosinin ja sinin yhteenlaskukaavojen johtamisella. Seuraava yksinkertainen esitys on vanhasta lukion oppikirjasta [4]. Olympiavalmennussivuilla [5] voi tutustua perinteisempään tapaan johtaa nämä kaavat.

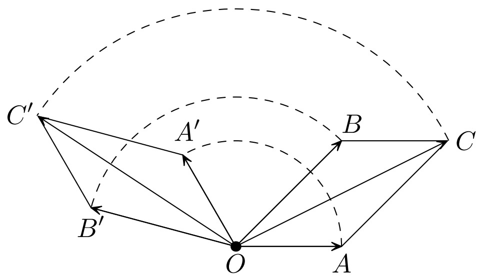
Määritellään nollavektorista eroaville vektoreille kuvion 1 osoittama suunnatun kulman α suuruinen kierto $\boldsymbol{a} \mapsto \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a})$ vektorin alkupisteen ympäri.



Kuvio 1.

Sovitaan erikseen, että $\mathrm{R}_\alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Suunnikkaan sivut ja lävistäjä kiertyvät yhtä paljon,

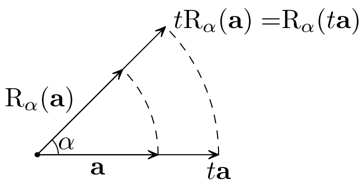


Kuvio 2.

joten vektorien summa kiertyy termeittäin. Siis

$$\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a}) + \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{b}).$$

Vektorin kierron ja venytyksen järjestys voidaan vaihtaa,



Kuvio 3.

eli jos $t \in \mathbb{R}$, niin

$$\mathrm{R}_\alpha(t\boldsymbol{a}) = t\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a}).$$

Aktiivinen lukija voi piirtää negatiivista t:n arvoa vastaavan kuvion.

On ilmeistä, että kaksi peräkkäin suoritettua kiertoa voidaan yhdistää laskemalla kulmat yhteen ja että peräkkäisten kiertojen järjestys voidaan vaihtaa. Siis

$$\mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_\beta(\boldsymbol{a})\big) = \mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{R}_{\beta+\alpha}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{R}_\beta\big(\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a})\big).$$

Lisäksi on selvää, että

$$\mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{j} \quad \text{ja} \quad \mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{i}.$$

Suoritetaan seuraavaksi kulman α suuruinen kierto kantavektoreille $\boldsymbol{i}$ ja $\boldsymbol{j}$. Kosinin ja sinin määritelmien mukaan

$$\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{i}) = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\,\boldsymbol{j},$$

ja edellä todettuja laskusääntöjä soveltaen

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{j}) &= \mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{i})\big)\\
&= \mathrm{R}_{\pi/2}\big(\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{i})\big)\\
&= \mathrm{R}_{\pi/2}\big(\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\,\boldsymbol{j}\big)\\
&= \cos\alpha\,\mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{i}) + \sin\alpha\,\mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{j})\\
&= \cos\alpha\,\boldsymbol{j} - \sin\alpha\,\boldsymbol{i}.
\end{aligned}$$

Kierretyt kantavektorit ovat siis

$$\begin{cases} \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{i}) = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\,\boldsymbol{j} \\ \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{j}) = \cos\alpha\,\boldsymbol{j} - \sin\alpha\,\boldsymbol{i}. \end{cases}$$

Yhtälöstä

$$\mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\boldsymbol{i}) = \mathrm{R}_\beta\big(\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{i})\big)$$

saadaan nyt helposti (aktiivinen lukija suorittaa yksityiskohdat) yhteenlaskukaavat

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \end{cases}$$

ja niistä edelleen kosinin parillisuutta ja sinin parittomuutta soveltaen vähennyslaskukaavat

$$\begin{cases} \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

On käsittämätöntä, että opetussuunnitelmista vastaavat henkilöt ovat ”unohtaneet” näin hienon ja keskimääräiselle pitkän matematiikan opiskelijalle helposti avautuvan tavan perustella nämä tärkeät kaavat. MAOLkin kannattaa ulkolukua ja kaavakokoelmasta lunttaamista vastauksessaan ns. π:n päivän kirjeeseen: ”Oikean, ongelman ratkaisemisessa tarvittavan tiedon etsiminen laajasta tietokokoelmasta on hyödyllinen taito, joka on syytä oppia lukiossa.” (Ks. [6] ja [7].) Eikö kuitenkin olisi hyödyllisempää oppia *ymmärtämään* matematiikkaa perusteista lähtevien ja loogisesti etenevien esitysten kautta?

Aktiivinen lukija pystyy nyt johtamaan lähes kaikki keltaisen kirjan trigonometrian kaavat. Melkein vitsinä voi esimerkiksi todeta, että kosinin vähennyslaskukaavasta seuraa

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos(\alpha-\alpha) = \cos 0 = 1.$$

Ainakin kaksinkertaisen kulman kosini ja sini sekä komplementti- ja suplementtikulmien kosinit ja sinit kannattaa katsoa välittömästi, sillä joitakin niistä käytetään seuraavissa esimerkeissä ilman erillistä mainintaa. Myös tangentin yhteen- ja vähennyslaskukaava on hyvä selvittää itselleen, sillä viimeksi mainittuun perustuu mm. kahden suoran välisen kulman laskeminen analyyttisen geometrian kurssilla. Sanomattakin on selvää, että tätä laskutapaa ei mitenkään voi perustella tuolla kurssilla.

Esimerkkejä

Seuraavia tehtäviä voisi epäilemättä ratkaista symboliseen laskemiseen kykenevällä laskimella, mutta tuolloin suoritukseen saattaisi jäädä kohtia, joita ratkaisija ei ymmärrä. Laskin toimisi siinä tapauksessa kuten tiibetiläinen rukousmylly: sitä vain pyöritetään ja rukous kieppuu korkeuksiin ilman, että pyörittäjällä on selvää käsitystä sen sisällöstä. Oppimisen kannalta on siis parempi johtaa itse tarvittavat välitulokset.

Esim. 1 Määritettävä funktion $f(x) = \sin x \sin(a + x)$ suurin ja pienin arvo.

Ratk. Ensimmäiseksi ehkä tulee mieleen sinin yhteenlaskukaavan soveltaminen jälkimmäiseen tekijään, mutta se johtaisi ilmeisesti alkuperäistä hankalampaan ongelmaan. Hieman parempi ajatus on laskea funktion derivaatta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \sin(a + x) + \sin x \cos(a + x) \\ &= \sin(a + 2x), \end{aligned}$$

ja ratkaista tehtävä normaalina ääriarvotehtävänä. Derivaattaa ei kuitenkaan tarvita, jos huomaa, että kahden sinin tulo saadaan kosinin vähennys- ja yhteenlaskukaavoista:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Sijoittamalla tähän $\alpha = a + x$ ja $\beta = x$ saadaan

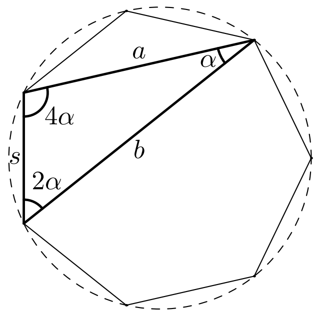
$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(\cos a - \cos(a + 2x)\big),$$

mistä tulos jo näkyykin.

Esim. 2 Osoitettava, että säännöllisen 7-kulmion sivun s ja eripituisten lävistäjien a ja b välillä vallitsee yhtälö

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{s}.$$

Ratk. Tämän 70-luvun ylioppilastehtävän trigonometrinen ratkaisu on suoraviivainen sinilauseen sovellus, jonka yksityiskohdissa tosin tarvitaan tiettyä näppäryyttä. Sijoittamalla 7-kulmio ympyrän sisään nähdään kehäkulmia



Kuvio 4.

vastaavien kaarien avulla, että sivu ja lävistäjät muodostavat kolmion, jonka kulmat ovat α, 2α ja 4α. Sinilauseen avulla saadaan

$$\frac{\sin 2\alpha}{a} = \frac{\sin \alpha}{s} \quad \text{ja} \quad \frac{\sin 4\alpha}{b} = \frac{\sin \alpha}{s},$$

josta edelleen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{s}\left(\frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha}\right).$$

Oikealla oleva sulkulauseke on siis osoitettava ykköseksi ehdolla $7\alpha = \pi$. Kirjoitetaan se aluksi muotoon

$$\frac{\sin \alpha (\sin 4\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha \sin 4\alpha}.$$

Tämä ilmeisesti yksinkertaistuu, jos onnistutaan laskemaan osoittajassa oleva sinien summa. Tarvittava aputulos saadaan sinifunktion yhteen- ja vähennyslaskukaavoista:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y.$$

Yhtälöparista

$$\begin{cases} x + y = 4\alpha \\ x - y = 2\alpha \end{cases}$$

seuraa $x = 3\alpha$ ja $y = \alpha$, joten

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = 2 \sin 3\alpha \cos \alpha.$$

Niinpä

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha (\sin 4\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha \sin 4\alpha} &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha \sin 4\alpha} \\ &= \frac{\sin 2\alpha \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha \sin 4\alpha} \\ &= \frac{\sin 3\alpha}{\sin 4\alpha} \\ &= \frac{\sin(\pi - 4\alpha)}{\sin 4\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha} = 1, \end{aligned}$$

ja väite on todistettu.

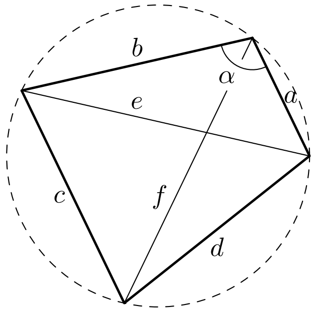
Seuraavassa vielä muutama harjoitus aktiivisen lukijan mietittäväksi.

1. Osoita, että $\sin(x + y)\sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$.
2. Määritä funktion $f(x) = a \cos x + b \sin x$ suurin ja pienin arvo.
3. Osoita, että jos $\tan x \in \mathbb{Q}$, niin myös $\cos 2x \in \mathbb{Q}$ ja $\sin 2x \in \mathbb{Q}$.

Jännenelikulmiosta

Edellisen kappaleen harjoituksista selviytyneen aktiivisen lukijan kannattaa myös perehtyä jo mainittuun olympiavalmennussivustolla olevaan järeään trigonometriapakettiin [5]. Katsotaan lopuksi sieltä eräs jännenelikulmion ominaisuus. Tällaisen nelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia, joten niiden kosinit ovat toistensa vastalukuja. Siksi kosinilauseen avulla on mahdollista löytää sivujen ja lävistäjien välisiä yhtälöitä, joissa kulmat eivät ole eksplisiittisesti mukana. Asetetaan tehtäväksi löytää mahdollisimman yksinkertainen tällainen yhtälö.

Olkoot jännenelikulmion sivut a, b, c ja d sekä lävistäjät e ja f.



Kuvio 5.

Kosinilause antaa e:n neliölle yhtälöt

$$\begin{cases} e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha, \end{cases}$$

joista kosinitermin eliminoimisella saadaan

$$\begin{aligned} e^2(ab+cd) &= a^2cd + b^2cd + c^2ab + d^2ab \\ &= (a^2cd + d^2ab) + (c^2ab + b^2cd) \\ &= ad(ac+bd) + bc(ac+bd) \\ &= (ad+bc)(ac+bd). \end{aligned}$$

Siis

$$e^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}.$$

Toisen lävistäjän neliö löytyy mukavimmin näkökulmaa muuttamalla: sijoittamalla edelliseen $a \to b$, $b \to c$, $c \to d$, $d \to a$ ja $e \to f$, saadaan

$$f^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}.$$

Niinpä

$$e^2f^2 = (ac+bd)^2,$$

eli

$$ef = ac + bd.$$

Tämä kaunis tulos on keksijänsä mukaan nimetty *Ptolemaioksen*[1] *lauseeksi*:

Jännenelikulmion lävistäjien tulo on vastakkaisten sivujen tulojen summa.

Lauseen perinteinen, ehkä jopa alkuperäinen, todistus löytyy teoksessa [3]. Aktiivinen lukija miettinee, voisiko Ptolemaioksen lauseen avulla ratkaista edellä esitetyn 7-kulmio-ongelman yksinkertaisemmin!

Viitteet

[1] Pekka Alestalo, *Trigonometriset funktiot*, http://solmu.math.helsinki.fi/2005/1/alestalo.pdf

[2] Juhani Fiskaali, *Heronin ja Brahmaguptan kaavoista*, http://solmu.math.helsinki.fi/2011/2/heron.pdf

[3] Matti Lehtinen, Jorma Merikoski, Timo Tossavainen, *Johdatus tasogeometriaan*, WSOY 2007.

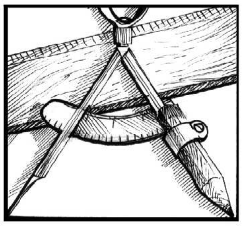
[4] Yngve Lehtosaari, Jarkko Leino, Pekka Norlamo, *Laaja matematiikka 2, kurssit 5–8*, Kirjayhtymä 1983.

[5] http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/trig.pdf

[6] http://solmu.math.helsinki.fi/2011/maol.pdf

[7] http://solmu.math.helsinki.fi/2011/MAOLvastaus.pdf

[1] Klaudios Ptolemaios, (n.85–n.165), kreikkalainen astronomi.



Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan alkukierroksen tiimoilta

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL järjestää vuosittain matematiikkakilpailun lukiolaisille. Kilpailussa on kolme sarjaa ja kaksi kierrosta. Sarjajako perustui alkuaan siihen, millä luokalla kilpailija opiskeli ja mitä hänen näin ollen voitiin olettaa osaavan, mutta luokattoman lukion myötä sarjajako perustuu vain oppilaan ikään. Kilpailun perus- ja välisarjoissa on yläikäraja, mutta avoimeen sarjaan voi osallistua kuka hyvänsä lukiolainen. Käytännössä suurin osa avoimen sarjan osallistujista on ainakin kolmannella lukiovuodellaan. Asia ei tietysti ole aivan yksioikoinen, mutta voi karkeasti odottaa, että kilpailun osallistujat edustaisivat suunnilleen ikäluokkansa parhaita matematiikan osaajia. Vastauksista saisi siis jonkinlaista läpileikkausta runsaan 11 vuoden matematiikan opiskelujen mahdollisesta hyvästä tuotoksesta.

Kilpailun ensimmäinen kierros käydään kouluissa. MAOL lähettää kilpailutehtävät kaikkiin kouluihin, ja kilpailun järjestäminen on siten yleensä matematiikanopettajien vastuulla. Vastaukset palautetaan kilpailutoimikunnalle arvostelemattomina, ja kaikkien osallistujien vastaukset toivotaan palautettavan.

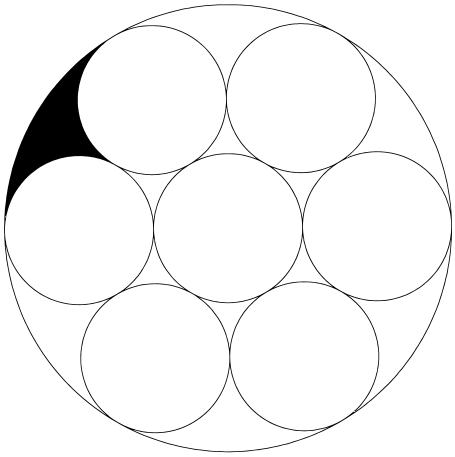
Vuonna 2011 alkukilpailu pidettiin 1. marraskuuta. Kilpailutoimikunta sai avoimen sarjan vastauksia kaikkiaan 121 lukiosta. Tämä on noin 35 % Suomen lukioista. Loput 65 % ovat pitäneet kilpailun järjestämistä tarpeettomana, koulun aikatauluihin sopimattomana tai sitten ovat järjestäneet kilpailun, mutta katsoneet paremmaksi olla lähettämättä suorituksia kilpailutoimikunnalle. Kilpailuvastauksia saapui yhteensä 546 eli keskimäärin 4,5 lukiota kohden. Joissakin lukioissa kilpailukoe oli selvästi järjestetty koko pitkän matematiikan opiskeluryhmälle. Tällaisista kouluista saapui paljon melko vähän asiaa sisältäviä vastauspapereita. Joistakin lukioista vastauksia tuli vain yksi tai pari.

Tehtävät arvosteltiin samalla asteikolla, maksimissaan kuusi pistettä joka tehtävästä, joten maksimipistemääräksi tuli 24. Kokonaisuudessaan pistejakauma ei ollut kovin normaalijakauman mukainen: keskiarvo oli noin 5,5, ja aivan ilman pisteitä jäi 111 kilpailijaa. Parhaaseen neljännekseen sijoittuivat ainakin 9 pistettä saaneet.

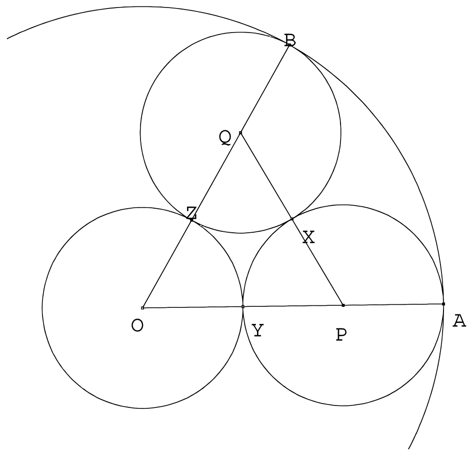
Mitä kilpailutoimikunnan saamat vastaukset kertovat suomalaisten abiturienttien osaamisesta? Katsotaan tehtävä tehtävältä.

Tehtävä 1

Kilpailun ensimmäinen tehtävä oli, niin kuin odottaa sopikin, helpoin. Tehtävässä oli oheinen kuvio ja teksti: *Kuviossa ison ympyrän säde on 6, pienet ympyrät ovat samankokoisia ja sisin sekä uloin ympyrä sivuavat muita ympyröitä. Määritä kuvion varjostetun osan* *ala.* Tehtävää voi kritisoida: kaikki informaatio ei sisälly tekstiin, vaan osa on arvattava kuvasta. Kuvan mukaan kukin kuudesta pienestä ympyrästä sivuaa paitsi sisintä ja ulointa ympyrää, myös viereisiä ympyröitä. Tehtävän teksti sallisi sellaisenkin tilanteen, jossa jotkin kuudesta pienestä ympyrästä leikkaisivat toisiaan. Myöskään sitä, että sisimmän pienen ympyrän keskipiste yhtyy uloimman ympyrän keskipisteeseen, ei tehtävässä ilmoiteta; kun sisimmän ja uloimman ympyrän välissä on vähintään kaksi samansäteistä sivuavaa ympyrää, keskipisteiden yhtyminen on välttämätöntä.



Kun kuviosta luettavat ilmeiset symmetriat hyväksyy, niin halutun pinta-alan voi laskea hiukan eri reittejä. Joka tapauksessa on huomattava, että ison ympyrän halkaisija on kolme pienen ympyrän halkaisijaa, mistä seuraa, että pienen ympyrän säde on 2. Kysytty ala on kuudesosa jäännöksestä, kun ison ympyrän alasta $\pi 6^2 = 36\pi$ poistetaan seitsemän pikkuympyrän alaa, $7 \cdot 4\pi$ ja kuusi pikkuympyröiden väliin jäävää ympyränkaarikolmiota, sellaista kuin kuvan kaarien $\overset{\frown}{ZY}$, $\overset{\frown}{YX}$ ja $\overset{\frown}{XZ}$ rajoittama kuvio. Olennaista on, että ympyröiden sivuamispisteet ovat niiden keskipisteitä yhdistävillä janoilla: tämähän seuraa siitä, että sivuavien ympyröiden sivuamispisteisiin piirretyt säteet ovat molemmat kohtisuorassa ympyröiden yhteistä tangenttia vastaan ja ovat siis saman suoran janoja. Näin ollen ympyränkaarikolmion ZYX ala on tasasivuisen kolmion OPQ ala vähennettynä kolmella pienen ympyrän kuudenneksella. Koska $OP = 4$, tasasivuisen kolmion ala on $\frac{1}{2}4^2 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$. Kun laskutoimitukset suoritetaan, kysytyn alueen alaksi tulee $\frac{10}{3}\pi - 4\sqrt{3}$. Hiukan suoremmin pääsee perille, jos lähtee liikkeelle sektorista, joka on ison ympyrän kuudennes ja siis alaltaan 6π, vähentää siitä tasasivuisen kolmion alan $4\sqrt{3}$ ja kaksi pienen ympyrän kolmannesta eli $\frac{2}{3} \cdot 4\pi$. Edelleen on mahdollista vähentää uloimman ympyrän alasta sen säännöllisen kuusikulmion, jonka kärjet ovat kuuden väliympyrän keskipisteet, ala sekä kuusi pienen ympyrän kahden kolmanneksen kokoista sektoria. Kuusikulmion alan laskeminen edellyttää jälleen sen yhden kuudenneksen muodostaman tasasivuisen kolmion alan laskemista.



Koska jokainen näistä strategioista perustuu siihen, että ympyröiden sivuamispisteet (kuten kuvan X) sijaitsevat ympyröiden keskipisteiden yhdysjanoilla (kuten PQ) eikä tämä suoraan näy tehtävän mukana olleessa kuviossa, täysiin pisteisiin edellytettiin, että tähän asiaan olisi jotain huomiota kiinnitetty. Äärimmäisen harvoissa vastauksissa näin tapahtui, vaikka kolmion OPQ kulmien ja sivujen suuruuksia oli ahkerasti perusteltu. Näinpä yleisin tehtävästä annettu pistemäärä oli 5. (Nollaksi arvioituja vastauksia oli yksi vähemmän; kaikissa muissa tehtävissä 0 oli myös yleisin pistemäärä.)

Kilpailijat saivat käyttää apuvälineinään laskimia ja taulukkokirjoja, toisin kuin matematiikkakilpailuissa yleensä. Tämä johti useat ratkaisijat likiarvolaskuihin; puhdasta likiarvolaskelmaa, vaikka se olisikin johtanut oikeannäköiseen tulokseen, ei pidetty aivan täydellisenä. Arvostelijoiden ratkaisu on periaatteellinen: tehtävä koskee olennaisesti R-säteistä ympyrää, ei tiettyä konkreettista tilannetta. Ja onhan ketjussa, jossa mukana on vähennyslaskujakin, aina tarjolla olennaisen pyöristysvirheen vaarakin, jota ei etukäteen osaa arvioida. Aika monet suhtautuivat lukuarvoihin kovin suurpiirteisesti. Kun laskin näytti alueen pinta-alaksi vähän yli 3,5, vastaukseksi annettiin ”4”. Lienee opittu, että kun mittausdata, tässä siis uloimman ympyrän säde, on kerrottu yhdellä merkitsevällä numerolla, ei vastauksessakaan saisi olla enempää tarkkuutta. Taulukkokirjan käyttö ja ilmeisesti muussa yhteydessä kuin matematiikassa annettava tieteellisen kirjoittamistavan opetus johti aika monet vastaajat hiukan koomisenoloiseen esitystapaan: tasasivuisen kolmion alan laskemiseen käytetty menetelmä esitettiin lähdeviitteineen ”MAOL, s. 30”.

Oma lukunsa on sitten oikeaksi vastaukseksi saatu "tarkka arvo". Pieni kokoelma tällaisia:

$$\frac{10}{3}\pi - 2\sqrt{12}, \quad \frac{10\pi - 12\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{20}{6}\pi - 4\sqrt{3},$$

$$\frac{20\pi - 24\sqrt{3}}{6}, \quad 3\,\frac{1}{3}\pi - 8\sin 60^\circ, \quad 6\pi - \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{12},$$

$$\frac{8\pi - \left(\frac{3\cdot 4^2\sqrt{3}}{2} - 3\cdot\pi\cdot 2^2\right)}{6},$$

$$\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi 6^2 - \frac{4\cdot\sqrt{4^2-2^2}}{2} - \left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\pi 2^2\right)\cdot 2,$$

$$\frac{2(5\cdot\pi - 6\sqrt{3})}{3}, \quad 2\left(3\pi - 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right),$$

$$\frac{20\pi - 12\sqrt{12}}{6}, \quad 6\pi - \left(4\sqrt{3} - 2\pi + \frac{14}{3}\pi\right),$$

$$\frac{2}{3}(5\pi - 6\sqrt{3}).$$

"Sieventäminen" ei ole tarkkaan määritelty toimenpide, ja numeerisen likiarvon tuottamisen kannalta saattaa olla aika yhdentekevääkin se, mihin muotoon tällaisen ratkaisun saattaa.

Vielä muutama havainto: yllättävän moni kilpailija käytti tehtävän ympyröistä nimitystä pallo. Kolmion alan laskeminen oli usealle kilpailijalle ylivoimaista tai outoa. Aika monelle tasasivuisen kolmion ala oli sama kuin sivun neliö. Muutama vastaaja oli onnistunut päättelemään näin: kuviossa on kahta ympyränkaarimonikulmiota, kumpaakin kuusi identtistä kappaletta. Olkoon toisen, kysytyn kuvion ala x ja toisen y. Silloin $6(x + y) = 36\pi - 7\cdot 4\pi = 8\pi$ ja myös $x + y = \frac{4}{3}\pi$. Tämän jälkeen kilpailija "ratkaisi" yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 6x + 6y = 8\pi \\ \;\; x + \;\; y = \frac{4}{3}\pi \end{cases}$$

arvaamalla y:n arvon!

Tehtävä 2

Kilpailun toisessa tehtävässä oli ratkaistavana Diofantoksen yhtälöksi nimetty yhtälö

$$x^2 + (10y - y^2)^2 + y^6 = 2011,$$

ja tehtävän tekstissä vielä täsmennettiin, että etsittävänä ovat yhtälön kokonaislukuratkaisut. Pistesaldolla mitattuna tehtävä osoittautui sarjan toiseksi vaikeimmaksi. Ratkaisu on kuitenkin suoraviivainen. Yhtälön vasen puoli on aina vähintään y^6, ja jos $|y| \geq 4$, $y^6 \geq 4^6 = 2^{12} > 4000$. Ratkaisua varten riittää, kun käy läpi y:n kokonaislukuarvot väliltä $[-3, 3]$ ja toteaa, että kokonaisluku x toteuttaa yhtälön vain tapauksessa $y = 3$; silloin voi olla $x = 29$ tai $x = -29$. Jos haluaa, niin laskutyötä voi hiukan lyhentää havainnolla $2011 \equiv 3 \mod 4$. Koska parillisten lukujen neliöt ovat neljällä jaollisia ja parittomien $\equiv 1 \mod 4$, on yhtälön vasemman puolen kolmen neliöluvun oltava parittomia, joten erityisesti y on pariton.

Ratkaisuissa esiintyi aika monta sellaista, joissa ratkaisu $(x, y) = (29, 3)$ annettiin ilman mitään selvityksiä siitä, miksi se on (melkein) ainoa ratkaisu. Tällaista arvauksenluontoista havaintoa ei kovin monin pistein palkittu. Tehtävän tekstin ilmaus "Diofantoksen yhtälö" ja taulukkokirjan tunnollinen selaaminen johtivat sangen monen vastaajan kopioimaan vastauspaperiinsa MAOL-taulukot-kirjan (vuoden 2006 laitoksen) sivulla 57 esiintyvän lineaarisen eli ensimmäisen asteen Diofantoksen yhtälön yleisen ratkaisun, jolla ei ole mitään tekemistä tämän tehtävän kanssa. Taulukkokirjan kirjoittaja ei näytä muistaneen, että Diofantoksen yhtälö on laajempi käsite. Toinen "käsitelaajennus" pilkahti aika monissa ratkaisuissa: perusteluksi y:n mahdollisten arvojen rajaamiselle esitti usea sitä, että yhtälön vasen puoli on (y:n suhteen) "ylöspäin aukeava paraabeli". Paraabeli on kuitenkin kartioleikkaus ja sellaisena toisen asteen käyrä. Joskushan kyllä puhutaan kuutioparaabelista tai semikuubisesta paraabelista.

Tehtävä 3

Kolmas kilpailutehtävä tuotti pisteitä noin neljänneksen enemmän kuin toinen. Tehtävänä oli osoittaa, että kaavalla

$$f(x) = \frac{x^2 - 2011x + 1}{x^2 + 1}$$

määritelty funktio f toteuttaa epäyhtälön $|f(x) - f(y)| \leq 2011$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Yksinkertaisin todistus lienee se, jossa lasketaan kolmioepäyhtälöä käyttäen

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= 2011\left|\frac{y}{y^2+1} - \frac{x}{x^2+1}\right| \\ &\leq 2011\left(\frac{|y|}{|y|^2+1} + \frac{|x|}{|x|^2+1}\right) \end{aligned}$$

ja sitten sovelletaan molempiin yhteenlaskettaviin relaatiosta $(a-1)^2 \geq 0$ välittömästi seuraavaa epäyhtälöä

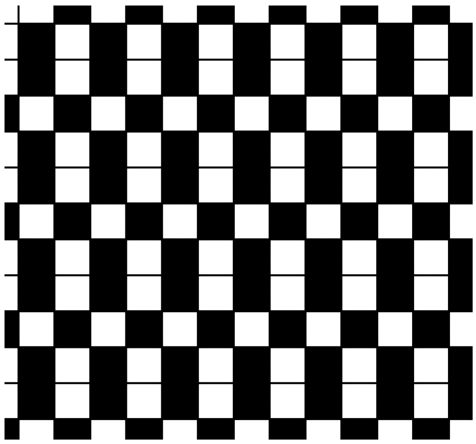
$$\frac{a}{a^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Muutamat kilpailijat olivat tämän huomanneet. Useimmat oikeat ratkaisut perustuivat havaintoon $|f(x) - f(y)| \leq \max_{t\in\mathbb{R}} f(t) - \min_{t\in\mathbb{R}} f(t)$. Maksimin ja minimin määrittäminen sujuu normaalia rataansa. Funktion f derivaatalla osoittautuu olevan tasan kaksi nollakohtaa eli potentiaalista f:n ääriarvokohtaa, jotka ovat -1 ja 1, $f(-1) = \frac{1}{2}\cdot 2013$ ja $f(1) = -\frac{1}{2}\cdot 2009$. Kun vielä otetaan huomioon, että $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, havaitaan, että $f(-1)$ on f:n globaali maksimi ja $f(1)$ globaali minimi. Lisäksi $f(-1) - f(1) = 2011$. – Tämä ratkaisu, joka esiintyi hyvinkin monessa paperissa selkeänä ja täsmällisenä, pani olettamaan, että jokseenkin samanlainen tehtävä lienee jossain suositussa oppikirjassa. Kolmannessa tehtävässä oli kaikkiaan eniten täysin pistein arvosteltuja vastauksia, melko tasan 10 % kaikista.

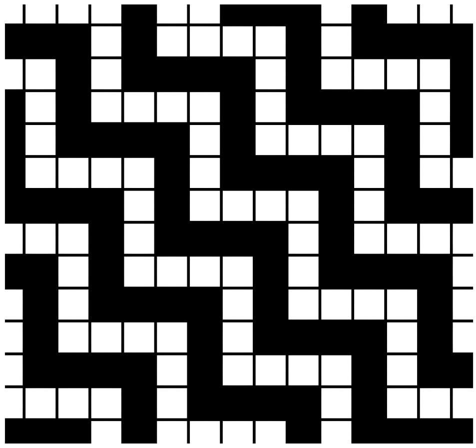
Kun funktioista ja niiden kuvaajista puhutaan, ovat tyyppiä $y = f(x)$ olevat yhtälöt tavallisia. Tämä lienee harhauttanut muutamat kilpailijat selvittelemään $|f(x) - f(y)|$:n sijasta lauseketta $|f(x) - f(f(x))|$. Siitä muodostuu tehtävän funktion tapauksessa aika näyttävä murtolauseke.

Tehtävä 4

Viimeinen tehtävä tuotti pisteitä vähiten. Tehtävän teksti meni näin: *Taso laatoitetaan valkoisilla ja mustilla yksikköneliöillä niin, että toisiaan koskettavilla laatoilla on joko kokonainen yhteinen sivu tai vain yhteinen kärki. Tasoon piirretyn janan sanotaan olevan valkoinen, jos on olemassa sellaiset valkoiset laatat, että jana pysyy näiden sisäpuolella lukuun ottamatta kohtia, joissa se leikkaa sivuja; vastaavasti määritellään musta jana. Osoita, että taso voidaan laatoittaa niin, ettei minkään valkoisen tai mustan janan pituus ole suurempi kuin 5.*



Laatoitustehtävät ovat yksi suosittu matemaattisen kilpatehtävän laji. Vaikka tehtävän teksti oli pitkähkö, se jätti muutamia väärintulkintamahdollisuuksia, sellaisia, jotka eivät heti tule laatoitustehtäviä enemmän nähneen mieleen. Jotkin kilpailijat tulkitsivat valkean ja mustan janan ehdossa esiintyvän sanan sivu niin, että se ei sisällä neliön kärkeä. Näin ei olisi mahdollista asettaa valkoista janaa kulkemaan kahden toisiaan kärjessä koskettavan valkoisen laatan kautta. Vielä ankaramman eston loivat kilpailijat, joille taso ei ollut joka suuntaan äärettömiin jatkuva, vaan esimerkiksi 4×4-levy.

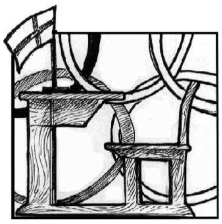


Tehtävän ratkaisuiksi tarjottiin aika monenlaisia laatoitusjärjestelmiä. Monesta saattoi heti nähdä, ettei oltu ajateltu loppuun asti, mutta pisteitä jaettiin myös yrityksistä, joiden puutteellisuus ei heti ollut aivan ilmeinen. Kelvollisiksi ratkaisuiksi osoittautuivat ainakin oheisten kuvien mukaiset laatoitukset. Kummastakin löytää enintään sellaisen yksivärisen janan, jonka pituus on $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} < 5$. Tehtävä arvosteltiin aika lievästi. Oikeanlainen kuvio ilman enempiä perusteluja tuotti jo runsaasti pisteitä.

Lopuksi

Kilpailun tulokset ovat melko karut. Sen yksi ilmeinen tarkoitus, matematiikan pariin kannustaminen, ei varmaan toteudu ainakaan niiden kilpailijoiden kohdalla, joille kaikki tehtävät osoittautuivat ylivoimaisiksi. Lukion matematiikkakilpailun perus- ja välisarjoissa on ryhdytty käyttämään monivalintatehtäviä, joista useampi kilpailija luultavasti aina jonkin pisteen saa. Riman laskemisella ei kuitenkaan olisi pelkästään myönteisiä seurauksia. Kun matematiikkakilpailua markkinoidaan väylänä esimerkiksi kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin, ei ylioppilastutkintolautakunnan ratkaisu, vaikeuksien kiertäminen mahdollisimman kaukaa, voi olla tervettä politiikkaa. Lähes kaikkialla maailmassa vastaavien kilpailujen tehtävät ovat selvästi suomalaisia vaativampia. Kilpailun on voitava seuloa esiin niitäkin, jotka todella osaavat ja ajattelevat.

Yksi organisatorinen muutos voisi olla hyväksi. Jos kilpailu olisi kolmiportainen, niin että koulutason alkukierroksen ja valtakunnallisen loppukilpailun väliin asettuisi alueellinen kilpailu, voisi ensimmäinen kierros olla helpompi ja samalla kannustavampi. Alueellisen kierroksen järjestämiseen tulisi voida rekrytoida Matemaattisten aineiden opettajien alueellinen kerho-organisaatio ja eri puolilla maata sijaitsevat yliopistot ja korkeakoulut. Tämän vision Suomessa olisi kyllä nykyistä enemmän matematiikasta oikeasti kiinnostuneita opettajia, ja heillä innostuneita oppilaita.



Solmun Matematiikkadiplomit

Marjatta Näätänen
Dosentti, Helsingin yliopisto

Lukudiplomilla on jo vuosia kannustettu oppilaiden lukemisharrastusta, niinpä opettajien taholta tuli toive saada myös matematiikkadiplomi. Solmun etusivulta `http://solmu.math.helsinki.fi` on nyt suora reitti matematiikkadiplomisivulle. Siellä on ohjeet ja ensimmäiset kuusi diplomia tehtävineen. Diplomit eivät ole tiukasti sidottuja vuosiluokkiin, vaikkakin niiden numerointi kertoo etenemisestä suunnilleen vuosiluokkien mukaisesti. Myös ylempien luokkien oppilaat voivat kokeilla näitä ja diplomisivuilta löytyviä lukiollekin sopivia tehtäviä.

Diplomien käyttö ja palaute

Diplomeihin voi pyytää vastaukset koulun sähköpostiin, samalla saadaan käsitystä diplomien leviämisestä. Esimerkiksi seuraavilla paikkakunnilla on kouluja, joissa diplomitehtäviä lasketaan: Helsinki, Espoo, Vantaa, Sastamala, Ristiina, Ilmajoki, Nurmijärvi, Hollola, Mynämäki, Laukaa, Lumijoki, Oulainen, Joroinen, Seinäjoki, Oulu, Karstula, Lohja, Kuopio, Nousiainen, Riihimäki, Huittinen, Kokkola, Oulunsalo, Vehmaa, Jyväskylä, Haukipudas, Joensuu, Kankaanpää, Mäntsälä, Loimaa, Kolari, Vihti, Hartola, Haapavesi, Tuusula, Kokkola, Ähtäri, Kurikka, Lahti, Lappeenranta.

Jotkut opettajat antavat vastauksia pyytäessään myös palautetta. Tässä on otteita:
- Olette tehneet hienoa työtä!
- Lapset ottivat tehtävät innolla vastaan.
- Hienoa, että tällainen matikkadiplomi on toteutettu kaikkien käytettäväksi, kiitos siitä!
- Olemme useamman luokan kanssa ottamassa käyttöön kehittelemänne matematiikkadiplomit. Yritän saada koko koulumme innostumaan diplomista; vinkkasin myös muille kuntamme alakouluille.
- Kiitos aivan ihanasta matikkadiplomista. Oppilaani ovat aivan innoissaan siitä.
- Koulumme oppilaita on innostettu ja kannustettu matikkadiplomien tekemiseen ja monet oppilaista ovat siihen tosissaan perehtyneet.
- Meillä on ollut diplomeja jaossa joka luokka-asteella (eli kaikki kolme eri diplomityöpakettia), joten vastauksia kaivataan jokaiselle diplomitasolle.
- Käytin diplomeja 2. luokan kanssa viime keväänä. Tehtävät tehtiin kotona, palautus opelle ja seuraava tehtävä mukaan. Oppilaista (18) aloitti diplomin teon aika moni, mutta kokonaan kaikki sai tehtyä noin 6-8 oppilasta. Poikia enemmän. Mielestäni he tekivät innoissaan ja vanhemmatkin. Mukavaa puuhaa kai se oli kaikille, en saanut ainakaan kielteistä palautetta.
- Diplomin ulkonäkö oli mieluinen ja tärkeä oppilaille. Yksi oppilas sairastui joulun jälkeen ja lähetin hänelle diplomitehtävät sairaalakouluun. Kyseessä oli lahjakas oppilas, hänelle se oli hyvää tekemistä.
- Olen mainostanut diplomeja koulussani ja monet opet ovat ottaneet/ovat ottamassa tehtävät käyttöön. Itse sain tiedon Luokanopettaja-lehdestä. Tiedotusta diplomista voisi lisätä. En tiedä löytyykö siitä linkkiä ophallituksen sivuilta.
- Nyt 3. luokan kanssa otan keväällä diplomien suo-

rittamisen esille. Vapaaehtoinenhan se on; pikkuisen porkkanaa ja kehumista, niin oppilaat innostuu. Toivon, että diplomitehtäviä löytyy jatkoonkin ja, että niissä olisi myös helpohkoja tehtäviä, ehkä joku tasoryhmitys olisi hyvä open kannalta.
- Oppilaani ovat tehneet näitä hieman oman tasonsa mukaan.
- Koulussa suunnitellaan matikkakerhoa, hyvää aineistoa siihen!
- Löysin Facebookin kautta linkin tänne Matikkadiplomiin ja innostuin heti. Aion ottaa oman luokkani kanssa "ohjelmistoon" ja suosittelen kollegoillekin, joten voisitko lähettää samalla vastaukset kaikkiin diplomeihin eli I - VI (mahtaako viimeinen olla liian haastava kuudes luokkalaisillekin, mutta jospa joku osaisi)?
- Meillä innostuttiin tänä syksynä suorittamaan diplomeja (IV, V ja VI). Suorittajina tällä hetkellä kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisia oppilaita. Ahkerimmilla alkaa jo olla ensimmäiset diplomit laskettuna, joten olisinkin oikeita vastauksia vailla.
- Olen luokanopettajana Helsingissä, ja olen nykyisten 3. luokkalaisteni kanssa aloittanut Solmun matikkadiplomit tänä syksynä – oppilaat ovat olleet innostuneita.
- Kerroin diplomista opettajakokouksessa ja useampi opettaja kiinnostui diplomista.
- Käytämme kehittämiänne Matematiikkadiplomeita eriyttämiseen koulussamme. Haluaisimme saada tehtävien (kaikki diplomit) vastaukset koulumme käyttöön.
- Olen ensimmäisen luokan opettaja. Luokassani on innokkaita oppilaita, jotka ovat erityisen motivoituneita matematiikan tehtäviin. Olenkin tarjonnut heille paljon lisämateriaalia ja matikkadiplomi, josta kollegani vinkkasi, oli myös oiva lisä! Oppilaat ovat tehneet tehtäviä innoissaan kotona vanhempiensa kanssa.
- Meillä on kovasti innostuttu matikkadiplomien tekemisestä. Sain teiltä vastaukset ykköseen ja kakkoseen. Nyt nopeimmat ovat jo nelosessa. Laittaisitko minulle vastaukset kolmosesta eteenpäin.
- Luokassani on matemaattisesti erittäin lahjakas oppilas ja haluaisin tarjota hänelle lisää haastetta, kun oppikirjan tehtävistä ei niihin ole.
- Huomasin sivuillanne matematiikkadiplomit ja toivoisin saavani tästä lisää potkua lahjakkaan oppilaan matematiikkaharrastukselle. Voisinkohan saada vastaukset näihin I–VI tehtäviin? Samalla tulevaa ajatellen olisi käytössä pankki myös muille luokka-asteille.
- Kiitokset loistavista diplomeista. Niistä on saanut mm. oppilaille motivoivaa eriyttämismateriaalia.
- Matematiikkadiplomi on kiva juttu ja iloinen ulkonäöltään – kiitos!
- Alakoulun toisluokkalainen oppilaani ratkaisi diplomi I:n viikonlopun aikana. Nyt hän odottaa jatkoa.
- Luin tässä taannoin Opettaja lehdestä mukavasta matematiikkadiplomi toiminnasta. Hienoa, että innokkaita kehittäjiä riittää! Onko toimintaa tarkoitus vielä lisätä muillekin luokille?
- Käynnistelimme tänä vuonna ensimmäistä kertaa Matematiikkadiplomin suorittamista. Neljäsluokkalaiset innostuivat asiasta kovasti. Tarvitsemme nyt diplomitehtävien ratkaisuja helpottamaan korjaamista. Oppilaat suorittavat tehtäviä IV ja V. Kiitos tästä innostavasta tavasta tukea oppilaiden matematiikan harrastamista!

Käsin vai koneella?

Moderni aivotutkimus vahvistaa vanhat uskomukset, etteivät lapsen aivot kehity kunnolla ilman sormilla harjoitettavaa hienomotoriikkaa. Käsillä ja erityisesti joka sormella on aivoissa oma alueensa. Tarttumaote mahdollisti aikanaan työkalujen käytön, jolle ihmisen ylivalta lajina suureksi osaksi perustuu. Yleisesti pätee, että aivot muokkautuvat koko elämän ajan. Käyttämättä jäävät aivojen alueet pienenevät ja harjoitetut kehittyvät. Esimerkiksi sokeilla kuuloaisti ottaa käyttöön toimettomaksi jääneitä näköalueita. Muusikoilla kehittyvät erityisesti oman soittimen käyttöön tarvittavat hienomotoriikan aivoalueet ja tuotetun musiikin prosessointiin tarvittavat kuuloalueet. Mahdollisimman monipuolinen toiminta ylläpitää aivoja, tämä koskee sekä fyysistä että henkistä puolta. Esimerkiksi vanhenemisen mukana supistuneita aivoalueita on saatu korjaantumaan liikuntaa lisäämällä. Sanonta "use it or lose it" pitäisi ottaa käyttöön Suomessakin.

Aivojen tarvitsemaa harjoitusta ei saada, jos lapset siirtyvät suoraan tietokoneen ääreen käymättä ensin läpi perinteistä hienomotoriikkavaihetta. Jo nykynuorten käsialoja katsomalla näkee, että on vähennetty liikaa luontaista hienomotoriikan käyttöä ja harjoitusta siirtymällä liian varhain koneen käyttöön. On vältetty kädenhallinnan opettelun vaivaa, mutta samalla menetetty aivojen tarvitsemaa harjoittelua. Lapsuudessa aivot muokkautuvat huomattavan nopeasti, joten on erityisen tärkeää harjoittaa lapsuusaikana mahdollisimman monipuolista toimintaa. Pohja koko elämää varten luodaan silloin. Niinpä diplomitehtävissä internetiä käytetään vain jakeluun, tehtäväpaperit tulostetaan ja alkuvaiheen tehtävät ratkotaan käsin. Perusteluna käsillä eikä koneella työskentelyyn on siis aivotutkimuksen vahvistama ja jo vuosituhansia eri puolilla maailmaa käytetty tieto aivojen kehittymisen ja hienomotoriikan yhteydestä. Myöhemmin käytetään myös koneita apuna.

Monipuolista toimintaa

Lukudiplomin tavoin myös matematiikkadiplomi antaa mahdollisuuden hauskalle ja hyödylliselle harrastukselle, tarjoaa haasteita ja hauskaa ja monipuolista toimintaa lapsille; niissä pääsee vaikka säveltämään ja leipomaan. Arviointia ja tulosten tarkistamista harjoitetaan, jotta suuruusluokat tulevat tutuiksi – viime aikoina on ylioppilaskirjoituksissakin annettu mielettömiä vastauksia suuruusluokkatehtäviin. Oppilaille painotetaan keskittynyttä itsenäistä työskentelyä ja joustavaa mutta perusteltua loogista ajattelua. Matematiikan talon rakentamisessa on alkuperustus erittäin tärkeää. Silloin syntyvät perustiedot ja asenteet. Diplomitoiminta ei ole oppilaiden välistä kilpailua, vaan niillä oppilas voi ottaa mittaa itsestään. Tehtäviä ratkaistaessa on toivottavaa keskustella toisten kanssa, jotta myös matematiikan kielen käyttö kehittyy ja itse kukin joutuu pukemaan sanoiksi ajattelunsa. Oppilas voi kysyä neuvoa ja tehdä yhteistyötä. Tärkeintä on, että innostus herää ja oppilaat huomaavat oppivansa matematiikkaa. Diplomi palkitsee harrastuksen ja antaa ponnistelun jälkeisen tuloksen ilon. Tehtävillä tarjotaan lapsille kokemuksia matematiikan käsitteistä, jotka tarkentuvat myöhemmin noustaessa portaita konkreettisesta abstraktiin. Matematiikan oman rakenteen käyttö pohjana on tärkeää.

Diplomien käyttö koulussa ja kotona

Diplomitehtäviä voi tehdä yksin, kaverien kanssa, perheen yhteisenä harrastuksena, oppitunnilla. Diplomitehtävät sopivat myös kerhotoimintaan, matematiikkakummitoimintaan, eriyttämiseen ja kertaukseen. Joka tapauksessa on toivottavaa, että vanhemmat osallistuvat lastensa harrastukseen ainakin tukemalla sitä. Suomalaisille oudoimpien tehtävätyyppien johdattelua on yleisissä ohjeissa Solmun Diplomisivuilla, sieltä löytyy myös oheislukemistoa.

Opettajien palautteen mukaan intoa tehtävien tekoon on ollut. Niitä on tehty kotona yksin, perheen tai ystävien kanssa. Matematiikan oppitunneilla on annettu lisäohjeita ja aina on voinut tulla kysymään apua, jos on ollut tarvis. Diplomin ulkonäkö oli mieluinen ja tärkeä oppilaille. Myös sivujen kaunista ja ilmavaa ulkonäköä on kiitelty. Kiitosta on tullut tehtävien monipuolisuudesta ja siitä, että ovat haastavia ja erilaisia kuin oppikirjoissa. Ajanpuute on ongelma, ellei ole mahdollista järjestää kerhoa tai muuta ylimääräistä tukea koulussa. Usein oppilaat saivat tehtävät kotitehtävien tapaan osissa aina sitä mukaa, kun oli käsitelty vastaavia tehtäviä tunneilla. Tunnilla käytiin lyhyesti läpi, mitä pitäisi tehdä ja seuraavalla tunnilla tehtävät palautettiin. Yhteiseen palautekeskusteluun ei useinkaan ollut riittävästi aikaa.

Matematiikkakummitoimintaa

Kummi, joka on ohjannut lasta matematiikan kauniiseen maailmaan Solmu-lehden tehtävien avulla, kertoi kokemuksiaan: Jo ensimmäisen diplomin tehtävät olivat erilaisia kuin oppikirjan tehtävät ja lapsen innostus ja mielenkiinto tehtävien suorittamiseen ylitti kaikki odotukset. Tehtävät vaikeutuivat sopivasti ja aihepiirejä oli monta, joten mielenkiinto säilyi. Erityisen kiinnostavilta ja hauskoilta tuntuivat tehtävät, joihin liittyi mittaamista tai tilastollisia koesarjoja. Noppaa innostuttiin heittämään 600 kertaa ja lanttia noin 100 kertaa. Oli suuri ilo saada seurata lasta, joka kokee oivaltavansa uusia asioita ja saa tyydytystä osaamisestaan ja onnistumisestaan ja täten oppii tärkeitä asioita koulua ja elämää varten. Kummi tulosti diplomin värillisenä oikein valokuvapaperille ja kehysti sen kivaa juhlaa varten. Yhteinen hauska harrastus jatkuu.

Taloudellisen tuen Solmun toiminnalle on antanut Jenny ja Antti Wihurin säätiö.

Verkko-Solmusta `http://solmu.math.helsinki.fi` löytyviä oppimateriaaleja

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Algebra (K. Väisälä)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Matematiikka kiehtoo taas

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Alex Bellos: Kiehtova matematiikka. Seikkailu numeroiden ihmemaassa. Suomentanut Eero Sarkkinen. Docendo 2011. 448 s. Pehmeäkantinen, 37,90 euroa.

Matematiikka kiehtoo. Ellen tietäisi sitä, voisin katsoa kirjahyllyäni, josta löytyvät sekä *Carol Vordermanin* **Kiehtova matematiikka** (WSOY 1997) että *Lea ja Tiit Lepmanin* **Kiehtovaa matematiikkaa** (MFKA 1997). WSOY-yhtymään kuluva Docendo on nyt julkaissut lähes samannimisen teoksen. (Alkuteoksen nimi on Isossa-Britanniassa Lewis Carroll -vaikutteiset *Alex's Adventures in Numberland* ja Yhdysvalloissa *Here's Looking at Euclid*; klassikon Liisan seikkailuista Ihmemaassa kirjoittaja Carroll oli matemaatikko ja oikealta nimeltään *Charles Dodgson*).

Kirjailija Alex Bellosin parinkymmenen vuoden takaisen yliopistotutkinnon pääaineet ovat olleet matematiikka ja filosofia. Hän on kuitenkin toiminut pitkään lehtimiehenä, englantilaisten lehtien Brasilian-kirjeenvaihtajana. Matematiikan parissakin hän sanoo olevansa tavallaan ulkomaankirjeenvaihtaja. Itse asiassa kirjan taustalla onkin ollut matkoja, ainakin Japaniin, Intiaan, Yhdysvaltoihin ja Saksaan. Mutta mistä Bellos raportoi matematiikan maailmassa matkailtuaan?

Bellosin kirjassa on 12 lukua, numeroituna nollasta yhteentoista, kukin noin 30 sivun mittainen. Kunkin luvun teemana on jokin laskentoa tai matematiikkaa sivuava kuriositeetti. Kirja ei ole matematiikan yleisesitys suurelle yleisölle.

Nollannen luvun teemana on primitiivinen lukukäsitteen muodostuminen. Viitteitä siitä, miten lukukäsite on voinut muodostua, Bellos saa Amazonin alueen alkukantaisten heimojen parissa tehdyistä havainnoista ja pienillä vauvoilla sekä simpansseilla tehdyistä kokeista. Toisessa luvussa ollaan sitten 10-järjestelmän parissa ja esitellään eksoottinen liike, joka tähtää luvun 12 ottamiseksi lukujärjestelmän kantaluvuksi. Lukuun on sisällytetty myös japanilaiset pikkulasten helmitaulukilpailut. Seuraava luku lähtee liikkeelle numerologiasta, josta siirrytään Pythagoraan lauseeseen ja sitten origami-taitteluihin. Ylen suuresti Bellos ihastelee japanilaisen origamitaiteilija *Kazuo Hagan* havaintoja neliönmuotoisen paperin taitteiden ominaisuuksista, jotka kyllä ovat aika triviaaleja euklidisen geometrian kannalta tarkasteltuina. Alussa mainittu Lepmanin pariskunnan kirja, jota kustantajankaan varastosta ei enää yhtään kappaletta löydy, sisältää muuten kattavan selvityksen geometrian rakentamisesta paperintaittelun avulla.

Seuraavaksi Bellos käy esittelemään intialaista "vedaaritmetiikkaa". Saamme hämmästellä mm. kertolaskua 8×9, jonka voikin tehdä niin, että tulon viimeiseksi numeroksi kertoo luvut $10 - 8$ eli 2 ja $10 - 9$ eli 1 ja ensimmäiseksi numeroksi ottaa jälkimmäisen numeron summasta $8+9$ eli numeron 7. Bellos ei selitä tätä mystistä "temppua" ja muita vastaavia esittämiään, vaikka ne ovat yksinkertaisesti ymmärrettävissä vähällä algebralla. Seuraava luku vie tarkastelemaan päässälaskutaiturien ja numeronmuistajien hämmästyttäviä kykyjä sekä π:n desimaalien laskemista. Seuraavassa luvussa teemana on sitten algebra. Logaritmin määritelmästä edetään laskuviivaimeen ja muihin laskulaitteisiin.

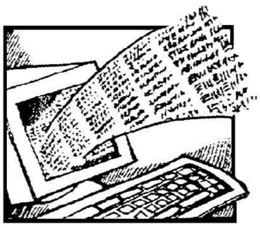
Kirjan luku 6 on omistettu ajanvietematematiikalle. Sudokut esitellään, samoin tangramit. Seuraavan luvun inspiraationa on toiminut kokonaislukujonojen verkkotietosanakirja, mainio *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Luvussa esitellään myös suurten alkulukujen etsimistä ja joitakin sarjojen suppenemiseen liittyviä hauskoja totuuksia kuten se, että jos harmonisesta sarjasta poistetaan ne termit, joiden nimittäjässä esiintyy yhdeksäinen, jäljelle jää suppeneva sarja. Oman lukunsa on saanut kultaisen leikkauksen suhde eli luku φ (jota kutsutaan kaiken aikaa *fiiksi*) ja siihen liittyen *Fibonaccin jono*. Kirjan pisin luku on numero 9. Siinä käsitellään todennäköisyyttä, uhkapelejä ja peliautomaatteja. Tilastotiedettä käsittelevän luvun jälkeen siirrytään päätökseen, jossa lukijalle tarjoillaan epäeuklidista geometriaa latvialais-amerikkalaisen *Daina Taiminan* virkkausmallien kautta. Viimein päädytään *Georg Cantorin* joukko-oppiin ja äärettömyyksien luokitteluun.

Bellos esittelee aiheitaan todella lehtimiehen tapaan. Melkein aina teksti rakentuu henkilökuvan ja haastattelun pohjalle. Kirjoittajan kiinnostuksen kohteet ovat usein alueilta, joiden kytkös matematiikkaan on löyhähkö. π:n desimaalien ulkoa opettelu, kilpailevien japanilaislasten näppäryys helmitaulun käytössä, oppivaiset simpanssit tai hedelmäpeliautomaattien ohjelmointi eivät ehkä ole sitä, mitä itse haluaisin matematiikan populaariesityksestä ensimmäiseksi lukea. Esimerkiksi maailmanlaajuinen matematiikkakilpailuliike olympialaisineen on jäänyt Bellosilta huomaamatta, vaikka helmitaulu- ja päässälaskukilpailuista saammekin tietoja. Mutta paljon relevanttiakin Bellos on katsaukseensa koonnut, eikä näytä siltä, että kirjan lukija juuri esitietoja kaipaisi.

Siellä täällä pistää esiin kirjoittajan lievä ulkopuolisuus ja asiantuntemattomuuskin. *Keskihajonta* ei ole *jakauman leveys*, *Diofantos* ei elänyt "joskus 00−200-lukujen välillä eaa." (vaan "jaa."), *David Hilbert* ei todistanut, että "oli mahdotonta esittää hyperbolinen pinta kaavana", vaan suunnilleen sen, että hyperbolista pintaa ei voi upottaa isometrisesti, pituuden säilyttäen, kolmiulotteiseen avaruuteen. Ja kaikki historian lähteet kertovat antiikin kuution kahdentamisongelman, *Deloksen ongelman*, tarinan ihan toisin kuin Bellos. Mutta sehän on joka tapauksessa tarina.

Kirjansa kiitossivulla Bellos ilmaisee kiitollisuudenvelkansa peräti 89:lle nimetylle henkilölle. *Kiehtova matematiikka* on pääosin suomennettu sujuvasti ja termitkin ovat melkein poikkeuksetta kohdallaan (vaikka kuvion *verteksi* on kyllä *kärki*, *suora*, *jana* ja *viiva* väliin sekoittuvat ja alaotsikossa muutamassa muussakin paikassa saattaisi sana *luku* paremmin vastata kirjailijan tarkoitusta kuin *numero*). Hyvä oivallus suomentajalta on kirjassa usein esiintyvän "epäintuitiivisen" suomentaminen sanalla *vaistonvastainen*. Kirjan painotekniikka ei tee oikeutta valokuville. Tätä korvaa 16-sivuinen värivalokuvaliite, josta saamme nähdä monet Bellosin haastattelemista henkilöistä ja mm. jäljennöksen 1847 Englannissa julkaistusta *Eukleideen Alkeiden* värikuvaversiosta. Kiitosta annan myös kattavalle hakemistolle. Sen sijaan kirjan lopun sanaston selityksistä ei kaikin osin oikein saa selvää. Esimerkiksi: "**Monikulmio:** kaksiulotteinen suljettu muoto, joka koostuu äärellisestä määrästä suoria viivoja". "**Luonnollinen luku:** kokonaisluku, joka voidaan saavuttaa laskemalla ykkösestä ylöspäin 1". "**Kokonaisluku:** luku joka on joko luonnollinen luku, negatiivinen luonnollinen luku tai nolla".

Miksi en kaikkiaan oikein osaa innostua Bellosin kirjasta? Mielestäni matematiikka on perusolemukseltaan aika lailla muuta kuin kokoelma pelejä ja vaistonvastaisia temppuja. Matematiikan erityisominaisuuteen, sen totuudellisuuteen ja tietynlaiseen absoluuttisuuteen Bellos ei kajoa. Mutta kyllä kirja on kaikkiaan hyvä lisä jo nyt sentään aika laajaan suomenkieliseen matemaattiseen populaarikirjallisuuteen.



Wolfram|Alphasta, parametriesityksistä ja hiukan muustakin

Ari Koistinen
Lehtori, Metropolia ammattikorkeakoulu

Alkanut vuosi on tietokoneen isänä pidetyn 23.6.1912 syntyneen matemaatikko Alan Turingin juhlavuosi. Matematiikka on nykyisen informaatioteknologian perusta. Tietojenkäsittelytiede kehittyi alunperin matematiikan eräänä osa-alueena, ja toisaalta tietokoneiden rakentaminen edellytti matemaattisiin lainalaisuuksiin nojaavaa pitkälle kehitettyä teknologiaa. Voidaan siis sanoa, että matematiikka on sekä "softan" että "raudan" takana.

Nyt informaatioteknologia maksaa velkaansa matematiikalle kahdellakin eri tavalla. Ensimmäinen näistä on se, että nopeasti kehittyvän IT:n tarpeet, kuten vaikkapa valtavien tietomassojen käsittely ja hallinta sekä ns. tiedon louhinta, edellyttävät aivan uudenlaista matematiikkaa ja saavat aikaan uusia matematiikan osa-alueita, vieden näin matematiikan kehitystä eteenpäin. Samalla löytyy uusia sovellusmahdollisuuksia jo kauan sitten luodulle matematiikalle.

Toinen IT:n velanmaksumuoto ovat sen tarjoamat mahdollisuudet suorittaa rutiininomaisia matemaattisia operaatioita nopeasti ja vaivattomasti. Numeeriseen ja symboliseen laskentaan kehitettyjä tietokoneohjelmia on ollut jo kymmeniä vuosia, ja niiden ansiosta matemaattisten menetelmien sovellusmahdollisuuksien määrä on kasvanut räjähdysmäisesti. Esimerkiksi suurten matriisien käsittely ilman tietokoneiden apua olisi toivottoman työläs tehtävä.

Ennen tehokkaiden PC-koneiden aikakautta oli tyypillistä, että vähänkään vaativampi laskenta tehtiin keskustietokoneella, johon otettiin yhteys päätteeltä, ja supertietokoneita käytetään tähän tapaan edelleenkin. Paljon uudempi asia on, että matemaattisten ohjelmistojen mahdollisuudet ovat kenen tahansa käytettävissä internetissä. Tunnetuimpia esimerkkejä tästä on Wolfram|Alpha, `www.wolframalpha.com`.

Wolfram|Alpha on eräänlainen internet-hakukoneen ja matematiikkaohjelman yhdistelmä. Jälkimmäisestä osasta vastaa Wolfram|Alphan taustalla toimiva saman yhtiön, Wolfram Researchin, jo 1980-luvulla kehittämä ohjelma Mathematica. Suuri osa Mathematican käskyistä toimii Wolfram|Alphassa sellaisenaan, mutta erityistä Wolfram|Alphassa on se, että käskyillä ei ole tiukkaa syntaksia, vaan ohjelma pyrkii heuristisesti tulkitsemaan käyttäjän syötettä, ja tulkitsemisen onnistuessa se varsinaisten internet-hakukoneiden tapaan tulostaa ruudulle paljon aiheeseen liittyvää informaatiota. Syntaksin vapaus merkitsee esimerkiksi Mathematica-ohjelmaan verrattuna sitä, että käyttäjän ei tarvitse tietää, milloin käytetään aaltosulkuja, milloin hakasulkuja ja milloin tavallisia sulkumerkkejä, joilla kaikilla on Mathematicassa oma tarkoituksensa. Tällaisen vapauden ja heuristisen tulkinnan kääntöpuolena on kuitenkin riski vääriin tulkintoihin.

Yksinkertaisia esimerkkejä

Wolfram|Alphaan voi antaa syötteitä käyttämällä englannin kieltä, matemaattisia lausekkeita tai näiden yhdistelmiä. Jokainen voi itse kokeilla yksinkertaisia matemaattisia operaatioita, ja esimerkkejä löytyy verkosta paljon, esimerkiksi suoraan Wolfram|Alphan pääsivulta kohdasta "examples". Käydään tässä läpi muutama esimerkki. Kannattaa syöttää nämä käskyt itse Wolfram|Alphaan ja tarkkailla tuloksia.

Yhtälöiden ratkaisemiseksi riittää yksinkertaisimmillaan kirjoittaa pelkkä yhtälö, tai jopa ainoastaan yhtälön toinen puoli, jos toinen puoli on nolla. Esimerkiksi:

```
x^3-2x^2+x
```

Nollakohtien lisäksi saat paljon muutakin tietoa, mm. funktion kuvaajan, derivaattafunktion, integraalifunktion sekä paikalliset ääriarvot.

Kirjoittamalla

```
solve x^3-2x^2+x = 0
```

tulee vain kuvaaja ja yhtälön ratkaisut.

Jos muuttujia on useita, voit valita, minkä muuttujan suhteen yhtälö ratkaistaan:

```
solve x*y-x^2+y = 0 for y
```

Määrätyn integraalin voi laskea esimerkiksi seuraavasti:

```
integrate sin(x) from 0 to Pi
```

Ne, jotka tuntevat LaTeXin syntaksin, voivat käyttää sitäkin:

```
int_0^\pi \sin{x} dx
```

Mainittakoon, että Wolfram|Alpha osaa tulkita oikein myös tästä hiukan vapaamman muodon

```
int_0^pi sin(x)
```

mutta sen sijaan

```
int 0 pi sin(x)
```

on jo hiukan liian vapaamuotoinen esitys: sen ohjelma tulkitsee – kuten hyvin luonnollista onkin – tulon $0 \cdot \pi \cdot \sin(x) = 0$ integraalifunktioksi, ja sellaisiahan ovat kaikki vakiofunktiot.

Wolfram|Alpha selviytyy myös matriisioperaatioista. Se edellyttää jo hiukan tiukempaa syntaksia, sillä epämääräisen numerojonon tulkitseminen matriisiksi juuri silloin, kun käyttäjä tarkoittaa matriisia, vaatisi tietokoneohjelmalta jo lähes telepaattisia kykyjä. Matriisin alkiot syötetään aaltosulkujen sisällä (kuten Mathematicassa) ja myös matriisin rivit erotetaan toisistaan sisemmillä aaltosuluilla, esimerkiksi eräs matriisitulo:

```
{{3, 4} , {2 ,3}} * {{-1 ,0} , {4 ,9}}
```

Jos haluttaisiin tehdä hieman laajempia laskelmia esimerkiksi matriiseilla, niin viimeistään tässä vaiheessa tulisi vastaan eräs Wolfram|Alphan merkittävä puute verrattuna varsinaisiin matematiikkaohjelmiin: matriisien, lukujen tai funktioiden tallentaminen muuttujiin ei ole mahdollista, eikä työskentelyä näin ollen voi jatkaa käyttämällä suoraan muuttujaan tallennettua edellisen käskyn tulosta. Tästä syystä Wolfram|Alpha soveltuu hyvin lähinnä pienimuotoisiin, nopeisiin laskutehtäviin.

Myös yksinkertaiset fysiikan laskut sujuvat. Kokeile esimerkiksi syötettä

```
m=1000 kg v=10 m/s  kinetic energy
```

Parametriesitykset

Mathematica tarjoaa erittäin hyvät mahdollisuudet visualisoida parametriesityksiä tasossa tai avaruudessa. Nämä mahdollisuudet ovat useimmissa muissa matematiikkaohjelmissa melko heikot ainakin kolmiulotteisten parametriesitysten osalta. Wolfram|Alphan toiminnallisuus kuitenkin vastaa tältä osin Mathematicaa, ainakin melko yksinkertaisten tapausten osalta.

Luodaan aluksi lyhyt katsaus siihen, mikä on parametriesityksen idea. Esimerkiksi suora, joka kulkee pisteen $(2, -1)$ kautta ja joka on vektorin $\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$ suuntainen, voidaan esittää parametriesityksenä

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= -1 + 4t, \end{aligned}$$

missä parametri t saa kaikki reaaliarvot. Kaikki pisteet, joiden koordinaatit saadaan tästä jollakin parametrin t arvolla, ovat suoralla. Esimerkiksi pistettä (4,7) vastaa parametrin arvo 2. Wolfram|Alphalla tämä suora voidaan piirtää käskyllä

```
parametricplot 2+t , -1+4t
```

Ympyrän parametriesityksessä parametrilla t on hyvin havainnollinen geometrinen tulkinta: kulma. Tunnetustihan kulman kosini on ympyrän kehäpisteen x-koordinaatti ja sini on y-koordinaatti, joten yksikköympyrän kehä koostuu pisteistä $(\cos t, \sin t)$. Jos ympyrän keskipiste on esimerkiksi $(-1{,}3)$ ja säde 4, voidaan ympyrä piirtää käskyllä

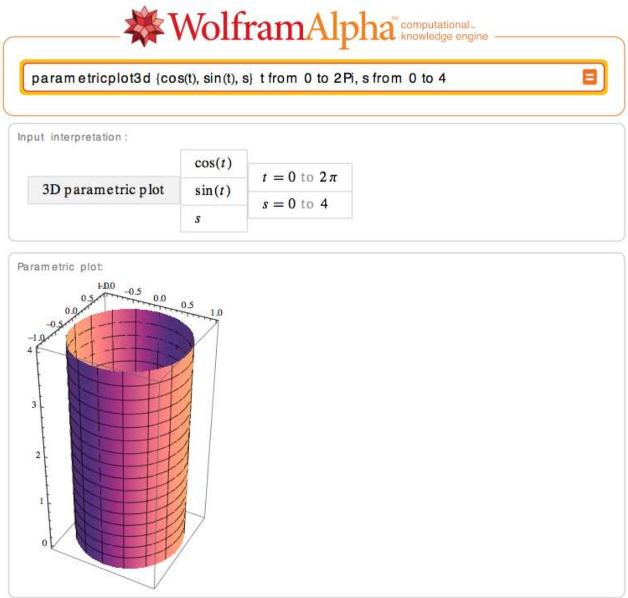
```
parametricplot -1+4cos(t), 3+4sin(t)
```

Wolfram|Alpha osaa itse määrittää sopivan vaihteluvälin parametrille, kaikki kulman arvot välillä $[0, 2\pi]$. Sen voi myös määrittää itse: kokeile lisätä edellisen käskyn perään "`t from 0 to 2Pi/3`". Kuinka kuva muuttuu?

Kolmiulotteisia parametriesityksiä voi visualisoida käskyllä parametricplot3d. Edellisten kaksiulotteisten esitysten pohjalta saadaan mielenkiintoisia kolmiulotteisia esimerkkejä, kun lisätään kolmas koordinaatti z. Esimerkiksi korkkiruuvi:

```
parametricplot3d {cos(t), sin(t), 0.1t}
t from 0 to 30
```

Aaltosulut eivät ole välttämättömät, mutta ne helpottavat käskyn lukemista. Kokeile muuttaa lukuja 0,1 ja 30 ja mieti, mikä niiden merkitys on.



Käyttämällä yhtä parametria saadaan käyriä. Sen sijaan pinnat avaruudessa vaativat kaksi parametria. Esimerkiksi lieriön vaipan voi ajatella muodostuvan päällekkäin pinotuista ympyröistä, ja kulman lisäksi tarvitaan z-koordinaattia vastaava parametri, joka on tässä esimerkissä s:

```
parametricplot3d {cos(t), sin(t), s}
t from 0 to 2Pi, s from 0 to 4
```

Mieti, kuinka saat piirrettyä kartion. Se onnistuu muokkaamalla hiukan lieriön parametriesitystä.

Loppukevennys ja vertailua Googleen

Jo todettujen Wolfram|Alphan puutteiden vuoksi – mm. se, että tuloksia ei voi tallentaa muuttujiin jatkotyöskentelyä varten – ei Wolfram|Alphaa ja varsinaisia matematiikkaohjelmia voine pitää toistensa kilpailijoina. Niiden pääasialliset käyttötarkoitukset ovat erilaisia.

Kuvaajien piirron osalta Wolfram|Alphan kenties merkittävin kilpailija on – ehkä hiukan yllättäen, tai sitten ei – Google. Parin kuukauden ajan Google-hakujen yhteydessä on toiminut uusi ominaisuus, joka piirtää kuvaajia matemaattisista lausekkeista. Parametriesityksiin se ei ilmeisesti vielä pysty, mutta lukija voi syöttää seuraavan sekä Googleen että Wolfram|Alphaan ja arvioida, kumpi tuottaa kauniimman lopputuloksen (ja mistä ero tuloksissa johtuu):

```
(sqrt(cos(x))*cos(200*x)+sqrt(abs(x))-0.7)
*(4-x*x)^0.01, sqrt(9-x^2), -sqrt(9-x^2)
from -4.5 to 4.5
```

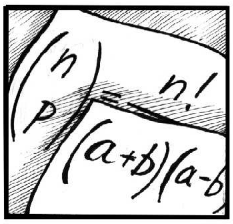
Lähteitä ja muita linkkejä

http://www.wolframalpha.com

http://matta.hut.fi/matta3/WA/ (Simo K. Kivelän Wolfram|Alpha –opas)

http://education.wolfram.com/index.html.en (Wolfram Education Portal – mm. tietoa siitä, kuinka Wolfram|Alphalla voi tehdä widgettejä)

http://insidesearch.blogspot.com/2011/12/showing-some-love-to-math-lovers.html



Pelitehtäviä

Tuomas Korppi

Tämänkertaisissa tehtävissä analysoimme yksinkertaisia pelejä. Tehtävät 1–6 ovat helppoja, ja soveltuvat arvioni mukaan yläasteelle[1]. Tehtävät 7–11 ovat vaikeampia, ja niissä vaaditaan matematiikan harrastuneisuutta.

Voittostrategia tarkoittaa menetelmää, jota käyttämällä pelin voittaa varmasti. Optimistrategia tarkoittaa strategiaa, jolla voittaa mahdollisimman paljon, tai häviää mahdollisimman vähän, jos voittaminen on mahdotonta.

Helpot tehtävät

Tehtävä 1. *Kivikasassa on n kiveä. 2 pelaajaa pelaa seuraavasti: Kumpikin ottaa kasasta vuorollaan 1 tai 2 kiveä. Näin jatketaan, kunnes kaikki kivet on otettu. Se pelaaja voittaa, joka ottaa kasan viimeisen kiven. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?*

Tehtävä 2. *Pöydällä on $2n$ tikkua, joiden pituudet ovat $1, 2, \ldots, 2n$. Kaksi pelaajaa pelaa peliä, jossa kumpikin ottaa vuorollaan pöydältä tikun. Kun kaikki tikut on otettu, se pelaaja voittaa, jonka ottamien tikkujen yhteispituus on suurempi. Optimistrategia on selvä, mutta kuinka monta yksikköä pelin voittaja jää voitolle, kun kumpikin pelaaja pelaa optimistrategialla? (Tehtävään on olemassa helppo ratkaisu, jossa ei tarvitse tuntea mitään summakaavoja.)*

Tehtävä 3. *Sama kuin edellä, mutta aloittaja ottaa ensimmäisellä vuorollaan yhden tikun, ja tämän jälkeen kumpikin ottaa aina vuorollaan kaksi tikkua (kunnes pelin viimeisellä vuorolla otetaan taas yksi jäljelläoleva tikku). (Tehtävään on olemassa helppo ratkaisu, jossa ei tarvitse tuntea mitään summakaavoja.)*

Tehtävä 4. *Eräässä raha-automaattipokeripelissä pelaaja voi yrittää tietyissä tilanteissa tuplata. Tuplauksessa pelaaja asettaa panokseksi summan s, ja automaatti arpoo kortin tavallisesta 52 kortin pakasta. Pelaajan tulee arvata, onko kortti pieni (kuutonen tai alle) vai iso (kasi tai yli). Ässä lasketaan vain pieneksi kortiksi.*

Jos pelaaja arvasi oikein, hän saa takaisin alkuperäisen panoksensa s sekä voittoa s:n verran, ja jos pelaaja arvasi väärin, hän menettää panoksensa. Jos automaatin arpoma kortti on seiska, pelaaja menettää panoksensa.

Laske pelaajan voiton odotusarvo tuplauksessa, kun tappio lasketaan negatiiviseksi voitoksi. (Jos et tiedä, mitä odotusarvo tarkoittaa, katso Liite 1.) Jääkö pelaaja pitkällä aikavälillä voitolle vai tappiolle tuplauksessa?

Tehtävä 5. *Musta Maija -korttipelin säännöt löytyvät Liitteestä 2. Osoita, että kahden pelaajan Musta Maija -peli päättyy väistämättä lopulta, pelasivatpa pelaajat kuinka fiksusti tai typerästi tahansa.*

[1] Joukossa on pari rahapelitehtävää, mutta opettajille huomauttaisin, että uskon rahapelien matematiikan ymmärtämisen olevan paras suoja rahapelien haittoja vastaan. Henkilö, joka ymmärtää, miksi tietyissä peleissä ei voi jäädä voitolle, ei myöskään syydä niihin rahojaan.

Mitä voit sanoa kolmen pelaajan Mustasta Maijasta?

Tehtävä 6. *A ja B pelaavat seuraavaa peliä, johon kumpikin on asettanut samansuuruisen panoksen. Ensin A heittää noppaa. Sen jälkeen A saa halutessaan ehdottaa panosten tuplausta. Jos A ehdottaa tuplausta, B voi joko hyväksyä tuplauksen, jolloin A ja B asettavat kumpikin alkuperäisten panostensa verran lisää panosta peliin, tai luovuttaa, jolloin B häviää alkuperäisen panoksen ja peli päättyy. Peli jatkuu B:n nopanheitolla. Suurempi tulos voittaa, paitsi että B voittaa tasatilanteessa.*

Millä ensimmäisen nopan silmäluvuilla A:n kannattaa ehdottaa tuplausta? Millä ensimmäisen nopan silmäluvuilla B:n kannattaa hyväksyä tuplaus? (Pelaajan kannattaa pelata niin, että hän maksimoi voittosumman odotusarvoa, kun tappio mielletään negatiiviseksi voitoksi. Jos et tiedä, mitä odotusarvo tarkoittaa, katso Liite 1.)

Kumpi pelaaja jää pitkällä aikavälillä voitolle, kun peliä toistetaan useita kertoja ja pelaajat pelaavat niin kuin heidän kannattaa pelata?

Haastavammat tehtävät

Tehtävä 7. *Musta Maija -korttipelin säännöt löytyvät Liitteestä 2. Oletetaan, että Musta Maija -pelissä on n pelaajaa, $2 \leq n \leq 10$. Millä n:n arvoilla joku pelaajista pääsee väistämättä lopulta eroon korteistaan, pelasivatpa pelaajat kuinka fiksusti tai typerästi tahansa?*

Tehtävä 8. *Kaksi pelaajaa pelaa hutunkeittoa seuraavasti: Ensimmäisenä pelaava heittää pesäpallomailan ilmaan, ja toisena pelaava nappaa siitä kiinni satunnaisesta kohdasta. Tämän jälkeen ensimmäisenä pelaava ottaa mailasta kiinni niin, että hänen kätensä koskettaa toisena pelaavan kättä ja on kahvan puolella mailaa verrattuna toisena pelaavan käteen. Tämän jälkeen toisena pelaava irroittaa otteensa mailasta ja ottaa mailasta kiinni niin, että hänen kätensä koskettaa ensimmäisenä pelaavan kättä ja on kahvan puolella mailaa verrattuna ensimmäisenä pelaavan käteen. Näin jatketaan, kunnes jompi kumpi pitää kiinni mailan kahvanpuoleisesta päästä (osa kädestä saa jäädä tyhjän päälle. Oletetaan myös, että mikä tahansa nollasta eroava pituus mailaa mahdollistaa otteen saamisen.) Tämä pelaaja voittaa pelin.*

Oletetaan, että kun maila otetaan heitosta kiinni, käden ja mailan kahvanpuoleisen pään väliin jää k:n verran tilaa. Kun pelaajat tämän jälkeen ottavat mailasta kiinni, he voivat valita otteensa viemän tilan väliltä $[n,m]$. Kummalla pelaajalla on voittostrategia hutunkeitossa, kun k, n ja m ovat annettuja?

Tehtävä 9. *Osoita, että jätkänshakissa (siis siinä, jota pelataan rajoittamattomalla pelialueella, ja jossa pitää saada viisi riviin) toisena pelaavalla ei ole voittostrategiaa.*

Tehtävä 10. *Kaksi pelaajaa pelaa äärettömällä ruutupaperilla seuraavaa peliä: Toinen pelaa rasteilla, toinen nollilla. Kumpikin merkkaa vuorollaan oman merkkinsä johonkin vapaaseen ruutuun. Se pelaaja voittaa, joka saa merkittyä 2×2 -blokin itselleen. Tällöin peli myös päättyy. Osoita, että kummallakaan pelaajalla ei ole voittostrategiaa.*

Tehtävä 11. *Tätä peliä pelataan äärettömällä ruutupaperilla, ja kutsumme ruutujen reunaviivojen leikkauspisteitä paikoiksi.*

Yksi pelaaja pelaa seuraavasti: Alussa äärettömällä ruutupaperilla on merkitty äärellinen määrä paikkoja. Vuorollaan pelaaja aina merkitsee yhden merkitsemättömän paikan ja vetää viivan viiden peräkkäisen merkityn paikan kautta vaakasuoraan, pystysuoraan tai diagonaalisesti. (Kaksi merkittyä paikkaa ovat siis viivan alku- ja loppupiste, ja kolme viivan sisäpisteitä.) Kaksi vedettyä viivaa saa leikata korkeintaan yhdessä pisteessä, eli ne eivät saa "kulkea päällekkäin". Osoita, että peliä ei voi jatkaa äärettömiin.

Ratkaisut

(1) Oletetaan, että kasassa on kolmella jaollinen määrä kiviä. Tällöin toisena pelaava pystyy varmistamaan aina omalla siirrollaan, että kasaan jää hänen siirtonsa jälkeen kolmella jaollinen määrä kiviä. Lopulta kasassa on kolme kiveä, ja ensimmäisenä pelaava ottaa niistä 1 tai 2, ja toisena pelaava voi ottaa loput ja voittaa.

Jos kasan kivien määrä ei ole kolmella jaollinen, voi ensimmäisenä pelaava jättää kasaan ensimmäisen siirtonsa jälkeen kolmella jaollisen määrän kiviä ja voittaa pelaamalla samoin kuin toisena pelaava edellisessä kappaleessa.

(2) Optimistrategialla kumpikin ottaa vuorollaan kasassa jäljellä olevista pisimmän tikun. Ajatellaan tikut pareiksi niin, että $2n$ ja $2n-1$ mittaiset ovat pari, $2n-2$ ja $2n-3$ mittaiset ovat pari ja niin edelleen. Kustakin parista pelin aloittaja ottaa pidemmän ja toisena pelaava lyhyemmän. Jokaisessa parissa ensimmäisenä pelaava jää yhden yksikön voitolle, joten hän jää koko pelissä n yksikköä voitolle.

(3) Ajatellaan tikut pareiksi samoin kuin edellisessä tehtävässä. Nyt pelaajat jäävät pareissa vuorotellen yhden yksikön voitolle. Jos n on parillinen, pareja on parillinen määrä, ja kumpikin jää yhtä monta kertaa voitolle. Siis tasapeli. Jos n on pariton, jää pelin aloittaja yhden kerran enemmän voitolle, joten hän voittaa yhden yksikön.

(4) Käytetään samaa notaatiota kuin liitteessä.

Merkitään t_1 =”Pelaaja arvasi oikein”, t_2 =”Pelaaja arvasi väärin” ja t_3 =”Kortti on seiska”. Nyt $p_1 = 6/13$ (huomaa, että veikkasipa pelaaja pientä tai isoa, hänellä on kuusi mahdollisuutta kolmestatoista osua oikeaan), $p_2 = 6/13$ ja $p_3 = 1/13$. Nyt $t_1 = s$ (se, kuinka paljon pelaaja saa voittoa), $t_2 = -s$ ja $t_3 = -s$. Siis odotusarvo on $6/13 \times s + 6/13 \times (-s) + 1/13 \times (-s) = -s/13$. Siis odotusarvo on negatiivinen, ja pelaaja jää pitkällä aikavälillä tappiolle.

(5) Huom! Seuraavassa 52 (korttipakan korttien lukumäärä) on yläraja, eli se on luku, joka on varmasti riittävän suuri. On mahdollista, että se on liiankin suuri, mutta tämä ei vähennä ratkaisun oikeellisuutta.

Kahden hengen peli:

Aina kun pelissä lyöntivuoro vaihtuu pelaajalta toiselle, kortteja poistuu pelistä. Jos siis lyöntivuoro vaihtuu vähintään 52 kertaa, on jompi kumpi pelaajista päässyt kaikista korteistaan eroon ja voittanut pelin.

Aina kun saman pelaajan lyöntivuoro säilyy, hän menettää käsikorttejaan ja nostaa uusia kortteja pakasta tai pääsee eroon käsikorteistaan. Näin pelaaja pääsee eroon korteistaan, jos hän pääsee lyömään vähintään 52 kertaa peräkkäin.

Siis kahden hengen pelissä lyöntivuoro voi vaihtua pelaajalta toiselle korkeintaan 52 kertaa, ja kahden peräkkäisen vaihtumisen välissä voi olla korkeintaan 52 lyöntivuoroa. Niinpä kahden hengen peli kestää korkeintaan 52×52 lyöntivuoroa.

Kolmen hengen Musta Maija puolestaan jää jumiin mm. silloin, jos pelaajat aina lyövät yhden kortin ja aina nostavat käteen heille lyödyn kortin.

Jos pelaajia on enemmän kuin kolme, peli muuttuu kolmen hengen peliksi siinä vaiheessa kun sopiva määrä pelaajia on päässyt eroon korteistaan (ellei peli ole jäänyt jumiin sitä ennen). Tällöin saatetaan kohdata sama ongelma kuin kolmen hengen Mustassa Maijassa.

(6) Oletetaan, että A:n voittotodennäköisyys ensimmäisen nopanheiton jälkeen on p, kun B:n mahdollinen luovutus jätetään huomiotta. A:n voittosumman odotusarvo tuplaamattomassa pelissä on $p - (1-p) = 2p - 1$, tuplatussa pelissä $2(2p-1) = 4p - 2$ ja 1, jos B luovuttaa. $1 \geq 2p - 1$ aina, ja $4p - 2 \geq 2p - 1$ jos ja vain jos $p \geq 1/2$ (yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $p = 1/2$.) A:n kannattaa siis ehdottaa tuplausta, jos $p > 1/2$, olla ehdottamatta, jos $p < 1/2$ ja päätös on yhdentekevä, jos $p = 1/2$.

Oletetaan, että B:n voittotodennäköisyys ensimmäisen nopanheiton jälkeen on q, kun B:n mahdollinen luovutus jätetään huomiotta. B:n kannattaa hyväksyä tuplaus, jos ja vain jos $2(q - (1-q)) \geq -1$, eli jos $q \geq 1/4$ (yhtäsuuruuden vallitessa päätös on yhdentekevä).

1. nopan tulos	$p = 1 - q$	kannattaa ehdottaa	kannattaa hyväksyä
1	0	ei	kyllä
2	1/6	ei	kyllä
3	1/3	ei	kyllä
4	1/2	yhdentekevä	kyllä
5	2/3	kyllä	kyllä
6	5/6	kyllä	ei

Alla käytän samaa notaatiota kuin liitteessä. Viimeiseen kysymykseen vastaamiseksi muodostetaan tapaukset t_1=”Ensimmäisen nopan tulos on yksi ja A voittaa”, t_2=”Ensimmäisen nopan tulos on yksi ja B voittaa”, t_3=”Ensimmäisen nopan tulos on kaksi ja A voittaa”, t_4=”Ensimmäisen nopan tulos on kaksi ja B voittaa” jne. Määritetään tapahtumien todennäköisyydet ja tapahtumien rahalliset arvot (pelaajan A kannalta) ja asetetaan ne pelaajan A voittosumman odotusarvon (kun tappio mielletään negatiivisena voittona) kaavaan. Havaitaan, että termit $p_1v_1 + p_2v_2$ ja $p_{11}v_{11} + p_{12}v_{12}$ kumoavat toisensa, samoin kuin termit $p_3v_3 + p_4v_4$ ja $p_9v_9 + p_{10}v_{10}$. Koska $p_7v_7 + p_8v_8 = 0$, odotusarvo on $p_5v_5 + p_6v_6 = (2-4)/36 = -1/18$. Siis B jää pitkällä aikavälillä voitolle.

(7) Ratkaisu: Joku pelaajista pääsee väistämättä lopulta eroon korteistaan jos ja vain jos n on parillinen.

n parillinen: Jaetaan pelaajat porukoihin A ja B niin, että jokainen istuu kahden vierasta porukkaa edustavan välissä.

Aina kun pelissä lyöntivuoro vaihtuu porukalta toiselle, kortteja poistuu pelistä. Jos siis lyöntivuoro vaihtuu porukalta toiselle vähintään 52 kertaa, on joku pelaajista päässyt kaikista korteistaan eroon.

Aina kun lyöntivuoro säilyy samalla porukalla, joku porukan pelaajista menettää käsikorttejaan ja nostaa uusia kortteja pakasta tai pääsee eroon käsikorteistaan. Näin joku porukan pelaajista pääsee eroon korteistaan, jos sama porukka pääsee lyömään vähintään 52 kertaa peräkkäin.

Siis lyöntivuoro voi vaihtua porukalta toiselle korkeintaan 52 kertaa, ja kahden peräkkäisen vaihtumisen välissä voi olla korkeintaan 52 lyöntivuoroa, ennenkuin joku on päässyt eroon korteistaan. Niinpä kestää korkeintaan 52×52 lyöntivuoroa, ennenkuin joku on päässyt eroon korteistaan.

n pariton: Oletetaan, että jokainen lyö aina yhden kortin ja nostaa hänelle lyödyn kortin käteen. Jokainen pelaaja on joka toisella kierroksella lyöjän roolissa ja joka toisella kierroksella nostajan roolissa. Niinpä pelaaja ei pääse korteistaan eroon, vaan hänen käsikorttiensa määrä alkaa vaihdella kuuden ja viiden välillä.

(8) Kutsutaan perusstrategiaksi strategiaa, jossa otteen koko on vähintään mailan loppuosa, jos mailaa on jäljellä korkeintaan m:n verran, ja muutoin otteen koko

on $n+m-x$, missä x on vastustajan edellisen otteen koko.

Olkoon y reaaliluku. Merkitään $f(y)$:llä pienintä positiivista reaalilukua, jolle on olemassa kokonaisluku ℓ siten, että $f(y) = y + \ell(n+m)$.

Jos $f(k) > m$, toisena pelaava pystyy voittamaan perusstrategialla.

Jos $n \leq f(k) \leq m$, ensimmäisenä pelaava voi jättää ensimmäisellä otteellaan mailaan pituuden k', jolle $f(k') = n+m$ ja tämän jälkeen voittaa perusstrategialla.

Jos $f(k) < n$, ensimmäisenä pelaava ottaa ensimmäisen otteensa n:n kokoisena. Tämän jälkeen pituutta jää mailaan k' yksikköä, jolle $f(k') > m$. Nyt ensimmäisenä pelaava voittaa perusstrategialla.

Tehtävässä teimme idealisoivan oletuksen, että mikä tahansa pituus mailaa viimeisessä otteessa riittää voittoon. Käytännön pelitilanteet ovat sellaisia, että tuon pituuden on oltava vähintään pieni vakio a. Kiinnostunut lukija voi miettiä, kuinka tehtävän ratkaisu muuttuu tällä vaatimuksella.

(9) Lyhyt todistus: Aloitussiirrosta ei missään tilanteessa ole haittaa ensimmäisenä pelaavalle.

Pitkä todistus: Oletetaan, että toisena pelaavalla on voittostrategia S. Nyt ensimmäinen pelaaja voi pelata ensimmäisen siirtonsa mielivaltaisesti, ja sen jälkeen S:n mukaan kuvitellen, että ensimmäistä siirtoa ei ole tehty. Jos jossain vaiheessa S:n mukaan ensimmäisen pelaajan pitää tehdä se siirto, jota hän ei kuvittele tehneensä, hän lakkaa kuvittelemasta, että kyseistä siirtoa ei ole tehty, tekee mielivaltaisen siirron ja alkaa jatkossa kuvitella, että hän ei ole tehnyt tuota mielivaltaista siirtoa. Koska S on voittostrategia ja siitä siirrosta, jota ensimmäinen pelaaja ei kuvittele tehneensä, ei ole ensimmäiselle pelaajalle haittaa, ensimmäinen pelaaja voittaa välttämättä. Ristiriita.

(10) Ajatellaan ruutupaperi ”tiiliseinäkuvioksi”, joka koostuu 2×1 -”tiilistä”. Huomataan, että jokaisen 2×2 -blokin pitää sisältää yksi edellisessä virkkeessä kuvitelluista ”tiilistä”. Nyt kumpikin pelaaja pystyy estämään toista pelaajaa voittamasta pelaamalla aina samaan ”tiileen” kuin vastustajan edellinen siirto (tai pelaamalla mielivaltaisesti, jos samassa ”tiilessä” on jo oma merkki.)

(11) Ajatellaan, että jokaisella merkityllä paikalla on kahdeksan ilmansuuntaa. Jokainen vedetty viiva kulkee kahdeksan merkitty paikka–ilmansuunta -parin kautta (yksi viivan kussakin päätepisteessä ja kaksi kussakin sisäpisteessä.) Kaksi viivaa ei voi käyttää saman paikan samaa ilmansuuntaa, koska tällöin ne leikkaisivat useammassa kuin yhdessä pisteessä. Koska vuorolla merkitään yksi paikka (kahdeksan ilmansuuntaa) ja vedetään viiva kahdeksan merkitty paikka–ilmansuunta -parin kautta, vapaiden merkitty paikka–ilmansuunta -parien määrä säilyy koko ajan vakiona. Koska pelitilanteen ylä-, ala-, oikeassa ja vasemmassa reunassa on väistämättä vapaita merkitty paikka–ilmansuunta -pareja (esim. jokaisen rivin, jolla on merkittyjä paikkoja, idänpuolimmaisessa merkityssä paikassa on vapaa ilmansuunta itään päin), vieläpä sitä enemmän mitä enemmän paikkoja on merkitty, pelitilanne ei voi kasvaa mielivaltaisen suureksi.

Liite 1: Odotusarvo

Tutkitaan aluksi peliä, jossa A vetää yhden kortin tavallisesta 52 kortin pakasta. Jos kortti on punainen, A voittaa 3 euroa, ja jos kortti on musta, A häviää 3 euroa.

Merkitään t_1:llä tapahtumaa ”vedetty kortti on punainen” ja t_2:lla tapahtumaa ”vedetty kortti on musta”. Kun pelataan yksi peli, seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

1. Ei ole mahdollista, että kumpikin tapahtumista t_1 ja t_2 tapahtuu.
2. Jompi kumpi tapahtumista t_1 ja t_2 tapahtuu.

Ensimmäinen ehto pätee siksi, että kortti ei voi olla yhtaikaa punainen ja musta, ja jälkimmäinen ehto siksi, että jokainen kortti on joko punainen tai musta.

Tapahtumilla t_1 ja t_2 on todennäköisyydet p_1 ja p_2. Koska puolet pakan korteista on punaisia ja puolet mustia, $p_1 = 1/2$ ja $p_2 = 1/2$.

Lisäksi tapahtumiin t_1 ja t_2 liittyy luvut v_1 ja v_2. Koska A voittaa kolme euroa punaisella kortilla, voidaan määrittää $v_1 = 3$, ja koska A häviää kolme euroa mustalla kortilla, voidaan määrittää $v_2 = -3$.

Nyt A:n voittosumman odotusarvo (kun tappio lasketaan negatiiviseksi voitoksi) lasketaan kaavalla

$$p_1 v_1 + p_2 v_2.$$

Tässä tapauksessa siis odotusarvo on $(1/2) \times 3 + (1/2) \times (-3) = 0$. Samalla kaavalla odotusarvo voidaan laskea kaikissa tilanteissa, joissa numeroidut ehdot (1) ja (2) pätevät.

Tutkitaan seuraavaksi peliä, jossa pakkaan on lisätty kaksi jokeria (joita ei lasketa mustiksi eikä punaisiksi korteiksi). Tavallisten korttien osalta peli etenee kuten edellisessä kohdassa, mutta jokerin vetäessään A häviää yhden euron.

Nyt t_1 ja t_2 ovat kuten edellä, ja mukaan tulee uusi tapahtuma t_3, joka on ”vedetty kortti on jokeri”. Kun pelataan yksi peli, seuraavat ehdot pätevät:

1. Ei ole mahdollista, että kaksi tai useampia tapahtumista t_1, t_2, t_3 tapahtuu.

2. Välttämättä joku tapahtumista t_1, t_2, t_3 tapahtuu.

Nyt $p_1 = 26/54 = 13/27$, $p_2 = 26/54 = 13/27$ ja $p_3 = 2/54 = 1/27$. Vastaavasti $v_1 = 3$, $v_2 = -3$ ja $v_3 = -1$. A:n voittosumman odotusarvo (kun tappio lasketaan negatiiviseksi voitoksi) saadaan kaavalla

$$p_1v_1 + p_2v_2 + p_3v_3.$$

Meidän tapauksessamme odotusarvo on siis $13/27 \times 3 + 13/27 \times (-3) + 1/27 \times (-1) = -1/27$. Samalla kaavalla odotusarvo voidaan laskea myös muissa sellaisissa tapauksissa, joissa ehdot (1) ja (2) toteutuvat.

Jos tapahtumia on enemmän kuin kolme, odotusarvon kaava muodostetaan aivan samalla periaatteella, summattavia on vain enemmän. Kuitenkin ehtojen (1) ja (2) vastineiden tulee päteä. (Jos taas tapahtumia on vain yksi, t_1, tällöin t_1 tapahtuu välttämättä, eli $p_1 = 1$, ja odotusarvo on yhtä kuin v_1.)

Voittosumman odotusarvo (kun tappio mielletään negatiivisena voittona) on hyvä mittari sille, mitä tapahtuu pitkissä sarjoissa, joissa samaa peliä toistetaan monia kertoja. Tällöin pelaaja voittaa keskimäärin yhdessä pelissä odotusarvon verran (jos odotusarvo on positiivinen) tai häviää keskimäärin yhdessä pelissä odotusarvon verran (jos odotusarvo on negatiivinen). Jos odotusarvo on nolla, pelaaja jää keskimäärin omilleen.

Lopuksi vielä kiinnostuneita lukijoita varten muodollisesti pätevä odotusarvon määritelmä.

Olkoot $t_1, \ldots, t_n$ mahdollisia tapahtumia, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- On mahdotonta, että kaksi tai useampia tapahtumia jonosta $t_1, \ldots, t_n$ tapahtuu.
- Väistämättä joku tapahtumista $t_1, \ldots, t_n$ tapahtuu.

Olkoon kaikilla $i, 1 \leq i \leq n$, luku p_i todennäköisyys, että t_i tapahtuu. Tällöin välttämättä $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Oletetaan, että jokaiseen tapahtumaan t_i, $1 \leq i \leq n$, on liitetty lukuarvo v_i. Nyt muuttujan v odotusarvo määritetään kaavalla

$$p_1v_1 + \cdots + p_nv_n.$$

Se on siis lukujen $v_1, \ldots, v_n$ todennäköisyyksillä painotettu keskiarvo.

Liite 2: Mustan Maijan säännöt

Peliin osallistuu 2-10 pelaajaa, ja pelissä käytetään tavallista 52 kortin korttipakkaa. Kortit sekoitetaan ja jokaiselle pelaajalle jaetaan viisi korttia, ja loput korteista asetetaan kuvapuoli alaspäin nostopakaksi. Nostopakan päällimmäinen kortti asetetaan kuvapuoli ylöspäin poikittain nostopakan alle, ja sen maa määrää valttimaan. Poikittain asetettu kortti on nostopakan alin kortti. Valttimaan kortteja kutsutaan valteiksi. Pata ei voi olla valttia, joten jos valtiksi kääntyi pata, nostettu kortti palautetaan pakan keskelle, ja uusi kortti käännetään määräämään valttimaa. Toistetaan kunnes saadaan valtiksi joku muu maa kuin pata. (Jos suurilla pelaajamäärillä näyttää siltä, että nostopakassa on pelkkiä patoja, suoritetaan uusi jako.)

Patakuningatar on erikoiskortti, ja sitä kutsutaan Mustaksi Maijaksi.

Vuorolla vuorossa oleva pelaaja lyö kortteja kädestään pöytään seuraavin rajoituksin:

1. Korttien tulee olla samaa maata (tässä suhteessa Musta Maija lasketaan padaksi.)

2. Korttien määrä ei saa ylittää seuraavan pelaajan käsikorttien määrää.

Tämän jälkeen, jos nostopakassa on jäljellä kortteja ja vuorossa olevalla pelaajalla on vähemmän kuin viisi korttia kädessään, vuorossa oleva pelaaja nostaa nostopakasta kortteja, kunnes hänellä on viisi korttia kädessään.

Tämän jälkeen seuraavana vuorossa oleva pelaaja (jota kutsumme uhriksi) voi yrittää kaataa lyödyt kortit käsikorteillaan. Mikä tahansa kortti kaatuu korkeammalla kortilla samaa maata (ässä on korkein). Mikä tahansa ei-valttikortti kaatuu millä tahansa valtilla. Yhdellä kortilla voi kaataa vain yhden kortin. Mustaa Maijaa ei voi kaataa millään kortilla, eikä Mustalla Maijalla voi kaataa mitään korttia. Kaataminen on vapaaehtoista. Kaadetut kortit ja ne kortit, joita käytettiin kaatamiseen, poistetaan pelistä.

Jos uhri ei kaatanut kaikkia lyötyjä kortteja, hän ottaa kaatamatta jääneet kortit käteensä.

Jos uhrilla on tässä vaiheessa vähemmän kuin viisi korttia kädessään ja nostopakassa on jäljellä kortteja, uhri ottaa nostopakasta kortteja, kunnes hänellä on viisi korttia kädessään.

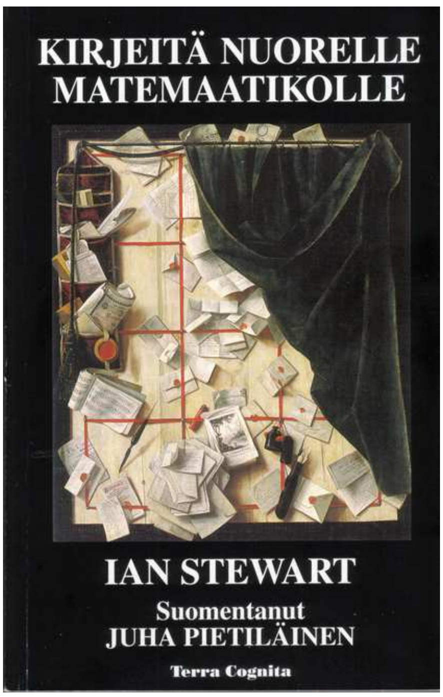
Jos uhri kaatoi kaikki lyödyt kortit, peli jatkuu uhrin lyöntivuorolla. Jos taas uhri nosti kaatamatta jääneitä kortteja käteensä, peli jatkuu uhrista seuraavan pelaajan lyöntivuorolla. Jos pelaajia on jäljellä vain kaksi, uhrista seuraava pelaaja on sama pelaaja, joka löi kortteja uhrille.

Kun nostopakan loputtua pelaaja pääsee eroon käsikorteistaan, hän on ulkona pelistä eikä enää osallistu siihen. Viimeinen pelaaja, jolla on kortteja kädessään, niiden joukossa Musta Maija, on hävinnyt pelin.

Olisiko ammattini matemaatikko?

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Ian Stewart: Kirjeitä nuorelle matemaatikolle. Suom. Juha Pietiläinen. Terra Cognita 2007, 215 s. Ovh. 25 e.



Aina silloin tällöin kohtaan nuoren henkilön, joka kysyy minulta, mitä matemaatikko oikeastaan tekee. Elämänurana matemaatikko näyttää varmaan abstraktimmalta kuin esimerkiksi opettaja (joita kaikki näkevät), arkkitehti, insinööri tai juontaja (joka nykyään usein näyttäytyy nuoren toiveammattina). Kysyjälle voin toki jotain vastata, itse koetun tai muilta kuullun perusteella. Mielelläni kuitenkin suosittelen ammatinvalintasuunnitelmissaan matemaatikkoa yhtenä vaihtoehtona pitäville nyt esillä olevaan kirjaan tutustumista.

Englantilainen Ian Stewart (s. 1945) on matemaatikko, jonka tieteellinen julkaisutoiminta käsittelee mm. Lien algebroja ja katastrofiteoriaa. Hän on kuitenkin tunnetumpi monista matematiikkaa ja luonnontieteitä käsittelevistä yleistajuisista kirjoistaan. Professorin virkatyökin liittyy, harvinaista kyllä, tällaiseen kirjoittamiseen. Hän on Warwickin yliopiston matematiikan kansantajuistamislaitoksen (sellainen tosiaan on olemassa!), Mathematics Awareness Centren johtaja.

Stewart on ottanut tehtäväkseen päivittää maanmiehensä G.H. Hardyn kuuluisan, vuonna 1940 ilmestyneen Matemaatikon apologian, jonka suomennos oli vuonna 1997 toimintansa alkaneen Kimmo Pietiläisen Terra Cognita -kustantamon ensimmäinen julkaisu. Hardyn kirja on pitkään ollut selkeimmin matematiikan olemusta yleistajuisesti, tyylikkäästi ja esteettisesti korkeatasoisesti esittelevä pikku teos. Stewartin suomentaja Juha Pietiläinen kirjoittaa sujuvasti ja korrektisti – vävyn ja langon sekoittuminen on luettava ajan ilmiöksi, sukulaisuussuhteiden merkityshän taitaa ylimalkaan olla vähenemässä.

Ian Stewart rakentaa kirjansa 21:stä kuvitteellisesta kirjeestä nuorelle ystävälleen Megille, joka kirjan aikana etenee matematiikasta kiinnostuneesta lukiolaisesta matematiikan opiskelijaksi, jatko-opiskelijaksi, postdociksi ja viimein oikeaksi matemaatikoksi, yliopistovirkaan. Meg, arvattavasti Margaret, on sinänsä päivitys: yksi Hardyn lainatuimpia virkkeitä koskee matematiikkaa nuoren miehen alana. Stewart esittelee matematiikkaa itseään siten kuin siitä voisi ajatella olevan tarpeen kertoa vasta koulumatematiikkaan tutustuneelle ja kertoo siitä, miten hän itse tuli lähteneeksi alalle. Yliopisto-opiskelija Meg saa neuvoja matematiikan lukemisesta ja oppimisesta, todistuksen olemuksesta, soveltavan ja puhtaan matematiikan eroista sekä ajatuksia matematiikan filosofisesta rakenteesta. Jo tieteen portteja kolkuttelevalle neuvotaan tutkijoiden hierarkiaa ja yhteistyötä. Kerrotaanpa ammatin mukanaan tuomista pikku ongelmista kuten konferenssimatkoista eksoottisiin maailmankolkkiin omituisten lentoyhtiöiden kyydissä. Vaikka Stewartin tausta on anglosaksinen, suurin osa hänen tekstistään on pätevää muissakin kulttuureissa, Suomessakin. Matematiikka on kovin kansainvälinen tiede.

Keneltäpä nuori, jonka mieleen välähtäisi elämä matemaatikkona, menisi tietoja kyselemään? Kun matemaatikkoja kuitenkaan ei ole kovin tiheässä, ainakaan yliopistopaikkakuntien ulkopuolella, ei monenkaan lähipiiriin voi oikeaa matemaatikkoa kuulua. Paras tiedonantaja voisi olla opettaja. Harva matematiikanopettaja tietää omakohtaisesti kovinkaan paljon oikeasta matematiikasta, matematiikasta sellaisena kuin matemaatikko sen kohtaa. Näin ollen hän ei, vaikka parastaan yrittäisikin, osaa antaa kovin realistista kuvaa matemaatikon elämästä ainakaan ohi opintojen perusvaiheiden. Stewartin kirja olisi mainiota luettavaa niin matematiikan opettajille kuin opinto-ohjaajillekin. Eniten sitä suosittelen kuitenkin jokaiselle matematiikasta vähän keskimääräistä enemmän kiinnostuneelle nuorelle. Kirjan luettuaan voi olla hiukan varmempi siitä, saattaisiko tulevaisuus matemaatikkona olla omien toiveiden täyttymystä vai ei. Varmoja vastauksiahan näihin elämän tärkeisiin kysymyksiin ei kukaan pysty antamaan.

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

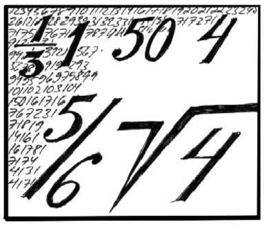
K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät



Tuomaksen tehtäviä

Tuomas Korppi

Reaalilukujen järjestelmä tavanomaisine laskutoimituksineen on kaikille tuttu, mutta voidaanko reaaliluvuille määritellä muita laskutoimituksia niin, että tutut laskulait säilyvät, eli hienommin sanottuna saadaan kunta? Tämänkertaisissa tehtävissä pohdimmekin, voidaanko kunnan yhteenlaskuksi valita reaalilukujen kertolasku.

Hiukan teoriaa

Jos K on joukko, periaatteessa mitä tahansa funktiota $K \times K \to K$ voidaan pitää laskutoimituksena joukossa K. Meille tutut laskutoimitukset kuitenkin tottelevat erilaisia laskulakeja, esimerkkinä vaikkapa se, että reaaliluvuille pätee

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Abstraktissa algebrassa tutkitaankin yleensä sellaisia rakenteita, joiden laskutoimitukset toteuttavat erilaisia laskulakeja. Eräs tällainen rakenne on kunta, jonka määrittelemme seuraavaksi.

Viisikko $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ on kunta, jos K on joukko, $\oplus\colon K \times K \to K$, $\otimes\colon K \times K \to K$, ja $\mathbb{O}, \mathbb{I} \in K$, sekä seuraavat aksioomat pätevät.

1. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ kaikilla $a, b, c \in K$.
2. $\mathbb{O} \oplus a = a$ kaikilla $a \in K$.
3. Kaikilla $a \in K$ on olemassa $b \in K$, jolle $a \oplus b = \mathbb{O}$.
4. $a \oplus b = b \oplus a$ kaikilla $a, b \in K$.
5. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ kaikilla $a, b, c \in K$.
6. $\mathbb{I} \otimes a = a$ kaikilla $a \in K$.
7. Kaikilla $a \in K$, $a \neq \mathbb{O}$, on olemassa $b \in K$, jolle $a \otimes b = \mathbb{I}$.
8. $a \otimes b = b \otimes a$ kaikilla $a, b \in K$.
9. $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ kaikilla $a, b, c \in K$.
10. $\mathbb{O} \neq \mathbb{I}$.

Kunnassa on siis määritelty yhteen- ja kertolaskut sekä ykkös- ja nolla-alkiot, jotka tottelevat tavanomaisia laskulakeja. Aksiooman 3 nojalla kaikilla alkioilla on myös vasta-alkio sekä aksiooman 7 nojalla kaikilla nollasta eroavilla alkioilla on käänteisalkio.

Tuttuja kuntia ovat rationaalilukujen kunta, reaalilukujen kunta ja kompleksilukujen kunta, tavallisilla laskutoimituksillaan ja nolla- ja ykkösalkioilla varustettuna. Kunta on kuitenkin määritelty abstraktisti niin, että mikä tahansa joukko, joka on varustettu aksioomat toteuttavilla laskutoimituksilla ja nolla- ja ykkösalkioilla on kunta. On esimerkiksi olemassa kahden alkion kunta, jonka ainoat alkiot ovat $\mathbb{O}$ ja $\mathbb{I}$ ja jossa $\mathbb{O} \oplus \mathbb{I} = \mathbb{I} \oplus \mathbb{O} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} = \mathbb{I}$ ja $\mathbb{O} \oplus \mathbb{O} = \mathbb{I} \oplus \mathbb{I} = \mathbb{O} \otimes \mathbb{O} = \mathbb{O} \otimes \mathbb{I} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{O} = \mathbb{O}$.

Liitteessä annetaan lisää esimerkkejä kunnista. Voit lukaista liitteen tässä välissä, tai siirtyä suoraan tehtäviin.

Tehtävät

Tehtäviin 2–5 vaaditaan paitsi vastaus, myös sen todistus. Tehtävät on pisteytetty, joten voit kokeilla, monenko pisteen edestä saat tehtäviä ratkaistua. Joihinkin tehtäviin on myös vihjeitä, jotka helpottavat tehtävää, mutta vähentävät pistesaalista. Jos luet viiden pisteen vihjeen, saat tehtävästä vain viisi pistettä. Jos luet kolmen pisteen vihjeen, saat tehtävästä vain kolme pistettä, ja jos luet yhden pisteen vihjeen, saat vain yhden pisteen.

Kunnassa voidaan laskea aika pitkälle samalla tavoin kuin reaaliluvuillakin. Seuraavassa tehtävässä johdamme hiukan lisää laskulakeja.

Tehtävä 1. *(1 piste)*

Olkoon $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *kunta. Todista seuraavat väitteet:*

1. *Jos* $a, b, c \in K$*, pätee* $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.
2. *Jos* $a, b \in K$*, ja* $a \oplus b = \mathbb{O}$*, niin myös* $b \oplus a = \mathbb{O}$.
3. *Jos* $a, b \in K$*, ja* $a \otimes b = \mathbb{I}$*, niin myös* $b \otimes a = \mathbb{I}$.
4. *Jos* $a \in K$*,* $a \oplus \mathbb{O} = a$.
5. *Jos* $a \in K$*,* $a \otimes \mathbb{I} = a$.

Lopuissa tehtävissä pohdimme, onko olemassa kuntarakenteita, joissa reaalilukujen kertolasku on kunnan yhteenlasku.

Jos et saa seuraavaa tehtävää tehtyä, on alla yhden pisteen vihje.

Tehtävä 2. *(3 pistettä)*

Olkoon $\oplus\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \oplus b = ab$ *ja* $\mathbb{O} = 1$*. Onko olemassa paria* $(\otimes, \mathbb{I})$ *siten, että* $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *on kunta?*

Jos et saa seuraavaa tehtävää tehtyä, on alla viiden pisteen vihje, kolmen pisteen vihje ja yhden pisteen vihje.

Tehtävä 3. *(7 pistettä)*

Olkoon $\oplus\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, a \oplus b = ab$ *ja* $\mathbb{O} = 1$*. Onko olemassa paria* $(\otimes, \mathbb{I})$ *siten, että* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *on kunta?*

Jos et saa seuraavaa tehtävää tehtyä, on alla yhden pisteen vihje.

Tehtävä 4. *(3 pistettä)*

Olkoon $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$*. Olkoon* $\oplus\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, a \oplus b = ab$ *ja* $\mathbb{O} = 1$*. Olkoon lisäksi* $\otimes\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, a \otimes b = a^b$*. Onko olemassa alkiota* $\mathbb{I}$ *siten, että* $(\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *on kunta?*

Jos et saa seuraavaa tehtävää ratkaistua, on alla viiden pisteen vihje, kolmen pisteen vihje ja yhden pisteen vihje.

Tehtävä 5. *(7 pistettä)*

Olkoon $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$*. Olkoon* $\oplus\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, a \oplus b = ab$ *ja* $\mathbb{O} = 1$*. Onko olemassa paria* $(\otimes, \mathbb{I})$ *siten, että* $(\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *on kunta?*

Viiden pisteen vihjeet

(3) Ei ole.

(5) Kyllä on.

Kolmen pisteen vihjeet

(3) Todista ensin seuraavat kaksi lemmaa.

Lemma 1. *Olkoon* $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *kunta. Tällöin* $\mathbb{O} \otimes x = \mathbb{O}$ *kaikilla kunnan alkioilla* $x \in K$.

Lemma 2. *Olkoon* $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *kunta, jossa* $\mathbb{I} \oplus \mathbb{I} \neq \mathbb{O}$*. Olkoon* $x \in K$*. Tällöin on olemassa* $y \in K$*, jolle* $y \oplus y = x$.

(5) Tutki funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = e^x$. Se on bijektio, ja pätee $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, sekä $f(0) = \mathbb{O}$.

Yhden pisteen vihjeet

(2) Ei ole.

(3) Kolmen pisteen vihjeen Lemman 1 todistuksessa on hyödyllistä pohtia alkiota $(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes x$.

Todista, että kolmen pisteen vihjeen Lemmassa 2 voidaan valita y seuraavasti: Olkoon b sellainen, että $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes b = \mathbb{I}$. Nyt $y = x \otimes b$.

Jotta pääset käyttämään Lemmaa 2 tehtävän ratkaisussa, tee vastaoletus ja tutki tuloa $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes a$, missä $a > 1$.

(4) Ei ole.

(5) Olkoon f kuten kolmen pisteen vihjeessä. Yritä määritellä $\otimes$ niin, että pätee $f(xy) = f(x) \otimes f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisut

(1) Näytämme kohdan 1. Muut ovat samankaltaisia, mutta helpompia. $(a \oplus b) \otimes c = c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.

(2) Ei ole. Tehdään vastaoletus: Pari $(\otimes, \mathbb{I})$ on olemassa. Aksiooman 3 nojalla on olemassa $b \in \mathbb{R}$, jolle $0 \oplus b = \mathbb{O}$. Mutta nyt $0b = 1$, mikä ei päde millään $b \in \mathbb{R}$. Ristiriita.

(3) Todistetaan ensin kolmen pisteen vihjeessä annetut lemmat:

Lemma 1: $\mathbb{O} \otimes x = (\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes x = (\mathbb{O} \otimes x) \oplus (\mathbb{O} \otimes x)$.

On olemassa b siten, että $(\mathbb{O} \otimes x) \oplus b = \mathbb{O}$. Siis $\mathbb{O} = (\mathbb{O} \otimes x) \oplus b = ((\mathbb{O} \otimes x) \oplus (\mathbb{O} \otimes x)) \oplus b = (\mathbb{O} \otimes x) \oplus ((\mathbb{O} \otimes x) \oplus b) = \mathbb{O} \otimes x$.

Lemma 2: Olkoon b sellainen, että $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes b = \mathbb{I}$. Nyt $(x \otimes b) \oplus (x \otimes b) = x \otimes (b \oplus b) = x \otimes ((\mathbb{I} \otimes b) \oplus (\mathbb{I} \otimes b)) = x \otimes ((\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes b) = x \otimes \mathbb{I} = x$.

Nyt ratkaistaan itse tehtävä, eli osoitetaan, että vaadittua paria ei ole olemassa.

Tehdään vastaoletus: Pari $(\otimes, \mathbb{I})$ on olemassa.

Olkoon $a > 1$. Nyt $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes a = (\mathbb{I} \otimes a) \oplus (\mathbb{I} \otimes a) = a \oplus a = a^2 \neq 1 = \mathbb{O}$. Siis Lemman 1 nojalla $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \neq \mathbb{O}$.

Olkoon $x < 0$. Lemman 2 nojalla on olemassa $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jolle $y \oplus y = x$, eli $yy = x$. Tämä on kuitenkin ristiriita sen kanssa, että negatiivisilla luvuilla ei ole neliöjuurta.

(4) $a \otimes b = b \otimes a$ ei päde. Esimerkiksi $2^3 \neq 3^2$. Myöskään $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ ei päde. Esimerkiksi $2^{2^3} = 256$, mutta $(2^2)^3 = 64$.

(5) Osoitetaan, että vaadittu pari on olemassa. Tutkitaan funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = e^x$. Se on bijektio, ja lisäksi pätee $f(x+y) = e^x e^y = f(x) \oplus f(y)$ sekä $f(0) = \mathbb{O}$.

Määritellään $x \otimes y = f(f^{-1}(x) f^{-1}(y)) = e^{(\ln x)(\ln y)}$, sekä $\mathbb{I} = e$.

Nyt pätee $f(1) = \mathbb{I}$. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ annettuja, ja merkitään $a = f(x), b = f(y)$. Nyt $a \otimes b = f(f^{-1}(a) f^{-1}(b))$, eli $f(x) \otimes f(y) = f(xy)$.

Nyt kaikki aksioomat voidaan todistaa helposti, kaikki samaa strategiaa käyttäen. Todistamme esimerkkinä aksioomat 9 ja 7.

Ensin 9:

Olkoon $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$ sellaiset, että $f(x) = a, f(y) = b$ ja $f(z) = c$

Nyt $a \otimes (b \oplus c) = f(x) \otimes (f(y) \oplus f(z)) = f(x) \otimes f(y+z) = f(x(y+z)) = f(xy+xz) = f(xy) \oplus f(xz) = (f(x) \otimes f(y)) \oplus (f(x) \otimes f(z)) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.

Sitten 7:

Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq \mathbb{O}$, annettu. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ sellainen, että $f(x) = a$. Koska $f(0) = \mathbb{O}$ ja f on bijektio, $x \neq 0$. Nyt on olemassa $y \in \mathbb{R}$, jolle $xy = 1$. Siis $\mathbb{I} = f(1) = f(xy) = f(x) \otimes f(y) = a \otimes f(y)$. Siis on olemassa $b = f(y)$, jolle $a \otimes b = \mathbb{I}$.

Liite

Esimerkki 1

Tämä esimerkki vaatii hiukan esitietoja lukuteoriasta.

Olkoon p alkuluku. Jos $a \in \mathbb{Z}$, määritetään a:n ekvivalenssiluokka $[a] = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \mod p\}$. Olkoon $a, b \in \mathbb{Z}$. Havaitaan, että $[a] = [b]$ jos ja vain jos $a \equiv b \mod p$.

Merkitään $\mathbb{Z}_p = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Havaitaan, että $\mathbb{Z}_p = \{[0], [1], \ldots, [p-1]\}$, eli $\mathbb{Z}_p$:ssä on p alkiota.

Jos $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \mod p$ ja $c \equiv d \mod p$, pätee myös $a + c \equiv b + d \mod p$ ja $ac \equiv bd \mod p$. Siis, jos $[a] = [b]$ ja $[c] = [d]$, pätee myös $[a+c] = [b+d]$ ja $[ac] = [bd]$. Näin ollen voidaan määritellä ekvivalenssiluokkien joukossa laskutoimitukset $\oplus\colon \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $[x] \oplus [y] = [x+y]$ ja $\otimes\colon \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $[x] \otimes [y] = [xy]$. Merkitään $\mathbb{O} = [0]$ ja $\mathbb{I} = [1]$.

Nähdään helposti, että $(\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1)$ toteuttaa kaikki muut kunta-aksioomat, paitsi aksiooma 7 ei toteudu.

Nyt voidaan todistaa helposti, että $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ toteuttaa kaikki kunta-aksioomat paitsi aksiooma 7, johon palaamme hetken päästä. Kaikki muut aksioomat todistetaan samalla strategialla. Näytämme esimerkkinä aksiooman 9. Olkoot $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_p$. Nyt $[a] \otimes ([b] \oplus [c]) = [a] \otimes ([b+c]) = [a(b+c)] = [ab+ac] = [ab] \oplus [ac] = ([a] \otimes [b]) \oplus ([a] \otimes [c])$. Toisena esimerkkinä näytämme aksiooman 3. Olkoon $[a] \in \mathbb{Z}_p$. Nyt $a + (-a) = 0$, joten $[a] \oplus [-a] = [a + (-a)] = [0] = \mathbb{O}$.

Olkoon $[a] \in \mathbb{Z}_p$, $[a] \neq \mathbb{O}$. Nyt a ei ole jaollinen p:llä, joten Fermat'n pienen lauseen nojalla $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Siis $[a] \otimes [a^{p-2}] = [a^{p-1}] = [1] = \mathbb{I}$. Siis $[a]$:lla on käänteisalkio $[a^{p-2}]$, ja aksiooma 7 toteutuu.

Siis $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ on kunta.

Esimerkki 2

Haluamme määritellä rationaalifunktioiden joukon. Nämä ovat funktioita, jotka saadaan kahden polynomin osamääränä. Koska nimittäjäpolynomilla voi olla nollakohtia, emme voi määritellä rationaalifunktioita koko $\mathbb{R}$:ssa. Näin ollen annamme seuraavan määritelmän.

Olkoon

$$K' = \{f : \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R} \mid A \subset \mathbb{R} \text{ on äärellinen ja on olemassa reaalikertoimiset polynomit } P, Q, \text{ joille } f(x) = P(x)/Q(x) \text{ aina, kun } f(x) \text{ on määritelty.}\}$$

Määritellään joukossa K' yhteen- ja kertolaskut $\oplus\colon K' \times K' \to K'$, $\otimes\colon K' \times K' \to K'$ seuraavasti: Olkoot $f, g \in K'$. Asetetaan $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ aina, kun sekä $f(x)$ että $g(x)$ ovat määriteltyjä, ja $(f \otimes g)(x) = f(x)g(x)$ aina, kun sekä $f(x)$ että $g(x)$ ovat määriteltyjä. Määritellään $\mathbb{O}'$ vakiofunktioksi $\mathbb{O}'(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $\mathbb{I}'$ vakiofunktioksi $\mathbb{I}'(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Havaitaan helposti, että $(K', \oplus, \otimes, \mathbb{O}', \mathbb{I}')$ toteuttaa kaikki muut kunta-aksioomat, paitsi ei aksioomia 3 ja 7. Kaikki muut aksioomat näytetään samalla tavalla. Näytämme esimerkkinä aksiooman 9.

Olkoot $f, g, h \in K'$. Aina, kun f, g, h ovat määriteltyjä pisteessä x, pätee $(f \otimes (g \oplus h))(x) = f(x)(g \oplus h)(x) = f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x) = (f \otimes g)(x) + (f \otimes h)(x) = ((f \otimes g) \oplus (f \otimes h))(x)$. Koska funktiot $f \otimes (g \oplus h)$ ja $(f \otimes g) \oplus (f \otimes h)$ on määritelty samoissa pisteissä (ts. aina kun kaikki funktioista f, g, h ovat määriteltyjä), ja ne ovat samoja kaikissa pisteissä, joissa ne on määritelty, $f \otimes (g \oplus h) = (f \otimes g) \oplus (f \otimes h)$.

Rationaalifunktioilla

$$\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

ja

$$\frac{1}{x-1}$$

on ainoastaan se ero, että ensimmäinen ei ole määritelty pisteessä -1. Haluamme kuitenkin ajatella, että nämä ovat sama funktio. Kun tällainen tilanne kohdataan matematiikassa, yleensä muodostetaan ekvivalenssiluokaksi kutsuttu joukko, johon laitetaan kaikki ne oliot, joita halutaan kohdella samoina. Tämän jälkeen jatkossa pelataan ekvivalenssiluokkien joukolla. Näin ollen annamme seuraavat määritelmät:

Olkoon $f \in K'$. Määritellään $[f] = \{g \in K' \mid g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus A, A \subset \mathbb{R}$ on äärellinen$\}$. Olkoon $K = \{[f] \mid f \in K'\}$.

Havaitaan, että jos $[f] = [f']$ ja $[g] = [g']$, niin myös $[f \oplus g] = [f' \oplus g']$ ja $[f \otimes g] = [f' \otimes g']$. Näin ollen voidaan K:ssa määritellä laskutoimitukset $\oplus\colon K \times K \to K$ ja $\otimes\colon K \times K \to K$, $[f] \oplus [g] = [f \oplus g]$ ja $[f] \otimes [g] = [f \otimes g]$. Määritellään $\mathbb{O} = [\mathbb{O}']$ ja $\mathbb{I} = [\mathbb{I}']$.

Siitä, että $(K', \oplus, \otimes, \mathbb{O}', \mathbb{I}')$ toteuttaa kaikki kunta-aksioomat paitsi 3 ja 7, seuraa helposti, että myös $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ toteuttaa nämä aksioomat. Näytämme esimerkkinä aksiooman 9. Olkoon $[f], [g], [h] \in K$. Nyt $[f] \otimes ([g] \oplus [h]) = [f] \otimes ([g \oplus h]) = [f \otimes (g \oplus h)] = [(f \otimes g) \oplus (f \otimes h)] = [f \otimes g] \oplus [f \otimes h] = ([f] \otimes [g]) \oplus ([f] \otimes [h])$.

$(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ toteuttaa myös aksioomat 3 ja 7. Näytämme aksiooman 7. Aksiooma 3 on samankaltainen mutta helpompi.

Olkoon $[f] \in K$, $[f] \neq \mathbb{O}$. Siis lukuunottamatta äärellistä pistejoukkoa $f(x) = P(x)/Q(x)$, missä P ja Q ovat polynomeja, ja P, Q eivät ole identtisesti nolla. Siis P:llä on vain äärellinen määrä nollakohtia. Nyt voidaan muodostaa g, $g(x) = Q(x)/P(x)$, joka on määritelty aina, kun $P(x)$ on erisuuri kuin nolla, eli kaikkialla äärellistä määrää pisteitä lukuunottamatta. Siis $g \in K'$ ja $[g] \in K$. Nyt $f(x)g(x) = 1$ aina, kun $f(x), g(x)$ ovat määriteltyjä. Siis $[f] \otimes [g] = [f \otimes g] = \mathbb{I}$. Siis aksiooma 7 toteutuu.

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I–VI tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Vastauksia voi pyytää koulun sähköpostiin.