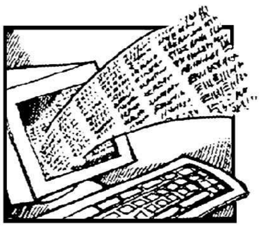


Wolfram|Alphasta, parametriesityksistä ja hiukan muustakin

Ari Koistinen
Lehtori, Metropolia ammattikorkeakoulu

Alkanut vuosi on tietokoneen isänä pidetyn 23.6.1912 syntyneen matemaatikko Alan Turingin juhlavuosi. Matematiikka on nykyisen informaatioteknologian perusta. Tietojenkäsittelytiede kehittyi alunperin matematiikan eräänä osa-alueena, ja toisaalta tietokoneiden rakentaminen edellytti matemaattisiin lainalaisuuksiin nojaavaa pitkälle kehitettyä teknologiaa. Voidaan siis sanoa, että matematiikka on sekä "softan" että "raudan" takana.

Nyt informaatioteknologia maksaa velkaansa matematiikalle kahdellakin eri tavalla. Ensimmäinen näistä on se, että nopeasti kehittyvän IT:n tarpeet, kuten vaikkapa valtavien tietomassojen käsittely ja hallinta sekä ns. tiedon louhinta, edellyttävät aivan uudenlaista matematiikkaa ja saavat aikaan uusia matematiikan osa-alueita, vieden näin matematiikan kehitystä eteenpäin. Samalla löytyy uusia sovellusmahdollisuuksia jo kauan sitten luodulle matematiikalle.

Toinen IT:n velanmaksumuoto ovat sen tarjoamat mahdollisuudet suorittaa rutiininomaisia matemaattisia operaatioita nopeasti ja vaivattomasti. Numeeriseen ja symboliseen laskentaan kehitettyjä tietokoneohjelmia on ollut jo kymmeniä vuosia, ja niiden ansiosta matemaattisten menetelmien sovellusmahdollisuuksien määrä on kasvanut räjähdysmäisesti. Esimerkiksi suurten matriisien käsittely ilman tietokoneiden apua olisi toivottoman työläs tehtävä.

Ennen tehokkaiden PC-koneiden aikakautta oli tyypillistä, että vähänkään vaativampi laskenta tehtiin keskustietokoneella, johon otettiin yhteys päätteeltä, ja supertietokoneita käytetään tähän tapaan edelleenkin. Paljon uudempi asia on, että matemaattisten ohjelmistojen mahdollisuudet ovat kenen tahansa käytettävissä internetissä. Tunnetuimpia esimerkkejä tästä on Wolfram|Alpha, `www.wolframalpha.com`.

Wolfram|Alpha on eräänlainen internet-hakukoneen ja matematiikkaohjelman yhdistelmä. Jälkimmäisestä osasta vastaa Wolfram|Alphan taustalla toimiva saman yhtiön, Wolfram Researchin, jo 1980-luvulla kehittämä ohjelma Mathematica. Suuri osa Mathematican käskyistä toimii Wolfram|Alphassa sellaisenaan, mutta erityistä Wolfram|Alphassa on se, että käskyillä ei ole tiukkaa syntaksia, vaan ohjelma pyrkii heuristisesti tulkitsemaan käyttäjän syötettä, ja tulkitsemisen onnistuessa se varsinaisten internet-hakukoneiden tapaan tulostaa ruudulle paljon aiheeseen liittyvää informaatiota. Syntaksin vapaus merkitsee esimerkiksi Mathematica-ohjelmaan verrattuna sitä, että käyttäjän ei tarvitse tietää, milloin käytetään aaltosulkuja, milloin hakasulkuja ja milloin tavallisia sulkumerkkejä, joilla kaikilla on Mathematicassa oma tarkoituksensa. Tällaisen vapauden ja heuristisen tulkinnan kääntöpuolena on kuitenkin riski vääriin tulkintoihin.

Yksinkertaisia esimerkkejä

Wolfram|Alphaan voi antaa syötteitä käyttämällä englannin kieltä, matemaattisia lausekkeita tai näiden yhdistelmiä. Jokainen voi itse kokeilla yksinkertaisia matemaattisia operaatioita, ja esimerkkejä löytyy verkosta paljon, esimerkiksi suoraan Wolfram|Alphan pääsivulta kohdasta ”examples”. Käydään tässä läpi muutama esimerkki. Kannattaa syöttää nämä käskyt itse Wolfram|Alphaan ja tarkkailla tuloksia.

Yhtälöiden ratkaisemiseksi riittää yksinkertaisimmillaan kirjoittaa pelkkä yhtälö, tai jopa ainoastaan yhtälön toinen puoli, jos toinen puoli on nolla. Esimerkiksi:

```
x^3-2x^2+x
```

Nollakohtien lisäksi saat paljon muutakin tietoa, mm. funktion kuvaajan, derivaattafunktion, integraalifunktion sekä paikalliset ääriarvot.

Kirjoittamalla

```
solve x^3-2x^2+x = 0
```

tulee vain kuvaaja ja yhtälön ratkaisut.

Jos muuttujia on useita, voit valita, minkä muuttujan suhteen yhtälö ratkaistaan:

```
solve x*y-x^2+y = 0 for y
```

Määrätyn integraalin voi laskea esimerkiksi seuraavasti:

```
integrate sin(x) from 0 to Pi
```

Ne, jotka tuntevat LaTeXin syntaksin, voivat käyttää sitäkin:

```
int_0^\pi \sin{x} dx
```

Mainittakoon, että Wolfram|Alpha osaa tulkita oikein myös tästä hiukan vapaamman muodon

```
int_0^pi sin(x)
```

mutta sen sijaan

```
int 0 pi sin(x)
```

on jo hiukan liian vapaamuotoinen esitys: sen ohjelma tulkitsee – kuten hyvin luonnollista onkin – tulon $0 \cdot \pi \cdot \sin(x) = 0$ integraalifunktioksi, ja sellaisiahan ovat kaikki vakiofunktiot.

Wolfram|Alpha selviytyy myös matriisioperaatioista. Se edellyttää jo hiukan tiukempaa syntaksia, sillä epämääräisen numerojonon tulkitseminen matriisiksi juuri silloin, kun käyttäjä tarkoittaa matriisia, vaatisi tietokoneohjelmalta jo lähes telepaattisia kykyjä. Matriisin alkiot syötetään aaltosulkujen sisällä (kuten Mathematicassa) ja myös matriisin rivit erotetaan toisistaan sisemmillä aaltosuluilla, esimerkiksi eräs matriisitulo:

```
{{3, 4} , {2 ,3}} * {{-1 ,0} , {4 ,9}}
```

Jos haluttaisiin tehdä hieman laajempia laskelmia esimerkiksi matriiseilla, niin viimeistään tässä vaiheessa tulisi vastaan eräs Wolfram|Alphan merkittävä puute verrattuna varsinaisiin matematiikkaohjelmiin: matriisien, lukujen tai funktioiden tallentaminen muuttujiin ei ole mahdollista, eikä työskentelyä näin ollen voi jatkaa käyttämällä suoraan muuttujaan tallennettua edellisen käskyn tulosta. Tästä syystä Wolfram|Alpha soveltuu hyvin lähinnä pienimuotoisiin, nopeisiin laskutehtäviin.

Myös yksinkertaiset fysiikan laskut sujuvat. Kokeile esimerkiksi syötettä

```
m=1000 kg v=10 m/s  kinetic energy
```

Parametriesitykset

Mathematica tarjoaa erittäin hyvät mahdollisuudet visualisoida parametriesityksiä tasossa tai avaruudessa. Nämä mahdollisuudet ovat useimmissa muissa matematiikkaohjelmissa melko heikot ainakin kolmiulotteisten parametriesitysten osalta. Wolfram|Alphan toiminnallisuus kuitenkin vastaa tältä osin Mathematicaa, ainakin melko yksinkertaisten tapausten osalta.

Luodaan aluksi lyhyt katsaus siihen, mikä on parametriesityksen idea. Esimerkiksi suora, joka kulkee pisteen $(2, -1)$ kautta ja joka on vektorin $\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$ suuntainen, voidaan esittää parametriesityksenä

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= -1 + 4t, \end{aligned}$$

missä parametri t saa kaikki reaaliarvot. Kaikki pisteet, joiden koordinaatit saadaan tästä jollakin parametrin t arvolla, ovat suoralla. Esimerkiksi pistettä $(4, 7)$ vastaa parametrin arvo 2. Wolfram|Alphalla tämä suora voidaan piirtää käskyllä

```
parametricplot 2+t , -1+4t
```

Ympyrän parametriesityksessä parametrilla t on hyvin havainnollinen geometrinen tulkinta: kulma. Tunnetustihan kulman kosini on ympyrän kehäpisteen x-koordinaatti ja sini on y-koordinaatti, joten yksikköympyrän kehä koostuu pisteistä $(\cos t, \sin t)$. Jos ympyrän keskipiste on esimerkiksi $(-1, 3)$ ja säde 4, voidaan ympyrä piirtää käskyllä

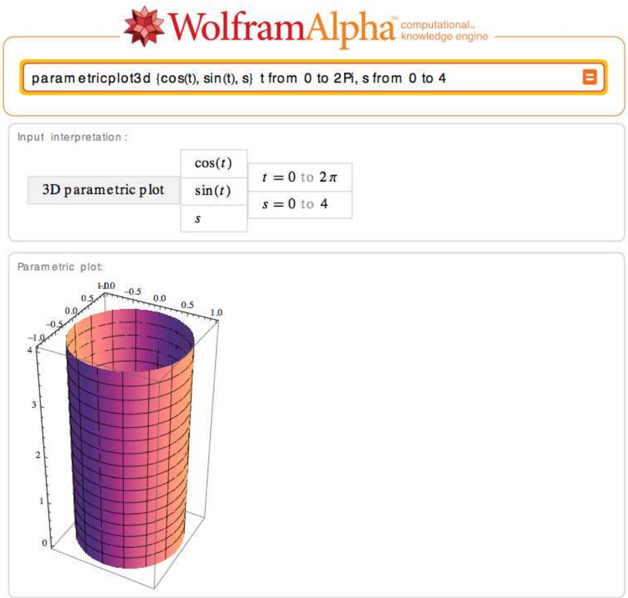
```
parametricplot -1+4cos(t), 3+4sin(t)
```

Wolfram|Alpha osaa itse määrittää sopivan vaihteluvälin parametrille, kaikki kulman arvot välillä $[0, 2\pi]$. Sen voi myös määrittää itse: kokeile lisätä edellisen käskyn perään ”`t from 0 to 2Pi/3`”. Kuinka kuva muuttuu?

Kolmiulotteisia parametriesityksiä voi visualisoida käskyllä parametricplot3d. Edellisten kaksiulotteisten esitysten pohjalta saadaan mielenkiintoisia kolmiulotteisia esimerkkejä, kun lisätään kolmas koordinaatti z. Esimerkiksi korkkiruuvi:

```
parametricplot3d {cos(t), sin(t), 0.1t}
t from 0 to 30
```

Aaltosulut eivät ole välttämättömät, mutta ne helpottavat käskyn lukemista. Kokeile muuttaa lukuja 0,1 ja 30 ja mieti, mikä niiden merkitys on.



Käyttämällä yhtä parametria saadaan käyriä. Sen sijaan pinnat avaruudessa vaativat kaksi parametria. Esimerkiksi lieriön vaipan voi ajatella muodostuvan päällekkäin pinotuista ympyröistä, ja kulman lisäksi tarvitaan z-koordinaattia vastaava parametri, joka on tässä esimerkissä s:

```
parametricplot3d {cos(t), sin(t), s}
t from 0 to 2Pi, s from 0 to 4
```

Mieti, kuinka saat piirrettyä kartion. Se onnistuu muokkaamalla hiukan lieriön parametriesitystä.

Loppukevennys ja vertailua Googleen

Jo todettujen Wolfram|Alphan puutteiden vuoksi – mm. se, että tuloksia ei voi tallentaa muuttujiin jatkotyöskentelyä varten – ei Wolfram|Alphaa ja varsinaisia matematiikkaohjelmia voine pitää toistensa kilpailijoina. Niiden pääasialliset käyttötarkoitukset ovat erilaisia.

Kuvaajien piirron osalta Wolfram|Alphan kenties merkittävin kilpailija on – ehkä hiukan yllättäen, tai sitten ei – Google. Parin kuukauden ajan Google-hakujen yhteydessä on toiminut uusi ominaisuus, joka piirtää kuvaajia matemaattisista lausekkeista. Parametriesityksiin se ei ilmeisesti vielä pysty, mutta lukija voi syöttää seuraavan sekä Googleen että Wolfram|Alphaan ja arvioida, kumpi tuottaa kauniimman lopputuloksen (ja mistä ero tuloksissa johtuu):

```
(sqrt(cos(x))*cos(200*x)+sqrt(abs(x))-0.7)
*(4-x*x)^0.01, sqrt(9-x^2), -sqrt(9-x^2)
from -4.5 to 4.5
```

Lähteitä ja muita linkkejä

http://www.wolframalpha.com

http://matta.hut.fi/matta3/WA/ (Simo K. Kivelän Wolfram|Alpha –opas)

http://education.wolfram.com/index.html.en (Wolfram Education Portal – mm. tietoa siitä, kuinka Wolfram|Alphalla voi tehdä widgettejä)

http://insidesearch.blogspot.com/2011/12/showing-some-love-to-math-lovers.html