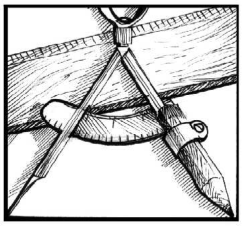


Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan alkukierroksen tiimoilta

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL järjestää vuosittain matematiikkakilpailun lukiolaisille. Kilpailussa on kolme sarjaa ja kaksi kierrosta. Sarjajako perustui alkuaan siihen, millä luokalla kilpailija opiskeli ja mitä hänen näin ollen voitiin olettaa osaavan, mutta luokattoman lukion myötä sarjajako perustuu vain oppilaan ikään. Kilpailun perus- ja välisarjoissa on yläikäraja, mutta avoimeen sarjaan voi osallistua kuka hyvänsä lukiolainen. Käytännössä suurin osa avoimen sarjan osallistujista on ainakin kolmannella lukiovuodellaan. Asia ei tietysti ole aivan yksioikoinen, mutta voi karkeasti odottaa, että kilpailun osallistujat edustaisivat suunnilleen ikäluokkansa parhaita matematiikan osaajia. Vastauksista saisi siis jonkinlaista läpileikkausta runsaan 11 vuoden matematiikan opiskelujen mahdollisesta hyvästä tuotoksesta.

Kilpailun ensimmäinen kierros käydään kouluissa. MAOL lähettää kilpailutehtävät kaikkiin kouluihin, ja kilpailun järjestäminen on siten yleensä matematiikanopettajien vastuulla. Vastaukset palautetaan kilpailutoimikunnalle arvostelemattomina, ja kaikkien osallistujien vastaukset toivotaan palautettavan.

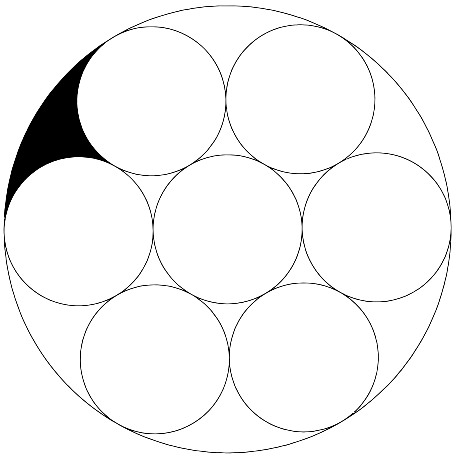
Vuonna 2011 alkukilpailu pidettiin 1. marraskuuta. Kilpailutoimikunta sai avoimen sarjan vastauksia kaikkiaan 121 lukiosta. Tämä on noin 35 % Suomen lukioista. Loput 65 % ovat pitäneet kilpailun järjestämistä tarpeettomana, koulun aikatauluihin sopimattomana tai sitten ovat järjestäneet kilpailun, mutta katsoneet paremmaksi olla lähettämättä suorituksia kilpailutoimikunnalle. Kilpailuvastauksia saapui yhteensä 546 eli keskimäärin 4,5 lukiota kohden. Joissakin lukioissa kilpailukoe oli selvästi järjestetty koko pitkän matematiikan opiskeluryhmälle. Tällaisista kouluista saapui paljon melko vähän asiaa sisältäviä vastauspapereita. Joistakin lukioista vastauksia tuli vain yksi tai pari.

Tehtävät arvosteltiin samalla asteikolla, maksimissaan kuusi pistettä joka tehtävästä, joten maksimipistemääräksi tuli 24. Kokonaisuudessaan pistejakauma ei ollut kovin normaalijakauman mukainen: keskiarvo oli noin 5,5, ja aivan ilman pisteitä jäi 111 kilpailijaa. Parhaaseen neljännekseen sijoittuivat ainakin 9 pistettä saaneet.

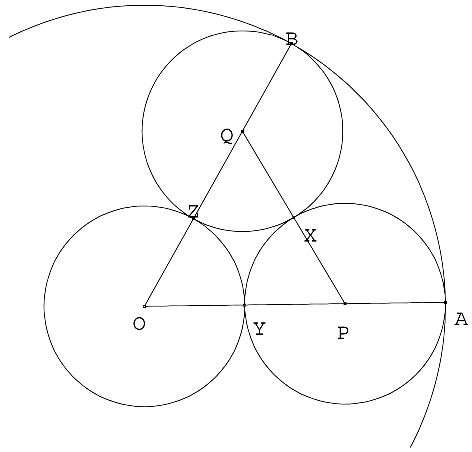
Mitä kilpailutoimikunnan saamat vastaukset kertovat suomalaisten abiturienttien osaamisesta? Katsotaan tehtävä tehtävältä.

Tehtävä 1

Kilpailun ensimmäinen tehtävä oli, niin kuin odottaa sopikin, helpoin. Tehtävässä oli oheinen kuvio ja teksti: *Kuviossa ison ympyrän säde on 6, pienet ympyrät ovat samankokoisia ja sisin sekä uloin ympyrä sivuavat muita ympyröitä. Määritä kuvion varjostetun osan* *ala*. Tehtävää voi kritisoida: kaikki informaatio ei sisälly tekstiin, vaan osa on arvattava kuvasta. Kuvan mukaan kukin kuudesta pienestä ympyrästä sivuaa paitsi sisintä ja ulointa ympyrää, myös viereisiä ympyröitä. Tehtävän teksti sallisi sellaisenkin tilanteen, jossa jotkin kuudesta pienestä ympyrästä leikkaisivat toisiaan. Myöskään sitä, että sisimmän pienen ympyrän keskipiste yhtyy uloimman ympyrän keskipisteeseen, ei tehtävässä ilmoiteta; kun sisimmän ja uloimman ympyrän välissä on vähintään kaksi samansäteistä sivuavaa ympyrää, keskipisteiden yhtyminen on välttämätöntä.



Kun kuviosta luettavat ilmeiset symmetriat hyväksyy, niin halutun pinta-alan voi laskea hiukan eri reittejä. Joka tapauksessa on huomattava, että ison ympyrän halkaisija on kolme pienen ympyrän halkaisijaa, mistä seuraa, että pienen ympyrän säde on 2. Kysytty ala on kuudesosa jäännöksestä, kun ison ympyrän alasta $\pi 6^2 = 36\pi$ poistetaan seitsemän pikkuympyrän alaa, $7 \cdot 4\pi$ ja kuusi pikkuympyröiden väliin jäävää ympyränkaarikolmiota, sellaista kuin kuvan kaarien $\overset{\frown}{ZY}$, $\overset{\frown}{YX}$ ja $\overset{\frown}{XZ}$ rajoittama kuvio. Olennaista on, että ympyröiden sivuamispisteet ovat niiden keskipisteitä yhdistävillä janoilla: tämähän seuraa siitä, että sivuavien ympyröiden sivuamispisteisiin piirretyt säteet ovat molemmat kohtisuorassa ympyröiden yhteistä tangenttia vastaan ja ovat siis saman suoran janoja. Näin ollen ympyränkaarikolmion ZYX ala on tasasivuisen kolmion OPQ ala vähennettynä kolmella pienen ympyrän kuudenneksella. Koska $OP = 4$, tasasivuisen kolmion ala on $\frac{1}{2}4^2 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$. Kun laskutoimitukset suoritetaan, kysytyn alueen alaksi tulee $\frac{10}{3}\pi - 4\sqrt{3}$. Hiukan suoremmin pääsee perille, jos lähtee liikkeelle sektorista, joka on ison ympyrän kuudennes ja siis alaltaan 6π, vähentää siitä tasasivuisen kolmion alan $4\sqrt{3}$ ja kaksi pienen ympyrän kolmannesta eli $\frac{2}{3} \cdot 4\pi$. Edelleen on mahdollista vähentää uloimman ympyrän alasta sen säännöllisen kuusikulmion, jonka kärjet ovat kuuden väliympyrän keskipisteet, ala sekä kuusi pienen ympyrän kahden kolmanneksen kokoista sektoria. Kuusikulmion alan laskeminen edellyttää jälleen sen yhden kuudenneksen muodostaman tasasivuisen kolmion alan laskemista.



Koska jokainen näistä strategioista perustuu siihen, että ympyröiden sivuamispisteet (kuten kuvan X) sijaitsevat ympyröiden keskipisteiden yhdysjanoilla (kuten PQ) eikä tämä suoraan näy tehtävän mukana olleessa kuviossa, täysiin pisteisiin edellytettiin, että tähän asiaan olisi jotain huomiota kiinnitetty. Äärimmäisen harvoissa vastauksissa näin tapahtui, vaikka kolmion OPQ kulmien ja sivujen suuruuksia oli ahkerasti perusteltu. Näinpä yleisin tehtävästä annettu pistemäärä oli 5. (Nollaksi arvioituja vastauksia oli yksi vähemmän; kaikissa muissa tehtävissä 0 oli myös yleisin pistemäärä.)

Kilpailijat saivat käyttää apuvälineinään laskimia ja taulukkokirjoja, toisin kuin matematiikkakilpailuissa yleensä. Tämä johti useat ratkaisijat likiarvolaskuihin; puhdasta likiarvolaskelmaa, vaikka se olisikin johtanut oikeannäköiseen tulokseen, ei pidetty aivan täydellisenä. Arvostelijoiden ratkaisu on periaatteellinen: tehtävä koskee olennaisesti R-säteistä ympyrää, ei tiettyä konkreettista tilannetta. Ja onhan ketjussa, jossa mukana on vähennyslaskujakin, aina tarjolla olennaisen pyöristysvirheen vaarakin, jota ei etukäteen osaa arvioida. Aika monet suhtautuivat lukuarvoihin kovin suurpiirteisesti. Kun laskin näytti alueen pinta-alaksi vähän yli 3,5, vastaukseksi annettiin ”4”. Lienee opittu, että kun mittausdata, tässä siis uloimman ympyrän säde, on kerrottu yhdellä merkitsevällä numerolla, ei vastauksessakaan saisi olla enempää tarkkuutta. Taulukkokirjan käyttö ja ilmeisesti muussa yhteydessä kuin matematiikassa annettava tieteellisen kirjoittamistavan opetus johti aika monet vastaajat hiukan koomisenoloiseen esitystapaan: tasasivuisen kolmion alan laskemiseen käytetty menetelmä esitettiin lähdeviitteineen ”MAOL, s. 30”.

Oma lukunsa on sitten oikeaksi vastaukseksi saatu ”tarkka arvo”. Pieni kokoelma tällaisia:

$$\frac{10}{3}\pi - 2\sqrt{12}, \quad \frac{10\pi - 12\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{20}{6}\pi - 4\sqrt{3},$$
$$\frac{20\pi - 24\sqrt{3}}{6}, \quad 3\,\frac{1}{3}\pi - 8\sin 60^\circ, \quad 6\pi - \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{12},$$
$$\frac{8\pi - \left(\dfrac{3\cdot 4^2\sqrt{3}}{2} - 3\cdot\pi\cdot 2^2\right)}{6},$$
$$\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi 6^2 - \frac{4\cdot\sqrt{4^2-2^2}}{2} - \left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\pi 2^2\right)\cdot 2,$$
$$\frac{2(5\cdot\pi - 6\sqrt{3})}{3}, \quad 2\left(3\pi - 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right),$$
$$\frac{20\pi - 12\sqrt{12}}{6}, \quad 6\pi - \left(4\sqrt{3} - 2\pi + \frac{14}{3}\pi\right),$$
$$\frac{2}{3}(5\pi - 6\sqrt{3}).$$

”Sieventäminen” ei ole tarkkaan määritelty toimenpide, ja numeerisen likiarvon tuottamisen kannalta saattaa olla aika yhdentekevääkin se, mihin muotoon tällaisen ratkaisun saattaa.

Vielä muutama havainto: yllättävän moni kilpailija käytti tehtävän ympyröistä nimitystä pallo. Kolmion alan laskeminen oli usealle kilpailijalle ylivoimaista tai outoa. Aika monelle tasasivuisen kolmion ala oli sama kuin sivun neliö. Muutama vastaaja oli onnistunut päättelemään näin: kuviossa on kahta ympyränkaarimonikulmiota, kumpaakin kuusi identtistä kappaletta. Olkoon toisen, kysytyn kuvion ala x ja toisen y. Silloin $6(x+y) = 36\pi - 7\cdot 4\pi = 8\pi$ ja myös $x + y = \frac{4}{3}\pi$. Tämän jälkeen kilpailija ”ratkaisi” yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 6x + 6y = 8\pi \\ x + \ \ y = \dfrac{4}{3}\pi \end{cases}$$

arvaamalla y:n arvon!

Tehtävä 2

Kilpailun toisessa tehtävässä oli ratkaistavana Diofantoksen yhtälöksi nimetty yhtälö

$$x^2 + (10y - y^2)^2 + y^6 = 2011,$$

ja tehtävän tekstissä vielä täsmennettiin, että etsittävänä ovat yhtälön kokonaislukuratkaisut. Pistesaldolla mitattuna tehtävä osoittautui sarjan toiseksi vaikeimmaksi. Ratkaisu on kuitenkin suoraviivainen. Yhtälön vasen puoli on aina vähintään y^6, ja jos $|y| \ge 4$, $y^6 \ge 4^6 = 2^{12} > 4000$. Ratkaisua varten riittää, kun käy läpi y:n kokonaislukuarvot väliltä $[-3, 3]$ ja toteaa, että kokonaisluku x toteuttaa yhtälön vain tapauksessa $y = 3$; silloin voi olla $x = 29$ tai $x = -29$. Jos haluaa, niin laskutyötä voi hiukan lyhentää havainnolla $2011 \equiv 3 \mod 4$. Koska parillisten lukujen neliöt ovat neljällä jaollisia ja parittomien $\equiv 1 \mod 4$, on yhtälön vasemman puolen kolmen neliöluvun oltava parittomia, joten erityisesti y on pariton.

Ratkaisuissa esiintyi aika monta sellaista, joissa ratkaisu $(x, y) = (29, 3)$ annettiin ilman mitään selvityksiä siitä, miksi se on (melkein) ainoa ratkaisu. Tällaista arvauksenluontoista havaintoa ei kovin monin pistein palkittu. Tehtävän tekstin ilmaus ”Diofantoksen yhtälö” ja taulukkokirjan tunnollinen selaaminen johtivat sangen monen vastaajan kopioimaan vastauspaperiinsa MAOL-taulukot-kirjan (vuoden 2006 laitoksen) sivulla 57 esiintyvän lineaarisen eli ensimmäisen asteen Diofantoksen yhtälön yleisen ratkaisun, jolla ei ole mitään tekemistä tämän tehtävän kanssa. Taulukkokirjan kirjoittaja ei näytä muistaneen, että Diofantoksen yhtälö on laajempi käsite. Toinen ”käsitelaajennus” pilkahti aika monissa ratkaisuissa: perusteluksi y:n mahdollisten arvojen rajaamiselle esitti usea sitä, että yhtälön vasen puoli on (y:n suhteen) ”ylöspäin aukeava paraabeli”. Paraabeli on kuitenkin kartioleikkaus ja sellaisena toisen asteen käyrä. Joskushan kyllä puhutaan kuutioparaabelista tai semikuubisesta paraabelista.

Tehtävä 3

Kolmas kilpailutehtävä tuotti pisteitä noin neljänneksen enemmän kuin toinen. Tehtävänä oli osoittaa, että kaavalla

$$f(x) = \frac{x^2 - 2011x + 1}{x^2 + 1}$$

määritelty funktio f toteuttaa epäyhtälön $|f(x) - f(y)| \le 2011$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Yksinkertaisin todistus lienee se, jossa lasketaan kolmioepäyhtälöä käyttäen

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= 2011\left|\frac{y}{y^2+1} - \frac{x}{x^2+1}\right| \\ &\le 2011\left(\frac{|y|}{|y|^2+1} + \frac{|x|}{|x|^2+1}\right) \end{aligned}$$

ja sitten sovelletaan molempiin yhteenlaskettaviin relaatiosta $(a-1)^2 \ge 0$ välittömästi seuraavaa epäyhtälöä

$$\frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{2}.$$

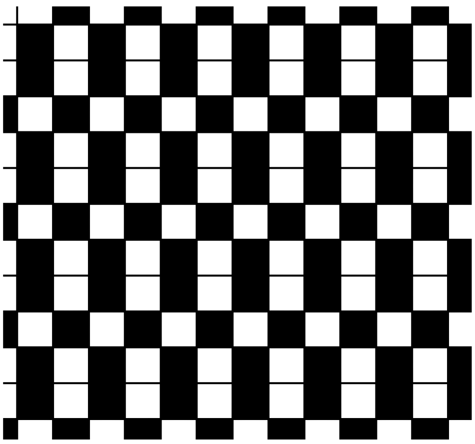
Muutamat kilpailijat olivat tämän huomanneet. Useimmat oikeat ratkaisut perustuivat havaintoon $|f(x) - f(y)| \le \max\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t) - \min\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t)$. Maksimin ja minimin määrittäminen sujuu normaalia rataansa. Funktion f derivaatalla osoittautuu olevan tasan kaksi nollakohtaa eli potentiaalista f:n ääriarvokohtaa, jotka ovat -1 ja 1,

$f(-1) = \frac{1}{2} \cdot 2013$ ja $f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 2009$. Kun vielä otetaan huomioon, että $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, havaitaan, että $f(-1)$ on f:n globaali maksimi ja $f(1)$ globaali minimi. Lisäksi $f(-1) - f(1) = 2011$. – Tämä ratkaisu, joka esiintyi hyvinkin monessa paperissa selkeänä ja täsmällisenä, pani olettamaan, että jokseenkin samanlainen tehtävä lienee jossain suositussa oppikirjassa. Kolmannessa tehtävässä oli kaikkiaan eniten täysin pistein arvosteltuja vastauksia, melko tasan 10 % kaikista.

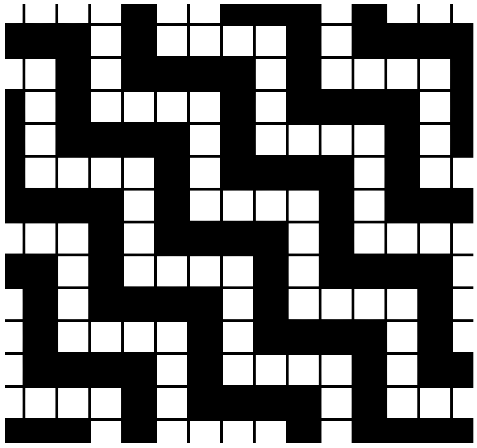
Kun funktioista ja niiden kuvaajista puhutaan, ovat tyyppiä $y = f(x)$ olevat yhtälöt tavallisia. Tämä lienee harhauttanut muutamat kilpailijat selvittelemään $|f(x) - f(y)|$:n sijasta lauseketta $|f(x) - f(f(x))|$. Siitä muodostuu tehtävän funktion tapauksessa aika näyttävä murtolauseke.

Tehtävä 4

Viimeinen tehtävä tuotti pisteitä vähiten. Tehtävän teksti meni näin: *Taso laatoitetaan valkoisilla ja mustilla yksikköneliöillä niin, että toisiaan koskettavilla laatoilla on joko kokonainen yhteinen sivu tai vain yhteinen kärki. Tasoon piirretyn janan sanotaan olevan valkoinen, jos on olemassa sellaiset valkoiset laatat, että jana pysyy näiden sisäpuolella lukuun ottamatta kohtia, joissa se leikkaa sivuja; vastaavasti määritellään musta jana. Osoita, että taso voidaan laatoittaa niin, ettei minkään valkoisen tai mustan janan pituus ole suurempi kuin 5.*



Laatoitustehtävät ovat yksi suosittu matemaattisen kilpatehtävän laji. Vaikka tehtävän teksti oli pitkähkö, se jätti muutamia väärintulkintamahdollisuuksia, sellaisia, jotka eivät heti tule laatoitustehtäviä enemmän nähneen mieleen. Jotkin kilpailijat tulkitsivat valkean ja mustan janan ehdossa esiintyvän sanan sivu niin, että se ei sisällä neliön kärkeä. Näin ei olisi mahdollista asettaa valkoista janaa kulkemaan kahden toisiaan kärjessä koskettavan valkoisen laatan kautta. Vielä ankaramman eston loivat kilpailijat, joille taso ei ollut joka suuntaan äärettömiin jatkuva, vaan esimerkiksi 4×4-levy.



Tehtävän ratkaisuiksi tarjottiin aika monenlaisia laatoitusjärjestelmiä. Monesta saattoi heti nähdä, ettei oltu ajateltu loppuun asti, mutta pisteitä jaettiin myös yrityksistä, joiden puutteellisuus ei heti ollut aivan ilmeinen. Kelvollisiksi ratkaisuiksi osoittautuivat ainakin oheisten kuvien mukaiset laatoitukset. Kummastakin löytää enintään sellaisen yksivärisen janan, jonka pituus on $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} < 5$. Tehtävä arvosteltiin aika lievästi. Oikeanlainen kuvio ilman enempiä perusteluja tuotti jo runsaasti pisteitä.

Lopuksi

Kilpailun tulokset ovat melko karut. Sen yksi ilmeinen tarkoitus, matematiikan pariin kannustaminen, ei varmaan toteudu ainakaan niiden kilpailijoiden kohdalla, joille kaikki tehtävät osoittautuivat ylivoimaisiksi. Lukion matematiikkakilpailun perus- ja välisarjoissa on ryhdytty käyttämään monivalintatehtäviä, joista useampi kilpailija luultavasti aina jonkin pisteen saa. Riman laskemisella ei kuitenkaan olisi pelkästään myönteisiä seurauksia. Kun matematiikkakilpailua markkinoidaan väylänä esimerkiksi kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin, ei ylioppilastutkintolautakunnan ratkaisu, vaikeuksien kiertäminen mahdollisimman kaukaa, voi olla tervettä politiikkaa. Lähes kaikkialla maailmassa vastaavien kilpailujen tehtävät ovat selvästi suomalaisia vaativampia. Kilpailun on voitava seuloa esiin niitäkin, jotka todella osaavat ja ajattelevat.

Yksi organisatorinen muutos voisi olla hyväksi. Jos kilpailu olisi kolmiportainen, niin että koulutason alkukierroksen ja valtakunnallisen loppukilpailun väliin asettuisi alueellinen kilpailu, voisi ensimmäinen kierros olla helpompi ja samalla kannustavampi. Alueellisen kierroksen järjestämiseen tulisi voida rekrytoida Matemaattisten aineiden opettajien alueellinen kerho-organisaatio ja eri puolilla maata sijaitsevat yliopistot ja korkeakoulut. Tämän vision Suomessa olisi kyllä nykyistä enemmän matematiikasta oikeasti kiinnostuneita opettajia, ja heillä innostuneita oppilaita.