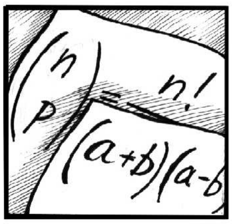

Pelitehtäviä

Tuomas Korppi

Tämänkertaisissa tehtävissä analysoimme yksinkertaisia pelejä. Tehtävät 1–6 ovat helppoja, ja soveltuvat arvioni mukaan yläasteelle[1]. Tehtävät 7–11 ovat vaikeampia, ja niissä vaaditaan matematiikan harrastuneisuutta.

Voittostrategia tarkoittaa menetelmää, jota käyttämällä pelin voittaa varmasti. Optimistrategia tarkoittaa strategiaa, jolla voittaa mahdollisimman paljon, tai häviää mahdollisimman vähän, jos voittaminen on mahdotonta.

Helpot tehtävät

Tehtävä 1 *Kivikasassa on n kiveä. 2 pelaajaa pelaa seuraavasti: Kumpikin ottaa kasasta vuorollaan 1 tai 2 kiveä. Näin jatketaan, kunnes kaikki kivet on otettu. Se pelaaja voittaa, joka ottaa kasan viimeisen kiven. Kummalla pelaajalla on voittostrategia?*

Tehtävä 2 *Pöydällä on $2n$ tikkua, joiden pituudet ovat $1, 2, \ldots, 2n$. Kaksi pelaajaa pelaa peliä, jossa kumpikin ottaa vuorollaan pöydältä tikun. Kun kaikki tikut on otettu, se pelaaja voittaa, jonka ottamien tikkujen yhteispituus on suurempi. Optimistrategia on selvä, mutta kuinka monta yksikköä pelin voittaja jää voitolle, kun kumpikin pelaaja pelaa optimistrategialla? (Tehtävään on olemassa helppo ratkaisu, jossa ei tarvitse tuntea mitään summakaavoja.)*

Tehtävä 3 *Sama kuin edellä, mutta aloittaja ottaa ensimmäisellä vuorollaan yhden tikun, ja tämän jälkeen kumpikin ottaa aina vuorollaan kaksi tikkua (kunnes pelin viimeisellä vuorolla otetaan taas yksi jäljelläoleva tikku). (Tehtävään on olemassa helppo ratkaisu, jossa ei tarvitse tuntea mitään summakaavoja.)*

Tehtävä 4 *Eräässä raha-automaattipokeripelissä pelaaja voi yrittää tietyissä tilanteissa tuplata. Tuplauksessa pelaaja asettaa panokseksi summan s, ja automaatti arpoo kortin tavallisesta 52 kortin pakasta. Pelaajan tulee arvata, onko kortti pieni (kuutonen tai alle) vai iso (kasi tai yli). Ässä lasketaan vain pieneksi kortiksi.*

Jos pelaaja arvasi oikein, hän saa takaisin alkuperäisen panoksensa s sekä voittoa s:n verran, ja jos pelaaja arvasi väärin, hän menettää panoksensa. Jos automaatin arpoma kortti on seiska, pelaaja menettää panoksensa.

Laske pelaajan voiton odotusarvo tuplauksessa, kun tappio lasketaan negatiiviseksi voitoksi. (Jos et tiedä, mitä odotusarvo tarkoittaa, katso Liite 1.) Jääkö pelaaja pitkällä aikavälillä voitolle vai tappiolle tuplauksessa?

[1] Joukossa on pari rahapelitehtävää, mutta opettajille huomautaisin, että uskon rahapelien matematiikan ymmärtämisen olevan paras suoja rahapelien haittoja vastaan. Henkilö, joka ymmärtää, miksi tietyissä peleissä ei voi jäädä voitolle, ei myöskään syydä niihin rahojaan.

Tehtävä 5 *Musta Maija -korttipelin säännöt löytyvät Liitteestä 2. Osoita, että kahden pelaajan Musta Maija -peli päättyy väistämättä lopulta, pelasivatpa pelaajat kuinka fiksusti tai typerästi tahansa.*

Mitä voit sanoa kolmen pelaajan Mustasta Maijasta?

Tehtävä 6 *A ja B pelaavat seuraavaa peliä, johon kumpikin on asettanut samansuuruisen panoksen. Ensin A heittää noppaa. Sen jälkeen A saa halutessaan ehdottaa panosten tuplausta. Jos A ehdottaa tuplausta, B voi joko hyväksyä tuplauksen, jolloin A ja B asettavat kumpikin alkuperäisten panostensa verran lisää panosta peliin, tai luovuttaa, jolloin B häviää alkuperäisen panoksen ja peli päättyy. Peli jatkuu B:n nopanheitolla. Suurempi tulos voittaa, paitsi että B voittaa tasatilanteessa.*

Millä ensimmäisen nopan silmäluvuilla A:n kannattaa ehdottaa tuplausta? Millä ensimmäisen nopan silmäluvuilla B:n kannattaa hyväksyä tuplaus? (Pelaajan kannattaa pelata niin, että hän maksimoi voittosumman odotusarvoa, kun tappio mielletään negatiiviseksi voitoksi. Jos et tiedä, mitä odotusarvo tarkoittaa, katso Liite 1.)

Kumpi pelaaja jää pitkällä aikavälillä voitolle, kun peliä toistetaan useita kertoja ja pelaajat pelaavat niin kuin heidän kannattaa pelata?

Haastavammat tehtävät

Tehtävä 7 *Musta Maija -korttipelin säännöt löytyvät Liitteestä 2. Oletetaan, että Musta Maija -pelissä on n pelaajaa, $2 \leq n \leq 10$. Millä n:n arvoilla joku pelaajista pääsee väistämättä lopulta eroon korteistaan, pelasivatpa pelaajat kuinka fiksusti tai typerästi tahansa?*

Tehtävä 8 *Kaksi pelaajaa pelaa hutunkeittoa seuraavasti: Ensimmäisenä pelaava heittää pesäpallomailan ilmaan, ja toisena pelaava nappaa siitä kiinni satunnaisesta kohdasta. Tämän jälkeen ensimmäisenä pelaava ottaa mailasta kiinni niin, että hänen kätensä koskettaa toisena pelaavan kättä ja on kahvan puolella mailaa verrattuna toisena pelaavan käteen. Tämän jälkeen toisena pelaava irroittaa otteensa mailasta ja ottaa mailasta kiinni niin, että hänen kätensä koskettaa ensimmäisenä pelaavan kättä ja on kahvan puolella mailaa verrattuna ensimmäisenä pelaavan käteen. Näin jatketaan, kunnes jompi kumpi pitää kiinni mailan kahvanpuoleisesta päästä (osa kädestä saa jäädä tyhjän päälle. Oletetaan myös, että mikä tahansa nollasta eroava pituus mailaa mahdollistaa otteen saamisen.) Tämä pelaaja voittaa pelin.*

Oletetaan, että kun maila otetaan heitosta kiinni, käden ja mailan kahvanpuoleisen pään väliin jää k:n verran tilaa. Kun pelaajat tämän jälkeen ottavat mailasta kiinni, he voivat valita otteensa viemän tilan väliltä $[n, m]$. Kummalla pelaajalla on voittostrategia hutunkeitossa, kun k, n ja m ovat annettuja?

Tehtävä 9 *Osoita, että jätkänshakissa (siis siinä, jota pelataan rajoittamattomalla pelialueella, ja jossa pitää saada viisi riviin) toisena pelaavalla ei ole voittostrategiaa.*

Tehtävä 10 *Kaksi pelaajaa pelaa äärettömällä ruutupaperilla seuraavaa peliä: Toinen pelaa rasteilla, toinen nollilla. Kumpikin merkkaa vuorollaan oman merkkinsä johonkin vapaaseen ruutuun. Se pelaaja voittaa, joka saa merkittyä 2×2 -blokin itselleen. Tällöin peli myös päättyy. Osoita, että kummallakaan pelaajalla ei ole voittostrategiaa.*

Tehtävä 11 *Tätä peliä pelataan äärettömällä ruutupaperilla, ja kutsumme ruutujen reunaviivojen leikkauspisteitä paikoiksi.*

Yksi pelaaja pelaa seuraavasti: Alussa äärettömällä ruutupaperilla on merkitty äärellinen määrä paikkoja. Vuorollaan pelaaja aina merkitsee yhden merkitsemättömän paikan ja vetää viivan viiden peräkkäisen merkityn paikan kautta vaakasuoraan, pystysuoraan tai diagonaalisesti. (Kaksi merkittyä paikkaa ovat siis viivan alku- ja loppupiste, ja kolme viivan sisäpisteitä.) Kaksi vedettyä viivaa saa leikata korkeintaan yhdessä pisteessä, eli ne eivät saa "kulkea päällekkäin". Osoita, että peliä ei voi jatkaa äärettömiin.

Ratkaisut

(1) Oletetaan, että kasassa on kolmella jaollinen määrä kiviä. Tällöin toisena pelaava pystyy varmistamaan aina omalla siirrollaan, että kasaan jää hänen siirtonsa jälkeen kolmella jaollinen määrä kiviä. Lopulta kasassa on kolme kiveä, ja ensimmäisenä pelaava ottaa niistä 1 tai 2, ja toisena pelaava voi ottaa loput ja voittaa.

Jos kasan kivien määrä ei ole kolmella jaollinen, voi ensimmäisenä pelaava jättää kasaan ensimmäisen siirtonsa jälkeen kolmella jaollisen määrän kiviä ja voittaa pelaamalla samoin kuin toisena pelaava edellisessä kappaleessa.

(2) Optimistrategialla kumpikin ottaa vuorollaan kasassa jäljellä olevista pisimmän tikun. Ajatellaan tikut pareiksi niin, että $2n$ ja $2n-1$ mittaiset ovat pari, $2n-2$ ja $2n-3$ mittaiset ovat pari ja niin edelleen. Kustakin parista pelin aloittaja ottaa pidemmän ja toisena pelaava lyhyemmän. Jokaisessa parissa ensimmäisenä pelaava jää yhden yksikön voitolle, joten hän jää koko pelissä n yksikköä voitolle.

(3) Ajatellaan tikut pareiksi samoin kuin edellisessä tehtävässä. Nyt pelaajat jäävät pareissa vuorotellen yhden yksikön voitolle. Jos n on parillinen, pareja on pa-

rillinen määrä, ja kumpikin jää yhtä monta kertaa voitolle. Siis tasapeli. Jos n on pariton, jää pelin aloittaja yhden kerran enemmän voitolle, joten hän voittaa yhden yksikön.

(4) Käytetään samaa notaatiota kuin liitteessä.

Merkitään t_1 ="Pelaaja arvasi oikein", t_2 ="Pelaaja arvasi väärin" ja t_3 ="Kortti on seiska". Nyt $p_1 = 6/13$ (huomaa, että veikkasipa pelaaja pientä tai isoa, hänellä on kuusi mahdollisuutta kolmestatoista osua oikeaan), $p_2 = 6/13$ ja $p_3 = 1/13$. Nyt $t_1 = s$ (se, kuinka paljon pelaaja saa voittoa), $t_2 = -s$ ja $t_3 = -s$. Siis odotusarvo on $6/13 \times s + 6/13 \times (-s) + 1/13 \times (-s) = -s/13$. Siis odotusarvo on negatiivinen, ja pelaaja jää pitkällä aikavälillä tappiolle.

(5) Huom! Seuraavassa 52 (korttipakan korttien lukumäärä) on yläraja, eli se on luku, joka on varmasti riittävän suuri. On mahdollista, että se on liiankin suuri, mutta tämä ei vähennä ratkaisun oikeellisuutta.

Kahden hengen peli:

Aina kun pelissä lyöntivuoro vaihtuu pelaajalta toiselle, kortteja poistuu pelistä. Jos siis lyöntivuoro vaihtuu vähintään 52 kertaa, on jompi kumpi pelaajista päässyt kaikista korteistaan eroon ja voittanut pelin.

Aina kun saman pelaajan lyöntivuoro säilyy, hän menettää käsikorttejaan ja nostaa uusia kortteja pakasta tai pääsee eroon käsikorteistaan. Näin pelaaja pääsee eroon korteistaan, jos hän pääsee lyömään vähintään 52 kertaa peräkkäin.

Siis kahden hengen pelissä lyöntivuoro voi vaihtua pelaajalta toiselle korkeintaan 52 kertaa, ja kahden peräkkäisen vaihtumisen välissä voi olla korkeintaan 52 lyöntivuoroa. Niinpä kahden hengen peli kestää korkeintaan 52×52 lyöntivuoroa.

Kolmen hengen Musta Maija puolestaan jää jumiin mm. silloin, jos pelaajat aina lyövät yhden kortin ja aina nostavat käteen heille lyödyn kortin.

Jos pelaajia on enemmän kuin kolme, peli muuttuu kolmen hengen peliksi siinä vaiheessa kun sopiva määrä pelaajia on päässyt eroon korteistaan (ellei peli ole jäänyt jumiin sitä ennen). Tällöin saatetaan kohdata sama ongelma kuin kolmen hengen Mustassa Maijassa.

(6) Oletetaan, että A:n voittotodennäköisyys ensimmäisen nopanheiton jälkeen on p, kun B:n mahdollinen luovutus jätetään huomiotta. A:n voittosumman odotusarvo tuplaamattomassa pelissä on $p - (1 - p) = 2p - 1$, tuplatussa pelissä $2(2p - 1) = 4p - 2$ ja 1, jos B luovuttaa. $1 \geq 2p - 1$ aina, ja $4p - 2 \geq 2p - 1$ jos ja vain jos $p \geq 1/2$ (yhtäsuuruus toteutuu jos ja vain jos $p = 1/2$.) A:n kannattaa siis ehdottaa tuplausta, jos $p > 1/2$, olla ehdottamatta, jos $p < 1/2$ ja päätös on yhdentekevä, jos $p = 1/2$.

Oletetaan, että B:n voittotodennäköisyys ensimmäisen nopanheiton jälkeen on q, kun B:n mahdollinen luovutus jätetään huomiotta. B:n kannattaa hyväksyä tuplaus, jos ja vain jos $2(q - (1 - q)) \geq -1$, eli jos $q \geq 1/4$ (yhtäsuuruuden vallitessa päätös on yhdentekevä).

1. nopan tulos	$p = 1 - q$	kannattaa ehdottaa	kannattaa hyväksyä
1	0	ei	kyllä
2	1/6	ei	kyllä
3	1/3	ei	kyllä
4	1/2	yhdentekevä	kyllä
5	2/3	kyllä	kyllä
6	5/6	kyllä	ei

Alla käytän samaa notaatiota kuin liitteessä. Viimeiseen kysymykseen vastaamiseksi muodostetaan tapaukset t_1="Ensimmäisen nopan tulos on yksi ja A voittaa", t_2="Ensimmäisen nopan tulos on yksi ja B voittaa", t_3="Ensimmäisen nopan tulos on kaksi ja A voittaa", t_4="Ensimmäisen nopan tulos on kaksi ja B voittaa" jne. Määritetään tapahtumien todennäköisyydet ja tapahtumien rahalliset arvot (pelaajan A kannalta) ja asetetaan ne pelaajan A voittosumman odotusarvon (kun tappio mielletään negatiivisena voittona) kaavaan. Havaitaan, että termit $p_1v_1 + p_2v_2$ ja $p_{11}v_{11} + p_{12}v_{12}$ kumoavat toisensa, samoin kuin termit $p_3v_3 + p_4v_4$ ja $p_9v_9 + p_{10}v_{10}$. Koska $p_7v_7 + p_8v_8 = 0$, odotusarvo on $p_5v_5 + p_6v_6 = (2 - 4)/36 = -1/18$. Siis B jää pitkällä aikavälillä voitolle.

(7) Ratkaisu: Joku pelaajista pääsee väistämättä lopulta eroon korteistaan jos ja vain jos n on parillinen.

n parillinen: Jaetaan pelaajat porukoihin A ja B niin, että jokainen istuu kahden vierasta porukkaa edustavan välissä.

Aina kun pelissä lyöntivuoro vaihtuu porukalta toiselle, kortteja poistuu pelistä. Jos siis lyöntivuoro vaihtuu porukalta toiselle vähintään 52 kertaa, on joku pelaajista päässyt kaikista korteistaan eroon.

Aina kun lyöntivuoro säilyy samalla porukalla, joku porukan pelaajista menettää käsikorttejaan ja nostaa uusia kortteja pakasta tai pääsee eroon käsikorteistaan. Näin joku porukan pelaajista pääsee eroon korteistaan, jos sama porukka pääsee lyömään vähintään 52 kertaa peräkkäin.

Siis lyöntivuoro voi vaihtua porukalta toiselle korkeintaan 52 kertaa, ja kahden peräkkäisen vaihtumisen välissä voi olla korkeintaan 52 lyöntivuoroa, ennenkuin joku on päässyt eroon korteistaan. Niinpä kestää korkeintaan 52×52 lyöntivuoroa, ennenkuin joku on päässyt eroon korteistaan.

n pariton: Oletetaan, että jokainen lyö aina yhden kortin ja nostaa hänelle lyödyn kortin käteen. Jokainen pelaaja on joka toisella kierroksella lyöjän roolissa ja joka toisella kierroksella nostajan roolissa. Niinpä pelaaja ei pääse korteistaan eroon, vaan hänen käsikorttiensa määrä alkaa vaihdella kuuden ja viiden välillä.

(8) Kutsutaan perusstrategiaksi strategiaa, jossa otteen koko on vähintään mailan loppuosa, jos mailaa on jäljellä korkeintaan m:n verran, ja muutoin otteen koko on $n + m - x$, missä x on vastustajan edellisen otteen koko.

Olkoon y reaaliluku. Merkitään $f(y)$:llä pienintä positiivista reaalilukua, jolle on olemassa kokonaisluku ℓ siten, että $f(y) = y + \ell(n + m)$.

Jos $f(k) > m$, toisena pelaava pystyy voittamaan perusstrategialla.

Jos $n \leq f(k) \leq m$, ensimmäisenä pelaava voi jättää ensimmäisellä otteellaan mailaan pituuden k', jolle $f(k') = n+m$ ja tämän jälkeen voittaa perusstrategialla.

Jos $f(k) < n$, ensimmäisenä pelaava ottaa ensimmäisen otteensä n:n kokoisena. Tämän jälkeen pituutta jää mailaan k' yksikköä, jolle $f(k') > m$. Nyt ensimmäisenä pelaava voittaa perusstrategialla.

Tehtävässä teimme idealisoivan oletuksen, että mikä tahansa pituus mailaa viimeisessä otteessa riittää voittoon. Käytännön pelitilanteet ovat sellaisia, että tuon pituuden on oltava vähintään pieni vakio a. Kiinnostunut lukija voi miettiä, kuinka tehtävän ratkaisu muuttuu tällä vaatimuksella.

(9) Lyhyt todistus: Aloitussiirrosta ei missään tilanteessa ole haittaa ensimmäisenä pelaavalle.

Pitkä todistus: Oletetaan, että toisena pelaavalla on voittostrategia S. Nyt ensimmäinen pelaaja voi pelata ensimmäisen siirtonsa mielivaltaisesti, ja sen jälkeen S:n mukaan kuvitellen, että ensimmäistä siirtoa ei ole tehty. Jos jossain vaiheessa S:n mukaan ensimmäisen pelaajan pitää tehdä se siirto, jota hän ei kuvittele tehneensä, hän lakkaa kuvittelemasta, että kyseistä siirtoa ei ole tehty, tekee mielivaltaisen siirron ja alkaa jatkossa kuvitella, että hän ei ole tehnyt tuota mielivaltaista siirtoa. Koska S on voittostrategia ja siitä siirrosta, jota ensimmäinen pelaaja ei kuvittele tehneensä, ei ole ensimmäiselle pelaajalle haittaa, ensimmäinen pelaaja voittaa välttämättä. Ristiriita.

(10) Ajatellaan ruutupaperi ”tiiliseinäkuvioksi”, joka koostuu 2×1 -”tiilistä”. Huomataan, että jokaisen 2×2 -blokin pitää sisältää yksi edellisessä virkkeessä kuviteltuista ”tiilistä”. Nyt kumpikin pelaaja pystyy estämään toista pelaajaa voittamasta pelaamalla aina samaan ”tiileen” kuin vastustajan edellinen siirto (tai pelaamalla mielivaltaisesti, jos samassa ”tiilessä” on jo oma merkki.)

(11) Ajatellaan, että jokaisella merkityllä paikalla on kahdeksan ilmansuuntaa. Jokainen vedetty viiva kulkee kahdeksan merkitty paikka–ilmansuunta -parin kautta (yksi viivan kussakin päätepisteessä ja kaksi kussakin sisäpisteessä.) Kaksi viivaa ei voi käyttää saman paikan samaa ilmansuuntaa, koska tällöin ne leikkaisivat useammassa kuin yhdessä pisteessä. Koska vuorolla merkitään yksi paikka (kahdeksan ilmansuuntaa) ja vedetään viiva kahdeksan merkitty paikka–ilmansuunta -parin kautta, vapaiden merkitty paikka–ilmansuunta -parien määrä säilyy koko ajan vakiona. Koska pelitilanteen ylä-, ala-, oikeassa ja vasemmassa reunassa on väistämättä vapaita merkitty paikka–ilmansuunta -pareja (esim. jokaisen rivin, jolla on merkittyjä paikkoja, idänpuolimmaisessa merkityssä paikassa on vapaa ilmansuunta itään päin), vieläpä sitä enemmän mitä enemmän paikkoja on merkitty, pelitilanne ei voi kasvaa mielivaltaisen suureksi.

Liite 1: Odotusarvo

Tutkitaan aluksi peliä, jossa A vetää yhden kortin tavallisesta 52 kortin pakasta. Jos kortti on punainen, A voittaa 3 euroa, ja jos kortti on musta, A häviää 3 euroa.

Merkitään t_1:llä tapahtumaa ”vedetty kortti on punainen” ja t_2:lla tapahtumaa ”vedetty kortti on musta”. Kun pelataan yksi peli, seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

1. Ei ole mahdollista, että kumpikin tapahtumista t_1 ja t_2 tapahtuu.
2. Jompi kumpi tapahtumista t_1 ja t_2 tapahtuu.

Ensimmäinen ehto pätee siksi, että kortti ei voi olla yhtaikaa punainen ja musta, ja jälkimmäinen ehto siksi, että jokainen kortti on joko punainen tai musta.

Tapahtumilla t_1 ja t_2 on todennäköisyydet p_1 ja p_2. Koska puolet pakan korteista on punaisia ja puolet mustia, $p_1 = 1/2$ ja $p_2 = 1/2$.

Lisäksi tapahtumiin t_1 ja t_2 liittyy luvut v_1 ja v_2. Koska A voittaa kolme euroa punaisella kortilla, voidaan määrittää $v_1 = 3$, ja koska A häviää kolme euroa mustalla kortilla, voidaan määrittää $v_2 = -3$.

Nyt A:n voittosumman odotusarvo (kun tappio lasketaan negatiiviseksi voitoksi) lasketaan kaavalla

$$p_1 v_1 + p_2 v_2.$$

Tässä tapauksessa siis odotusarvo on $(1/2) \times 3 + (1/2) \times (-3) = 0$. Samalla kaavalla odotusarvo voidaan laskea kaikissa tilanteissa, joissa numeroidut ehdot (1) ja (2) pätevät.

Tutkitaan seuraavaksi peliä, jossa pakkaan on lisätty kaksi jokeria (joita ei lasketa mustiksi eikä punaisiksi korteiksi). Tavallisten korttien osalta peli etenee kuten edellisessä kohdassa, mutta jokerin vetäessään A häviää yhden euron.

Nyt t_1 ja t_2 ovat kuten edellä, ja mukaan tulee uusi tapahtuma t_3, joka on "vedetty kortti on jokeri". Kun pelataan yksi peli, seuraavat ehdot pätevät:

1. Ei ole mahdollista, että kaksi tai useampia tapahtumista t_1, t_2, t_3 tapahtuu.

2. Välttämättä joku tapahtumista t_1, t_2, t_3 tapahtuu.

Nyt $p_1 = 26/54 = 13/27$, $p_2 = 26/54 = 13/27$ ja $p_3 = 2/54 = 1/27$. Vastaavasti $v_1 = 3$, $v_2 = -3$ ja $v_3 = -1$. A:n voittosumman odotusarvo (kun tappio lasketaan negatiiviseksi voitoksi) saadaan kaavalla

$$p_1v_1 + p_2v_2 + p_3v_3.$$

Meidän tapauksessamme odotusarvo on siis $13/27 \times 3 + 13/27 \times (-3) + 1/27 \times (-1) = -1/27$. Samalla kaavalla odotusarvo voidaan laskea myös muissa sellaisissa tapauksissa, joissa ehdot (1) ja (2) toteutuvat.

Jos tapahtumia on enemmän kuin kolme, odotusarvon kaava muodostetaan aivan samalla periaatteella, summattavia on vain enemmän. Kuitenkin ehtojen (1) ja (2) vastineiden tulee päteä. (Jos taas tapahtumia on vain yksi, t_1, tällöin t_1 tapahtuu välttämättä, eli $p_1 = 1$, ja odotusarvo on yhtä kuin v_1.)

Voittosumman odotusarvo (kun tappio mielletään negatiivisena voittona) on hyvä mittari sille, mitä tapahtuu pitkissä sarjoissa, joissa samaa peliä toistetaan monia kertoja. Tällöin pelaaja voittaa keskimäärin yhdessä pelissä odotusarvon verran (jos odotusarvo on positiivinen) tai häviää keskimäärin yhdessä pelissä odotusarvon verran (jos odotusarvo on negatiivinen). Jos odotusarvo on nolla, pelaaja jää keskimäärin omilleen.

Lopuksi vielä kiinnostuneita lukijoita varten muodollisesti pätevä odotusarvon määritelmä.

Olkoot $t_1, \ldots, t_n$ mahdollisia tapahtumia, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- On mahdotonta, että kaksi tai useampia tapahtumia jonosta $t_1, \ldots, t_n$ tapahtuu.
- Väistämättä joku tapahtumista $t_1, \ldots, t_n$ tapahtuu.

Olkoon kaikilla $i, 1 \leq i \leq n$, luku p_i todennäköisyys, että t_i tapahtuu. Tällöin välttämättä $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Oletetaan, että jokaiseen tapahtumaan t_i, $1 \leq i \leq n$, on liitetty lukuarvo v_i. Nyt muuttujan v odotusarvo määritetään kaavalla $p_1v_1 + \cdots + p_nv_n$. Se on siis lukujen $v_1, \ldots, v_n$ todennäköisyyksillä painotettu keskiarvo.

Liite 2: Mustan Maijan säännöt

Peliin osallistuu 2-10 pelaajaa, ja pelissä käytetään tavallista 52 kortin korttipakkaa. Kortit sekoitetaan ja jokaiselle pelaajalle jaetaan viisi korttia, ja loput korteista asetetaan kuvapuoli alaspäin nostopakaksi. Nostopakan päällimmäinen kortti asetetaan kuvapuoli ylöspäin poikittain nostopakan alle, ja sen maa määrää valttimaan. Poikittain asetettu kortti on nostopakan alin kortti. Valttimaan kortteja kutsutaan valteiksi. Pata ei voi olla valttia, joten jos valtiksi kääntyi pata, nostettu kortti palautetaan pakan keskelle, ja uusi kortti käännetään määräämään valttimaa. Toistetaan kunnes saadaan valtiksi joku muu maa kuin pata. (Jos suurilla pelaajamäärillä näyttää siltä, että nostopakassa on pelkkiä patoja, suoritetaan uusi jako.)

Patakuningatar on erikoiskortti, ja sitä kutsutaan Mustaksi Maijaksi.

Vuorolla vuorossa oleva pelaaja lyö kortteja kädestään pöytään seuraavin rajoituksin:

1. Korttien tulee olla samaa maata (tässä suhteessa Musta Maija lasketaan padaksi.)

2. Korttien määrä ei saa ylittää seuraavan pelaajan käsikorttien määrää.

Tämän jälkeen, jos nostopakassa on jäljellä kortteja ja vuorossa olevalla pelaajalla on vähemmän kuin viisi korttia kädessään, vuorossa oleva pelaaja nostaa nostopakasta kortteja, kunnes hänellä on viisi korttia kädessään.

Tämän jälkeen seuraavana vuorossa oleva pelaaja (jota kutsumme uhriksi) voi yrittää kaataa lyödyt kortit käsikorteillaan. Mikä tahansa kortti kaatuu korkeammalla kortilla samaa maata (ässä on korkein). Mikä tahansa ei-valttikortti kaatuu millä tahansa valtilla. Yhdellä kortilla voi kaataa vain yhden kortin. Mustaa Maijaa ei voi kaataa millään kortilla, eikä Mustalla Maijalla voi kaataa mitään korttia. Kaataminen on vapaaehtoista. Kaadetut kortit ja ne kortit, joita käytettiin kaatamiseen, poistetaan pelistä.

Jos uhri ei kaatanut kaikkia lyötyjä kortteja, hän ottaa kaatamatta jääneet kortit käteensä.

Jos uhrilla on tässä vaiheessa vähemmän kuin viisi korttia kädessään ja nostopakassa on jäljellä kortteja, uhri ottaa nostopakasta kortteja, kunnes hänellä on viisi korttia kädessään.

Jos uhri kaatoi kaikki lyödyt kortit, peli jatkuu uhrin lyöntivuorolla. Jos taas uhri nosti kaatamatta jääneitä kortteja käteensä, peli jatkuu uhrista seuraavan pelaajan lyöntivuorolla. Jos pelaajia on jäljellä vain kaksi, uhrista seuraava pelaaja on sama pelaaja, joka löi kortteja uhrille.

Kun nostopakan loputtua pelaaja pääsee eroon käsikorteistaan, hän on ulkona pelistä eikä enää osallistu siihen. Viimeinen pelaaja, jolla on kortteja kädessään, niiden joukossa Musta Maija, on hävinnyt pelin.