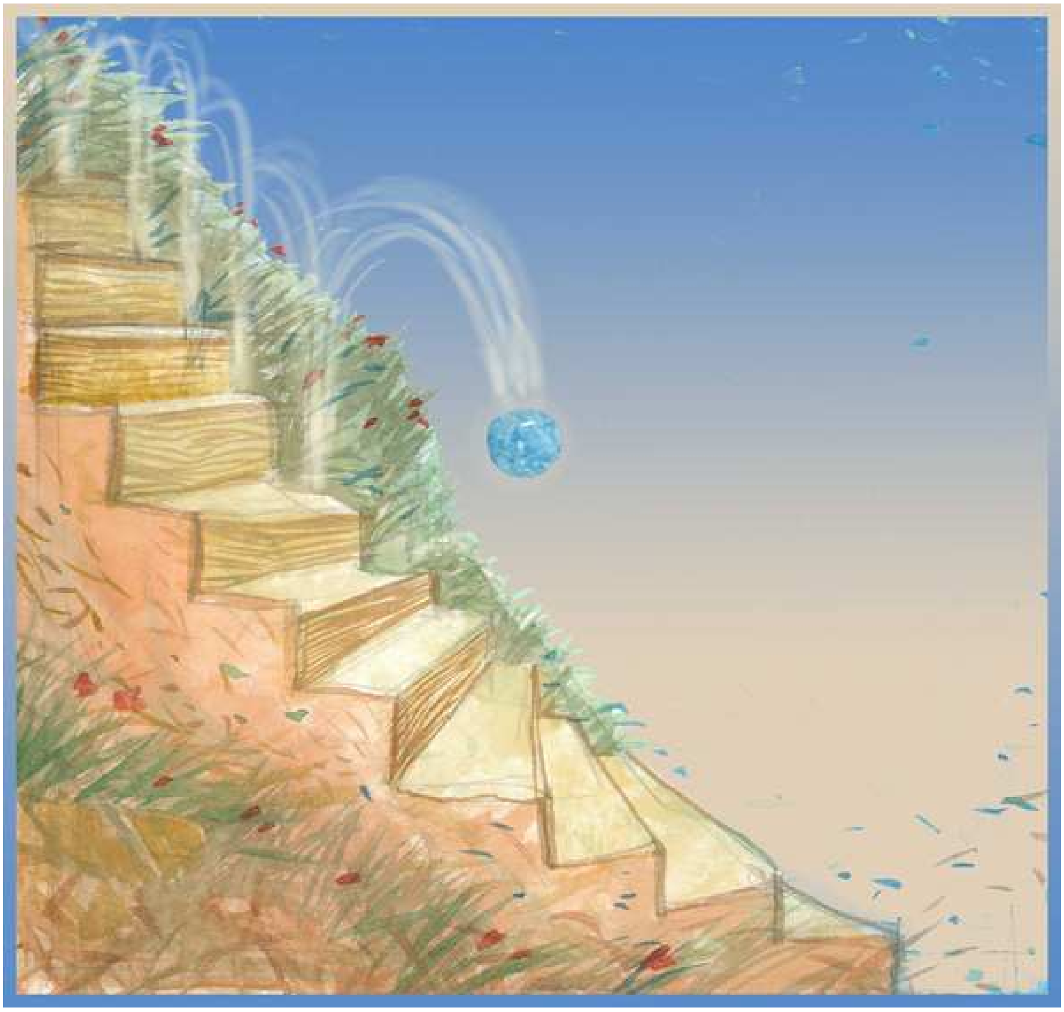
Solmu

Matematiikkalehti
3/2011

http://solmu.math.helsinki.fi



Solmu 3/2011

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

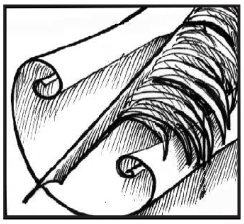
http://solmu.math.helsinki.fi

Numeroon 1/2012 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 15.1.2012 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys



Matematiikka – ajatonta ja ajassa

Tieteeseen nimensä mukaisesti keskittyvän aikakauslehden toimittaja oli hiljattain pahoittanut mielensä lukion fysiikan oppikirjoista. Hän oli selaillut niitä tunnetun fyysikon kanssa. Molemmat paheksuvat sitä, että sisältö oli enimmäkseen ainakin sata vuotta vanhaa tietoa. Moderni fysiikka, kvantit, kvarkit ja suhteellisuusteoriakin loistivat lähinnä poissaolollaan. Voimatasapainosta voi olla hyötyä siltojen rakentamisessa, mutta fysiikassa sellaisten miettiminen on peräti menneiden talvien lumia. En osaa sanoa, ovatko toimittaja ja fyysikko oikeassa, mutta Oulun syysmyrskyssä huojuvia puita katsellessa kyllä tuli mieleen liikkuvan ilman painevaikutus ja voiman momentti.

Toimittaja ei ollut ottanut hampaisiinsa matematiikkaa. Tulos olisi ollut varmaan vielä järkyttävämpi. Melkein kaikki peruskoulun ja lukion matematiikka on käytännössä ikivanhaa. Pythagoraan lauseen ikä lienee 4000 vuotta ja differentiaali- ja integraalilaskenta alkoi olla nykyisenkaltaista 1700-luvulla. Vain modernit laskulaitteet ovat tulleet kuvaan viimeisten 40 vuoden aikana. Onko näin vanhojen asioiden opettamisessa ja opettelussa mitään mieltä?

Onpa vainkin. Matematiikka on erityisasemassa kaiken inhimillisen tiedon joukossa. Se ei ole kokemusperäistä tietoa samalla tavoin kuin arkitietomme tai fysiikankin tieto. Jos $P(x)$ on polynomi ja $P(x_0) = 0$, niin $x - x_0$ on $P(x)$:n tekijä. Näin ei ole siksi, että valtava määrä havaintoja antaa aiheen olettaa näin. Ei myöskään siksi, että kansanäänestys, diktaattori tai sosiaalinen media olisi näin päättänyt ja ilmoittanut, vaan siksi, että algebran järjestelmä kerta kaikkiaan on sellainen, että muu ei ole mahdollista. Pythagoraan lausetta ei tule koskaan horjuttamaan mikään uusi havainto tai katsantotapa. Se on tosi, koska se voidaan aukotta johtaa niistä peruslähtökohdista, jotka ovat tavallisen geometrian pohjana. Tästä ikuisesta totuudesta maksetaan kuitenkin hinta. Emme voi olla varmoja siitä, onko jokaisen oikean maailman jokaisen oikean kolmen pisteen A, B ja C kohdalla totta se, että $\angle ABC$ on suora jos ja vain jos $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Pythagoraan lause on tosi siinä matemaattisessa maailmassa, joka mallintaa suorakulmaisen kolmion. Reaalimaailmassa joudutaan kysymään, mitä oikeastaan ovat suora kulma ja pisteiden välinen etäisyys, ja näihin kysymyksiin voidaan saada erilaisia vastauksia.

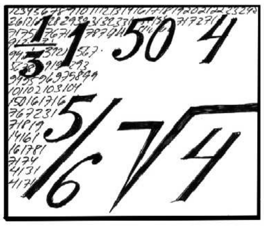
Mutta miksi matematiikkaa kannattaa oppia? Eikö kyse ole vähän samasta asiasta kuin pelien yhdentekevä virtuaalimaailma? Kysymyksiin voidaan vastata eri tavoin. Yksi päivänselvä vastaus on matematiikan käyttökelpoisuus. Vaikka matematiikka toimisi omassa maailmassaan, se on niin totta, että aina, kun sen avulla mallinnetaan todellisuutta ja muutetaan reaalimaailman ongelma matematiikan ongelmaksi, ratkaisu toimii – tietysti siinä määrin kuin malli ja todellisuus vastaavat toisiaan tarpeeksi hyvin. Tämä ei ole matemaattinen totuus, vaan empiirinen. Ilman matematiikkaa olisimme kovin paljon tietämättömämpiä, vaikkapa niistä modernin fysiikan ilmiöistä. Mutta mielestäni on syvempiä ja hienompiakin syitä oppia matematiikkaa kuin matematiikan moninainen käyttökelpoisuus. Vertasin äsken matematiikkaa peliin. Peli voi olla äärimmäisen kiehtovaa ja mukanaan vievää. Matematiikassa on peliin verrattuna se lisäetu, että matematiikka on

Pääkirjoitus

totta. Kaiken muuttuvaisen keskellä on hienoa tietää, että on asia, joka ei muutu eikä petä. Ja opettelemalla matematiikkaa saa haltuunsa sen metodin, jolla itse voi vakuuttua siitä, mikä on totta, mikä ei.

Vaikka tämä metodi oikeastaan toimii täysin vain siinä matematiikan omassa maailmassa, ei matematiikassa opituista täsmällisistä ajattelutavoista arkimaailmassakaan haittaa ole. Erään sanomalehden verkkosivujen keskustelupalstalla esitettiin käsitys, että matemaatikot ovat ”itseensä käpertyneitä, rautakankimaisia ihmisiä”. Kirjoittajaa ei selvästikään matemaattinen täsmällisyys ollut syvältä koskettanut: rautakanki ei käperry.

Matti Lehtinen



Algebran peruslause lukiolaisille

Tuomas Hytönen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Johdanto

Algebran peruslauseena tunnetaan seuraava tulos:

Lause 1. *Olkoon* $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ *polynomi, jonka kertoimet ovat kompleksilukuja* $a_i \in \mathbb{C}$*, ja jonka aste on* $n \geq 1$*, siis* $a_n \neq 0$*. Tällöin polynomilla* p *on ainakin yksi kompleksinen nollakohta, eli on olemassa sellainen* $z_0 \in \mathbb{C}$*, että* $p(z_0) = 0$*.*

Nimi luo liiankin mahtipontisen kuvan lauseen asemasta algebrassa alan koko nykyisessä laajuudessa, mutta joka tapauksessa tämä on kiistatta keskeinen polynomeja koskeva tulos. Algebran peruslauseen todistuksesta annetaan usein[1] kunnia C. F. Gaussille (1799), mutta ilmeisesti[2] sille julkaisi ensimmäisen nykykriteerein täydellisen todistuksen vasta J.-R. Argand vuonna 1806, kun taas Gaussin ja useiden muiden matemaatikoiden varhaisemmat todistusyritykset vielä sisälsivät aukkoja. Oma tarmoni ei ole riittänyt näiden väitteiden tarkistamiseen alkuperäislähteistä.

Nyky-Suomessa algebran peruslause kuuluu yliopistomatematiikan perusopintoihin, ja usein se esitetään seurauksena yleisemmistä kompleksimuuttujan funktioiden teorian tuloksista. Kuitenkin tämä keskeinen lause on mahdollista todistaa selvästi kevyemmälläkin koneistolla, jonka pitäisi avautua jo lukiopohjalta, kompleksilukujen perustiedoilla täydennettynä. Esitän tässä algebran peruslauseelle tällaisen helpohkon todistuksen, jossa kompleksilukujen alkeiden (peruslaskutoimitukset, itseisarvo ja napakoordinaattiesitys) ja raja-arvojen käsittelyn lisäksi tarvitaan ainoastaan seuraava yksittäinen differentiaali- ja integraalilaskennan tulos:

Lause 2. *Olkoon* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ *kompleksitason suljettu kiekko ja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jatkuva reaaliarvoinen funktio. Tällöin funktiolla* f *on kiekolla* D *minimikohta, eli on olemassa sellainen* $z_0 \in D$*, että* $f(z_0) \leq f(z)$ *kaikilla* $z \in D$*.*

Lukion differentiaali- ja integraalilaskennassa käsitellään ilman todistusta tämän lauseen yksiulotteinen vastine, jossa suljetun kiekon paikalla on reaaliakselin suljettu väli $[a,b]$. Samoin tässä esityksessä lause 2 otetaan käyttöön ilman todistusta.

Todistus

Esitettävä todistus jakautuu kahteen pääkohtaan:

1. Osoitetaan, että polynomin itseisarvo $|p(z)|$ saavuttaa jossakin pisteessä miniminsä koko kompleksitasossa, ts. on olemassa sellainen $z_0 \in \mathbb{C}$, että $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

[1]Esim. suomenkielisessä Wikipediassa, ladattu 1.6.2011.

[2]Mm. englannin- ja saksankielisen Wikipedian perusteella, ladattu 1.6.2011.

2. Osoitetaan, että tällaisessa minimikohdassa polynomin arvo on välttämättä $p(z_0) = 0$.

Kumpikin kohta käyttää hyväkseen polynomien erityisominaisuuksia yleisempiin funktioihin nähden: esimerkiksi jatkuvalla funktiolla $z \mapsto (1+|z|)^{-1}$ ei ole lainkaan minimiä kompleksilukujen joukossa (se tulee mielivaltaisen lähelle nollaa, mutta ei saavuta tätä arvoa), kun taas myös jatkuva funktio $z \mapsto 1 + |z|$ kylläkin saavuttaa miniminsä pisteessä $z_0 = 0$, mutta funktion arvo tässä pisteessä on 1 eikä 0. Jatkossa polynomia p koskevat oletukset ovat aina samat kuin lauseessa 1 ilman eri mainintaa.

Minimi on olemassa

Lemma 1. *Kun $|z| \to \infty$, myös $|p(z)| \to \infty$.*

Todistus. Kirjoitetaan polynomin itseisarvo muotoon

$$\begin{aligned}|p(z)| &= \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big| = \Big|a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\Big| \\ &= |a_n| \cdot |z|^n \cdot \Big|1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\Big|.\end{aligned}$$

Kun $|z| \to \infty$, myös $|z|^n \to \infty$, ja toisaalta $z^{k-n} \to 0$ kaikilla $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Tästä seuraa, että viimeinen tulontekijä oikealla lähestyy ykköstä, kun $|z| \to \infty$. Siis

$$\begin{aligned}&\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| \\ &= |a_n| \cdot \lim_{|z|\to\infty} |z|^n \cdot \lim_{|z|\to\infty} \Big|1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\Big| \\ &= |a_n| \cdot \infty \cdot 1 = \infty.\end{aligned}$$

□

Lemma 2. *Polynomin itseisarvo $|p(z)|$ saavuttaa miniminsä kompleksitasossa.*

Todistus. Koska $|p(z)| \to \infty$ kun $|z| \to \infty$, pätee erityisesti, että on olemassa sellainen luku R, että $|p(z)| > |p(0)|$ aina kun $|z| > R$ (raja-arvon määritelmä!). Tarkastellaan sitten suljettua kiekkoa $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Koska $z \mapsto |p(z)|$ on jatkuva reaaliarvoinen funktio, se saavuttaa tässä suljetussa kiekossa miniminsä jossakin pisteessä z_0. Nyt siis $|p(z_0)| \leq |p(z)|$, kun $|z| \leq R$, ja erityisesti $|p(z_0)| \leq |p(0)|$. Toisaalta luvun R valinnan perusteella pätee $|p(z_0)| \leq |p(0)| < |p(z)|$, kun $|z| > R$. Edelliset havainnot yhdistämällä nähdään, että $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. □

Minimi on nolla

Lemma 3. *Olkoon z_0 funktion $z \mapsto |p(z)|$ minimikohta kompleksitasossa. Tällöin $p(z_0) = 0$.*

Todistus. Määritellään uusi apupolynomi

$$q(z) = p(z + z_0).$$

Tällöin 0 on funktion $z \mapsto |q(z)|$ minimikohta, ja lemman väite on yhtäpitävä sille, että $q(0) = 0$. Kirjoitetaan nyt $q(z)$ auki seuraavasti:

$$q(z) = b_0 + \sum_{j=r}^{n} b_k z^k,$$

missä $r \in \{1,\ldots,n\}$ ja $b_r \neq 0$. Tässä esityksessä on otettu huomioon se, että osa polynomin alkupään kertoimista, $b_1,\ldots,b_{r-1}$ voi olla nollia, ja ne on jätetty kirjoittamatta. Toisaalta havaitaan (harjoitustehtävä!), että polynomien p ja q johtokertoimet ovat samat, eli $b_n = a_n \neq 0$. Siis ainakin yksi kertoimista $b_1,\ldots,b_n$ on nollasta poikkeava, ja merkitään ensimmäisen tällaisen kertoimen järjestyslukua kirjaimella r.

Koska $q(0) = b_0$, on siis lemman väite yhtäpitävä sille, että $b_0 = 0$. Tehdään *vastaoletus*, että $b_0 \neq 0$, ja osoitetaan, että tämä johtaa mahdottomuuteen; siis $b_0 = 0$ on ainoa mahdollisuus. Mahdottomuus syntyy siten, että etsitään toinen kompleksitason piste z, jossa $|q(z)|$ saakin vielä pienemmän arvon kuin $|q(0)|$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että 0 oli polynomin q minimikohta.

Tarkastellaan ensin katkaistua apupolynomia $\tilde{q}(z) = b_0 + b_r z^r$, ja havaitaan, että tälle osataan ratkaista nollakohta. Nimittäin $\tilde{q}(z) = 0$ on yhtäpitävä sille, että $z^r = -b_0/b_r$, ja esittämällä kompleksiluku $-b_0/b_r$ napakoordinaateissa $-b_0/b_r = te^{i\phi}$ nähdään, että $z_1 = \sqrt[r]{t}\, e^{i\phi/r}$ on eräs ratkaisu. (Yhteensä ratkaisuita on täsmälleen r kappaletta. Mitkä ne ovat?)

Tarkastellaan nyt koko polynomia $q(z)$ pisteessä $z = sz_1$, missä $s \in\,]0,1[$ on pieni positiivinen reaaliluku. Saadaan

$$\begin{aligned}&|q(sz_1)| \\ &= \Big|b_0 + b_r s^r z_1^r + \sum_{k=r+1}^{n} b_k s^k z_1^k\Big| \\ &= \Big|(1-s^r)b_0 + s^r(b_0 + b_r z_1^r) + s^r \sum_{k=r+1}^{n} b_k s^{k-r} z_1^k\Big| \\ &\leq (1-s^r)|b_0| + 0 + s^r \sum_{k=r+1}^{n} |b_k| s^{k-r} |z_1|^k.\end{aligned}$$

Kun $s \to 0$, myös $s^{k-r} \to 0$ kaikilla $k \in \{r+1,\ldots,n\}$, ja siis viimeinen summa lähestyy nollaa. Erityisesti voidaan valita jokin pieni positiivinen s_1 niin, että tämän loppusumman arvo kohdassa $s = s_1$ on korkeintaan $\frac{1}{2}|b_0|$. Tällöin siis

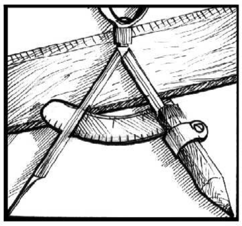
$$\begin{aligned} |q(s_1 z_1)| &\leq (1 - s_1^r)|b_0| + s_1^r \cdot \frac{1}{2}|b_0| \\ &= (1 - \frac{1}{2}s_1^r)|b_0| < |b_0| = |q(0)|, \end{aligned}$$

ja tämä on haettu ristiriita vastaoletukselle, että $|q(0)| = |b_0| > 0$, sillä $|q(0)|$ oli oletuksen perusteella polynomin q pienin arvo. Siis vastaoletuksen täytyy olla väärä, ja täten $q(0) = 0$, mikä oli todistettava. □

Lopuksi

Algebran peruslause nojaa oleellisesti kompleksilukujen ominaisuuksiin. Vastaava väite reaaliluvuille ei pidä paikkaansa: reaalikertoimisella polynomilla ei tarvitse olla reaalista nollakohtaa, kuten helppo esimerkki $p(x) = x^2 + 1$ osoittaa. Kompleksilukuihin päädytään luonnostaan, kun määritellään tälle polynomille kuvitteelinen nollakohta i reaalilukujen joukon ulkopuolelta ja tarkastellaan laajennettua lukukuntaa $\mathbb{C} = \{a + ib : a,b \in \mathbb{R}\}$. Algebran peruslause siis kertoo sen yllättävän tuloksen, että täydentämällä reaalilukuja tämän yhden polynomin nollakohdilla, saadaan samalla kaikkien muidenkin polynomien nollakohdat.

Mutta missä kohtaa todistusta sitten käytettiin kompleksilukujen erityisominaisuuksia reaalilukuihin nähden? Suurin osa yllä olevasta todistuksesta toimisi yhtä hyvin reaalilukujen joukossa. Ratkaiseva kohta oli nollakohdan hakeminen apupolynomille $\tilde{q}(z) = b_0 + b_r z^r$. Oleellista oli se, että jokaisella kompleksiluvulla on r:s juuri kompleksilukujen joukossa, mutta reaaliluvuilla tämä ominaisuus horjuu jo neliöjuuren kohdalla.



Orsivaakoja, tuulimyllyjä ja peilauksia – vuoden 2011 koululaisten matematiikkaolympialaiset Amsterdamissa

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Johdanto

Tämän vuoden matematiikkaolympialaisista muistetaan tuulimyllyt. Nämä tuulimyllyt eivät ole mitään reaalisia hollantilaisia lajinsa edustajia (vaikka ehkäpä nekin muistetaan), vaan tasossa pisteitä läpikäyviä prosesseja, joita tarkastellaan ensimmäisen päivän toisessa tehtävässä.

Olen nyt kuitenkin kiiruhtamassa asioiden edelle, joten aloitetaanpa alusta. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset järjestettiin 12.-24.7.2011 Amsterdamissa, Alankomaissa. Aluksi paikalla olivat vain joukkueiden johtajat, jotka olivat huippusalaisessa paikassa Eindhovenin lähellä valitsemassa tehtäviä. Muutamaa päivää myöhemmin kilpailijat saapuivat Amsterdamiin ja pääsivät töihin ratkomaan tehtäviä.

Tämän vuoden erikoisuutena voidaan pitää vain yhtä klassisen geometrian tehtävää (vaikkakin edellä mainitut tuulimyllyt olivatkin kombinatorista geometriaa). Viimeksi matematiikkaolympialaisissa on ollut vain yksi geometrian tehtävä liki kaksikymmentä vuotta sitten. Triviaali ei päätös tänä vuonna ollut: Kun viisi tehtävää kuudesta oli valittu, oli joukossa yksi geometrian tehtävä. Viimeisenä valittiin toista keskitason tehtävää, ja vastakkain olivat klassisen geometrian edustaja ja tuulimyllyt. Tuulimyllyt voittivat äänin 47-46 (allekirjoittanut voi myöntää menettäneensä jo toivonsa, koska geometrialla tuntui olevan valtaisasti kannattajia aikaisemmissa äänestyksissä). En voi väittää, että tuulimyllytehtävä olisi oma suosikkini ollut, ja äänestinkin sitä lähinnä äänestääkseni geometriaa vastaan, mutta tässä minun on myönnettävä virhearvioni: tehtävä oli erittäin onnistunut ja ratkaisu uskomattoman kaunis.

Muista tehtävistä todettakoon, että geometrian tehtävä on hirvittävän hankala (ja oikeutetusti toisen päivän viimeisen tehtävän paikalla). Algebraa oli tänä vuonna kahden tehtävän verran, joskin monet väittävät toista algebran tehtävää lukuteorian alaan kuuluvaksi. Rehellisesti lukuteorian listalta on valittu yksi tehtävä. Kaiken kaikkiaan tehtävät eivät vaadi erityisen järeää lukuteorian tai algebran kalustoa. Geometria sen sijaan vaatii todellista asiantuntemusta. Kombinatoriikan tehtävät vaativat tyypilliseen tapaan suhteellisen kevyttä teoriaa, mutta huomattavaa kekseliäisyyttä.

Suomea edustivat kilpailussa Olli Hirviniemi, Jesse Jääsaari, Ilmari Kangasniemi, Dimitri Kirichenko, Olli Teräväinen ja Felix Vaura. Olli Hirviniemi sai hopeaa sekä Kangasniemi, Kirichenko ja Vaura saivat kunniamaininnan. Joukkuetta johti FT Anne-Maria Ernvall-Hytönen ja varajohtajana oli FM Esa Vesalainen.

Viimeisinä sanoina ennen tehtäviin ja ratkaisuihin siirtymistä: Jos tähän astinen hehkutus ei ole vielä vakuuttanut tuulimyllyjen kauneudesta, ja jos et koko tehtävälistaa aio lukea läpi, vilkaise edes ensimmäisen päivän toinen tehtävä ratkaisuineen.

Tehtävät

Ensimmäinen päivä

Tehtävä 1. Olkoon $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ neljästä erisuuresta positiivisesta kokonaisluvusta koostuva joukko, jonka alkioiden summasta $a_1+a_2+a_3+a_4$ käytetään merkintää s_A. Olkoon n_A niiden parien (i, j) lukumäärä, joilla $1 \leq i < j \leq 4$ ja $a_i + a_j$ jakaa luvun s_A. Etsi kaikki sellaiset neljän erisuuren positiivisen kokonaisluvun joukot A, jotka saavuttavat suurimman mahdollisen arvon n_A.

Tehtävä 2. Olkoon $\mathcal{S}$ vähintään kahdesta pisteestä koostuva äärellinen joukko tasossa. Oletetaan, että mitkään kolme joukon $\mathcal{S}$ pistettä eivät ole samalla suoralla. Kutsutaan *tuulimyllyksi* prosessia, joka alkaa suoralla ℓ, joka kulkee yksittäisen pisteen $P \in \mathcal{S}$ kautta. Suora pyörii myötäpäivään *kierron keskipisteen* P ympäri kunnes se törmää johonkin toiseen joukkoon $\mathcal{S}$ kuuluvaan pisteeseen. Nyt tämä piste Q alkaa toimia kierron keskipisteenä, ja suora pyörii myötäpäivään pisteen Q ympäri kunnes se törmää jälleen joukon $\mathcal{S}$ pisteeseen. Tämä prosessi jatkuu loputtomasti.

Osoita, että voidaan valita sellainen $P \in \mathcal{S}$ ja pisteen P kautta kulkeva suora ℓ, että näistä aloitettu tuulimylly käyttää jokaista joukon $\mathcal{S}$ pistettä kierron keskipisteenä äärettömän monta kertaa.

Tehtävä 3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty reaalilukujen joukossa ja joka toteuttaa ehdon

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y. Osoita, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \leq 0$.

Toinen päivä

Tehtävä 4. Olkoon $n > 0$ kokonaisluku. Käytössämme on orsivaaka ja n painoa, joiden painot ovat 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Meidän tulee asettaa painot yksitellen vaa'alle siten, että oikea vaakakuppi ei ole koskaan painavampi kuin vasen vaakakuppi. Joka vaiheessa valitaan yksi jäljellä olevista painoista ja asetetaan se joko vasempaan tai oikeaan vaakakuppiin, kunnes kaikki painot ovat vaa'alla.

Määritä kuinka monella tapaa tämä voidaan tehdä.

Tehtävä 5. Olkoon f funktio kokonaislukujen joukolta positiivisten kokonaislukujen joukkoon. Oletetaan, että millä tahansa kahdella kokonaisluvulla m ja n erotus $f(m) - f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m - n)$. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla m ja n, joilla $f(m) \leq f(n)$, pätee, että $f(n)$ on jaollinen luvulla $f(m)$.

Tehtävä 6. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka ympäri piirretty ympyrä on Γ. Olkoon suora ℓ ympyrän Γ tangentti, ja olkoot ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c suorat, jotka on saatu peilaamalla suora ℓ suorien BC, CA ja AB suhteen tässä järjestyksessä. Osoita, että suorien ℓ_a, ℓ_b ja ℓ_c määrittelemän kolmion ympäri piirretty ympyrä sivuaa ympyrää Γ.

Ratkaisut

Ensimmäinen päivä

Ratkaisu 1. Osoitetaan ensimmäiseksi, että $n_A \leq 4$. Voidaan olettaa, että $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Yhteensä pareja joukossa on $\binom{4}{2} = 6$ kappaletta. Kun $i \neq j$, huomataan, että $a_i + a_j$ jakaa luvun s_A jos ja vain jos $a_i + a_j$ jakaa luvun $s_A - a_i - a_j = a_k + a_\ell$, missä a_k ja a_ℓ ovat toiset joukon A alkiot. Koska $a_1 + a_2 < a_3 + a_4$, ei voi olla, että $a_3 + a_4 | a_1 + a_2$, eikä myöskään $a_2 + a_4 | a_1 + a_3$. Täten on todistettu, että $n_A \leq 4$. Osoitetaan nyt, että tämä on mahdollista.

Jos $n_A = 4$, niin

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &| a_3 + a_4 \qquad & a_1 + a_3 &| a_2 + a_4 \\ a_1 + a_4 &| a_2 + a_3 \qquad & a_2 + a_3 &| a_1 + a_4. \end{aligned}$$

Jälkimmäisen rivin relaatioiden perusteella $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$. Kirjoitetaan nyt $u = a_1 + a_2$ ja $v = a_1 + a_3$. Näiden molempien lukujen on oltava luvun $s_A = 2(a_2 + a_3) = 2(v + u - 2a_1)$ jakajia. Täten $u | 2(v - 2a_1)$. Koska $u > v$, on varmasti $u > v - 2a_1$ (huomioitava, että $v - 2a_1 > 0$). Täten $u = 2(v - 2a_1)$. Toisaalta, luvun v on jaettava luku $2(u - 2a_1) = 2(2(v - 2a_1) - 2a_1) = 4v - 12a_1$, joten $v | 12a_1$. Koska $v < u = 2v - 4a_1$, saadaan $v > 4a_1$. Yhdistäen tämä epäyhtälö relaatioon $v | 12a_1$ saadaan $v = 6a_1$ tai $v = 12a_1$. Laskemalla läpi nämä kaksi tapausta saadaan ratkaisujoukot $A = \{a_1, 5a_1, 7a_1, 11a_1\}$ ja $A = \{a_1, 11a_1, 19a_1, 29a_1\}$, jotka molemmat toteuttavat tehtävän ehdot, ja jotka ovat ainoat ehdot toteuttavat joukot.

Ratkaisu 2. Erotellaksemme suoran eri puolilla olevat pisteet kutsumme suoran puolia oranssiksi ja siniseksi. Huomataan, että kun kierron keskipiste vaihtuu jostakin pisteestä T johonkin toiseen pisteeseen U, on piste T tämän jälkeen samalla puolella suoraa kuin U oli ennen kierron keskipisteeksi siirtymistään (epäluuloinen lukija voi piirtää kuvan tilanteesta). Täten pisteiden määrä oranssilla ja sinisellä puolella ei muutu, vaan pysyy vakiona koko prosessin ajan niitä hetkiä huomioimatta, jolloin kierron keskipiste on juuri vaihtumassa, ja suora hetkellisesti sisältää kaksi pistettä. Tehdään loppu todistuksesta kahtena erikoistapauksena, riippuen siitä, onko joukossa parillinen vai pariton määrä pisteitä. Aloitetaan parittomasta tilanteesta. Nyt $|\mathcal{S}| = 2n+1$. Olkoon ℓ mikä tahansa suora, joka jakaa joukon $\mathcal{S}$ kahteen yhtäsuureen osaan. Kunhan suoran ℓ suunta on annettu, on suora yksikäsitteinen, ja menee jonkin pisteen $T \in \mathcal{S}$ kautta. Tarkastellaan tästä pisteestä alkavaa tuulimyllyä. Kun suora on tehnyt $180°$ käännöksen, on se palannut lähtöpisteeseensä, mutta suoran molemmilla puolilla olevat pisteet ovat vaihtaneet väriä. Koska suoran puolelta toiselle ei voi siirtyä (eli väriä ei voi vaihtaa) toimimatta kierron keskipisteenä, ovat ilmeisesti kaikki pisteet toimineet kertaalleen kierron keskipisteenä. Koska prosessi jatkuu eteenpäin samalla tavalla kuin tähänkin saakka, tämä todistaa väitteen.

Siirrytään nyt parilliseen tilanteeseen, eli $|\mathcal{S}| = 2n$. Tarkastellaan suoraa, joka jakaa joukon osiin, joiden koot ovat n ja $n-1$, ja joka kulkee jonkin pisteen T kautta. Tästä pisteestä lähtenyt tuulimylly kulkee jonkin pisteen R kautta tehtyään $180°$ käännöksen, ja kaikki muut pisteet, paitsi R ja T, ovat vaihtaneet väriä. Täten tuulimylly on kulkenut kaikkien pisteiden läpi. (Seuraavan $180°$ käännöksen jälkeen se kulkee jälleen pisteen T kautta, ja alkaa täten alusta. Näin jälleen saadaan tuulimylly kulkemaan äärettömän monta kertaa kaikkien pisteiden kautta.)

Ratkaisu 3. Kirjoitetaan $a = f(0)$, ja sijoitetaan $x = 0$ tehtävänannon epäyhtälöön. Tästä saadaan $f(y) \leq ay + f(a)$ kaikilla reaaliluvuilla y. Sijoittamalla $y = a - x$ tehtävänannon epäyhtälöön ja käyttämällä jo saatua epäyhtälöä todetaan, että

$$\begin{aligned} f(a) &\leq (a-x)f(x) + f(f(x)) \\ &\leq (a-x)f(x) + af(x) + f(a), \end{aligned}$$

ja täten

$$0 \leq (2a - x)f(x).$$

Ennen kaikkea, jos $x < 2a$, niin $f(x) \geq 0$.

Oletetaan, että $f(x) > 0$ jollakin x. Siinä tapauksessa tehtävänannon epäyhtälön oikea puoli $\to -\infty$, kun $y \to -\infty$, mutta tämä ei ole mahdollista, sillä $f(x) \geq 0$ riittävän pienillä x. Siispä, $f(x) \leq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti $f(x) = 0$, kun $x < 2a$. Lisäksi, koska funktio saa ainoastaan epäpositiivisia arvoja, saadaan tehtävänannon epäyhtälöstä

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x)) \leq yf(x). \qquad (1)$$

Osoitetaan nyt, että jos $f(a) = 0$ ja $b < a$, niin $f(b) = 0$. Tämä tehdään sijoittamalla $x = b$ ja $y = a-b$ epäyhtälöön (1), jolloin saadaan $f(b) \geq 0$, ja koska tiedettiin ennestään, että $f(b) \leq 0$, tämä tarkoittaa, että $f(b) = 0$.

Nyt olemme valmiita ratkaisun viimeiseen vaiheeseen. Edellisen vaiheen nojalla riittää osoittaa, että $f(0) = 0$. Otetaan mikä tahansa funktion f nollakohta r ja sijoitetaan $x = r$ ja $y = 0$ tehtävänannon epäyhtälöön. Tästä saadaan $f(0) \geq 0$, jolloin $f(0) = 0$.

Toinen päivä

Ratkaisu 4. Sijoittelujen lukumäärä on

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

Osoitetaan nyt tämä. Merkitään n painolla sijoittelujen lukumäärää $f(n)$. Jos $n = 1$, niin tilanne on helppo: painon on mentävä vasempaan vaakakuppiin, eli $f(1) = 1$.

Olkoon nyt $n \geq 2$. Väitetään, että

$$f(n) = (2n-1)f(n-1).$$

Huomataan, että voidaan hetkeksi unohtaa kevyin paino, koska riippumatta siitä, milloin se vaakakuppiin sijoitetaan, se ei mitenkään vaikuta muiden painojen sijoitteluun. Keskitytään nyt siis vain painoihin $2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Näiden painojen painot voidaan jakaa kahdella, koska se ei mitenkään vaikuta sijoitteluihin. Näin on siirrytty tarkastelemaan painojen $2^0, 2^1, \ldots 2^{n-2}$ sijoittelua. Nämä voidaan sijoittaa $f(n-1)$ eri tavalla.

Voidaan nyt pohdiskella (alkuperäisen) kevyimmän painon sijoittelua: Jos tämä asetetaan ensimmäisenä, se menee vasempaan vaakakuppiin. Jos se sijoitetaan missä tahansa muussa vaiheessa, voidaan se laittaa kumpaan tahansa vaakakuppiin. Vaihtoehtoja on siis $2n-1$ erilaista. Yhteensä saadaan

$$f(n) = (2n-1)f(n-1),$$

josta rekursio purkamalla saadaan (alkuehto $f(1) = 1$ huomioiden)

$$f(n) = (2n-1)!!.$$

Ratkaisu 5. Olkoot x ja y kokonaislukuja, joilla $f(x) < f(y)$. Osoitetaan, että $f(x) | f(y)$. Sijoittamalla $m = x$ ja $n = y$ tehtävänannon relaatioon saadaan

$$f(x-y) \big| \; |f(x) - f(y)| = f(y) - f(x) > 0,$$

joten $f(x-y) \leq f(y) - f(x) < f(y)$. Täten erotukselle $d = f(x) - f(x-y)$ pätee

$$-f(y) < -f(x-y) < d < f(x) < f(y).$$

Sijoittamalla $m = x$ ja $n = x - y$ tehtävänannon relaatioon saadaan $f(y)|d$, joten $d = 0$, eli $f(x) = f(x - y)$. Valitsemalla $m = x$ ja $n = y$ tehtävänannon relaatiossa saadaan

$$f(x) = f(x - y)|f(x) - f(y),$$

joten $f(x)|f(y)$.

Ratkaisu 6. Käytetään kirjainta T merkitsemään sitä pistettä, jossa suora ℓ sivuaa ympyrää Γ. Olkoon $A' = \ell_b \cap \ell_c$, $B' = \ell_a \cap \ell_c$ ja $C' = \ell_a \cap \ell_b$. Valitaan piste A'' ympyrällä Γ siten, että $TA = AA''$ ($A'' \neq T$ paitsi jos TA on halkaisija). Valitaan pisteet B'' ja C'' samalla tavalla.

Koska pisteet C ja B ovat kaarien TC'' ja TB'' keskipisteet, saadaan

$$\begin{aligned} \angle(\ell,B''C'') &= \angle(\ell,TC'') + \angle(TC'',B''C'') \\ &= 2\angle(\ell,TC) + 2\angle(TC'',BC'') \\ &= 2\left(\angle(\ell,TC) + \angle(TC,BC)\right) \\ &= 2\angle(\ell,BC) \\ &= \angle(\ell,\ell_a). \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että ℓ_a ja $B''C''$ ovat yhdensuuntaisia. Vastaavasti, $\ell_b||A''C''$ ja $\ell_c||A''B''$. Siispä, joko kolmiot $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ ovat siirrokset toisistaan tai toinen on saatu toisesta kutistamalla tai venyttämällä jonkin pisteen suhteen (homotetia). Osoitetaan nyt, että jälkimmäinen vaihtoehto pätee ja että homotetian keskus K on ympyrällä Γ. Tästä seuraisi, että myös ympäri piirretyt ympyrät saataisiin homotetialla pisteen K suhteen, ja täten sivuaisivat toisiaan tässä pisteessä, kuten toivottu.

Tarvitaan seuraavat kaksi väitettä:

Väite 1. Suorien $B''C$ ja BC'' leikkauspiste X on suoralla ℓ_a.

Todistus. Itse asiassa, pisteet X ja T ovat symmetrisiä suoran BC suhteen, sillä suorat CT ja CB'' ovat symmetrisiä tämän suoran suhteen, kuten ovat myös suorat BT ja BC''.

Väite 2. Suorien BB' ja CC' leikkauspiste I on ympyrällä Γ.

Todistus. Tarkastellaan tilannetta, jossa ℓ ei ole yhdensuuntainen kolmion ABC sivujen kanssa; muut tapaukset voidaan tarkastella rajatapauksina. Olkoot $D = \ell \cap BC$, $E = \ell \cap AC$ ja $F = \ell \cap AB$.

Symmetrian vuoksi suora DB on yhden suorien $B'D$ ja FD välisen kulman puolittaja. Vastaavasti suora FB on yhden suorien $B'F$ ja DF välisen kulman puolittaja. Siispä B on joko kolmion $B'DF$ sisään piirretyn ympyrän keskipiste tai ulkokulmien ja sisäkulmien puolittajien leikkauspiste. Joka tapauksessa

$$\angle(BD,DF) + \angle(DF,FB) + \angle(B'B,B'D) = 90°,$$

joten

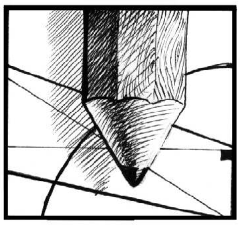
$$\begin{aligned} \angle(B'B,B'C') &= \angle(B'B,B'D) \\ &= 90° - \angle(BC,DF) - \angle(DF,BA) \\ &= 90° - \angle(BC,AB). \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan $\angle(C'C,B'C') = 90° - \angle(BC,AC)$. Täten

$$\begin{aligned} \angle(BI,CI) &= \angle(B'B,B'C') + \angle(B'C',C'C) \\ &= \angle(BC,AC) - \angle(BC,AB) \\ &= \angle(AB,AC), \end{aligned}$$

mikä tarkoittaa täsmälleen, että A,B,I,C ovat samalla ympyrällä.

Nyt voidaan saattaa todistus loppuun. Olkoon K toinen suoran $B'B''$ ja ympyrän Γ leikkauspiste. Käyttämällä Pascalin lausetta kuusikulmiolle $KB''CIBC''$ saadaan, että pisteet $B' = KB'' \cap IB$ ja $X = B''C \cap BC''$ ovat samalla suoralla suorien CI ja $C''K$ leikkauspisteen S kanssa. Siispä $S = CI \cap B'X = C'$, ja pisteet C',C'',K ovat samalla suoralla. Täten K on suorien $B'B''$ ja $C'C''$ leikkauspiste, mikä tarkoittaa, että K on sen homotetian keskus, joka kuvaa kolmion $A'B'C'$ kolmiolle $A''B''C''$, ja se kuuluu ympyrälle Γ.



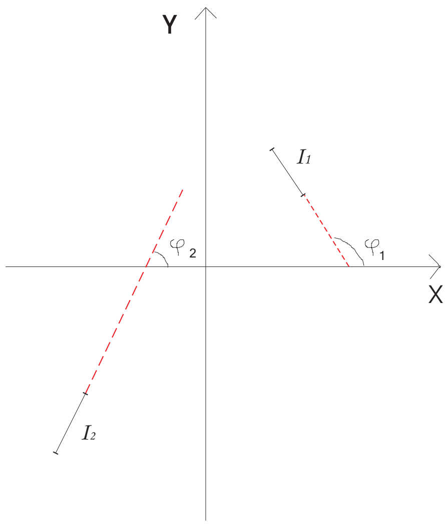
Geometrisia paradokseja: neulankääntöä ja digitaalisia aurinkokelloja

Pertti Mattila
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kakeyan ongelma ja Besicovitchin joukot

Vuonna 1917 japanilainen matemaatikko Kakeya kysyi: ”Kuinka pienessä (pinta-alaltaan) tasoalueessa neula voidaan kääntää ympäri?” Ympärikääntäminen tarkoittaa, että neulaa liikutetaan jatkuvalla liikkeellä pitäen se koko ajan kyseisessä alueessa ja lopussa se on samassa kohdassa kuin alussakin, mutta vastakkaisessa suunnassa. Neula on idealisoitu: sillä on tietty pituus, mutta ei paksuutta. Tuntuisi uskottavalta, että vastauksena olisi joku positiivinen luku, joka riippuisi neulan pituudesta. Näin ei kuitenkaan ole. Oli neulan pituus mikä tahansa, voidaan löytää pinta-alaltaan mielivaltaisen pieni alue, jossa tämä kääntäminen pystytään tekemään. Tällainen alue on kuitenkin aika monimutkainen. Esimerkiksi se ei voi olla konveksi (eli alue joka sisältää jokaisen pisteparinsa yhdistävän janan), vaan pienin haluttu konveksi alue on tasasivuinen kolmio, jonka korkeusjana on neulamme pituinen.

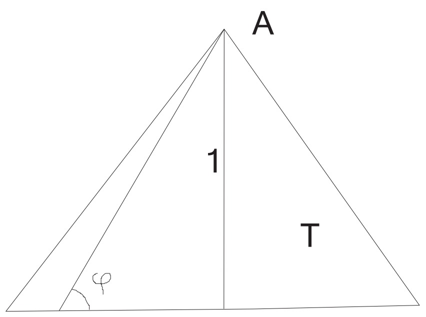
A.S. Besicovitch konstruoi vuonna 1919 yllämainitun pienialaisen alueen, jossa neula voidaan kääntää ympäri. Hänen ratkaisunsa antoi myös tasojoukon, jonka pinta-ala on nolla ja joka sisältää yksikön pituisen janan jokaisessa suunnassa. Yleisen tasojoukon pinta-ala on hieman mutkikas käsite, mutta pinta-ala nolla tarkoittaa vain, että kyseinen joukko voidaan peittää neliöillä, joiden pinta-alojen summa on mielivaltaisen pieni. Tämä oli itse asiassa se ongelma, jota Besicovitch ryhtyi ratkaisemaan, koska hän oli huomannut, että sen avulla saa selvitettyä erään integrointiin liittyvän kysymyksen. Besicovitch syntyi Venäjällä vuonna 1891, eikä vuonna 1919 ollut kuullutkaan Kakeyan ongelmasta. Yhteydet vallankumouksen jälkeisen Venäjän ja muun tieteellisen maailman välillä eivät olleet parhaat mahdolliset. Besicovitch siirtyi Kööpenhaminaan vuonna 1924 ja sieltä muutaman vuoden päästä Cambridgeen, Englantiin, jossa hän toimi kuolemaansa asti eli vuoteen 1970.



Kuva 1. Janojen I_1 ja I_2 suunnat φ_1 ja φ_2.

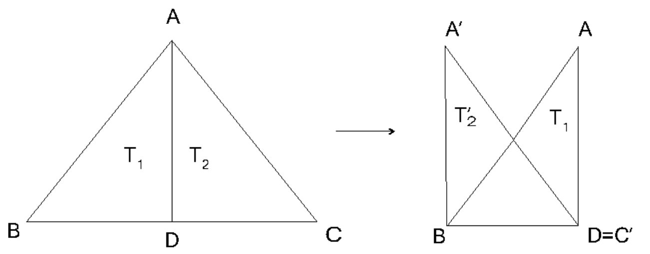
Selitän nyt lyhyesti geometriset perusideat, joilla nämä paradoksaaliset joukot saadaan konstruoitua. Pyritään ensin muodostamaan alaltaan pieni tasoalue, joka sisältää yksikön pituisen janan (neulan) kaikissa suunnissa. Janan suunnalla tarkoitan kulmaa φ, $0 \le \varphi \le \pi$, kuten kuvassa 1. Siis jos jana sijaitsee suoran $y = kx$ suuntaisella suoralla, k on kulman φ tangentti.

Lähdetään liikkeelle tasasivuisesta kolmiosta T, jonka kanta on x-akselilla, yksi kärki A positiivisella y-akselilla ja jonka korkeusjanan pituus on yksi. Selvästi T sisältää A:sta lähtevän yksikön pituisen janan kaikissa suunnissa φ, $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$, ks. kuva 2.



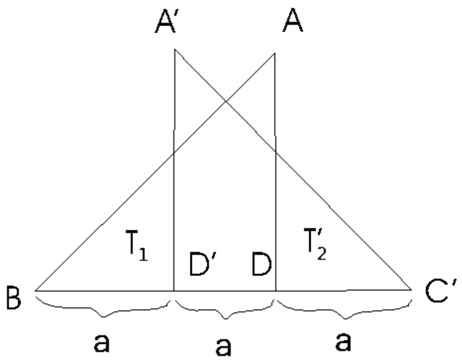
Kuva 2.

Pyritään nyt pienentämään T alueeksi, jossa emme ole menettäneet yhtään yksikköjanojen suunnista φ väliltä $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$. Jaetaan T kahteen osakolmioon T_1 ja T_2 kuvan 3 osoittamalla tavalla ja siirretään T_2:ta niin, että ne menevät osittain päällekkäin.



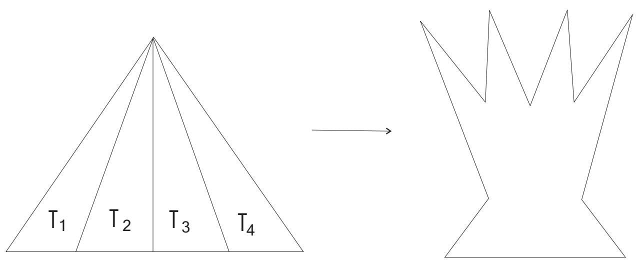
Kuva 3.

Jos T_2' on siirrolla saatu kolmio ja A' sen A:ta vastaava kärki, T_2' sisältää A':sta lähtevät yksikköjanat kaikilla suunnilla φ, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$, ja T_1 sisältää A:sta lähtevät yksikköjanat kaikilla suunnilla φ, $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Kuvassa 3 siirto on tehty niin, että T_1:n ja T_2':n kannat yhtyvät. Tällöin T:n pinta-ala $\frac{1}{\sqrt{3}}$ on pienentynyt alaksi $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$. Parempi tulos saadaan, jos kannat siirretään vain osittain päällekkäin kuten kuvassa 4. Tällöin T_1:n ja T_2':n muodostama ala on $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.



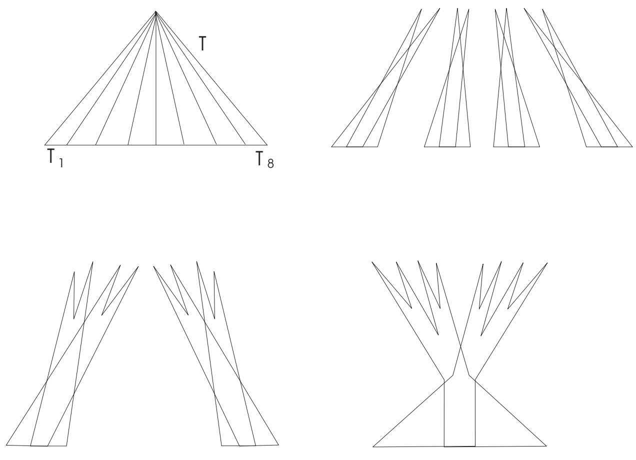
Kuva 4. $a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vielä enemmän alaa saadaan pienennettyä menettämättä yksikköjanojen suuntia jakamalla T neljään osaan ja siirtämällä niitä sopivasti osittain päällekkäin, kuten kuvassa 5.



Kuva 5.

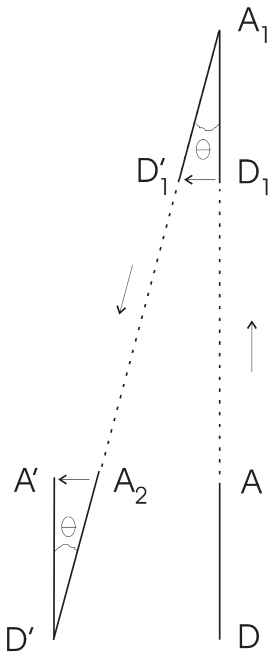
Kuvassa 6 on T jaettu kahdeksaan osaan ja niitä on siirretty kolmessa vaiheessa.



Kuva 6.

Jakamalla T näin tarpeeksi moneen osaan saadaan mielivaltaisen pieni alue, joka sisältää yksikön pituisen janan kaikissa suunnissa φ, $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$. Kun tätä aluetta kierretään 60° myötä- ja vastapäivään ja otetaan näin saatujen kolmen alueen yhdiste, saadaan pinta-alaltaan mielivaltaisen pieni tasoalue, joka sisältää yksikköjanan kaikissa suunnissa.

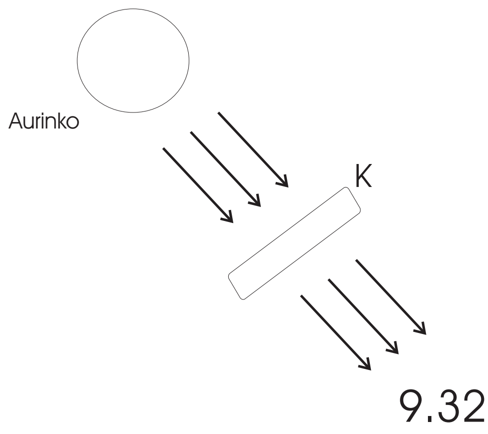
Tällä konstruktiolla saadaan myös Besicovitchin joukko, tason nolla-alainen osajoukko, joka sisältää yksikön pituisen janan jokaisessa suunnassa. Mutta se ei vielä ratkaise Kakeyan ongelmaa. Edes kuvan 4 tilanteessa yksikköjanaa ei voida *jatkuvasti* kiertää suunnasta $\frac{\pi}{3}$ suuntaan $\frac{2\pi}{3}$. Tämän aikaansaamiseksi täytyy käyttää myös toista yksinkertaista geometrista toimitusta. Katsotaan kuvaa 4 ja yritetään siirtää A:sta lähtevä ykkösen pituinen AB:n osajana A':sta lähtevälle $A'C'$:n osajanalle peittämällä mahdollisimman vähän pinta-alaa kolmioiden $T_1 = ABD$ ja $T_2' = A'C'D'$ ulkopuolella. Ensin tämä jana voidaan T_1:n sisällä kääntää janaksi AD. Samoin $A'D'$ voidaan kääntää T_2':n sisällä halutuksi $A'C'$:n osajanaksi. Ongelmaksi jää siis liikuttaa jana AD janaksi $A'D'$ peittämällä mahdollisimman vähän pinta-alaa. Tämä voidaan tehdä seuraavasti, ks. kuva 7. Siirretään ensin AD suoraa pitkin kauas janaksi A_1D_1. Sitten käännetään tämä A_1D':n osajanaksi A_1D_1'. Siirretään A_1D_1' suoraa pitkin janaksi A_2D' ja käännetään tämä janaksi $A'D'$. Paljonko pinta-alaa olemme käyttäneet? Suoria pitkin siirrettäessä emme yhtään. Kummassakin kääntämisessä saman verran eli $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, missä θ on janojen A_1D_1 ja A_1D_1' välinen kulma. Kun A_1 valitaan tarpeeksi kaukaa A:sta, kulma θ saadaan mielivaltaisen pieneksi ja täten myös käytetty pinta-ala.



Kuva 7.

Näkyvät ja näkymättömät joukot

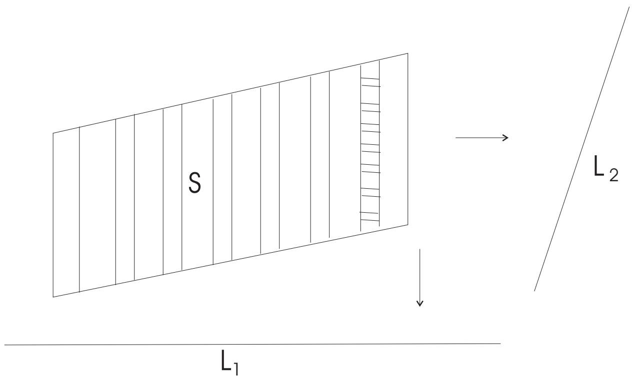
Tarkastellaan toisenlaista paradoksaalista geometrista ilmiötä: näkymätön voi muuttua näkyväksi. Sanomme, että tarkastelemamme avaruutemme geometrinen objekti on näkyvä, jos se auringon paistaessa jättää näkyvän varjon, muuten se on näkymätön. Mutta voiko tämä riippua suunnasta, josta aurinko paistaa? Toisin sanoen, voiko joukkomme olla aamupäivällä näkymätön ja iltapäivällä näkyä? Kyllä se voi, kuten skottimatemaatikko K.J. Falconer on osoittanut. Tarkemmin sanottuna voidaan konstruoida avaruuskappale, joka jokaisena ajanhetkenä (jolloin aurinko paistaa) jättää halutun varjon. Erityisesti jos haluamme, että jokaisena kellonaikana varjona on tämän kellonajan numerot (digitit), saamme tulokseksi digitaalisen aurinkokellon eli hökötyksen K, jonka varjo näyttää kulloisenkin ajanhetken numerot.



Kuva 8.

Falconerin tulos on puhtaasti matemaattinen, mutta se voidaan toteuttaa myös käytännössä. Keksijät Hans Scharstein, Daniel Scharstein ja Werner Krotz-Vogel patentoivat työnsä Saksassa ja Yhdysvalloissa vuonna 1994. Heidän rakentamaansa digitaalista aurinkokelloa voi ostaa 91 euron hintaan. Tietoja tästä löytyy sivulta http://www.digitalsundial.com.

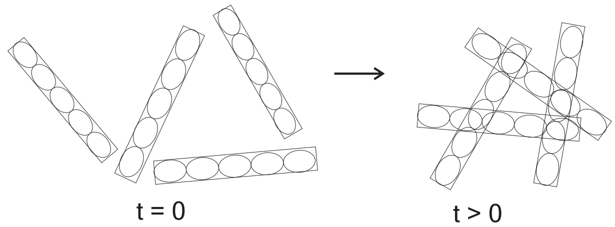
Teknisesti matemaattinen konstruktio on mutkikas, mutta perusidea on yksinkertainen. Katsotaan sitä tasossa. Otetaan suunnikas S ja sen sisältä kapeita yhden sivun suuntaisia osasuunnikkaita kuten kuvassa 9. Näiden kapeiden osasuunnikkaiden yhdisteen projektio (varjo) on pieni suoralla L_1 ja sitä lähellä olevilla suorilla, mutta muilla suorilla se on sama kuin S:n projektio. Seuraavaksi tehdään sama operaatio eri suunnassa kaikkien kapeiden suunnikkaiden sisässä, jolloin projektio on pieni L_1:ä ja L_2:a lähellä olevilla suorilla, mutta sama kuin S:n projektio muilla suorilla. Tällaisia operaatioita toistamalla useassa eri suunnassa pääsemme jo hyvin lähelle (ainakin tasossa) alussa haikailemaamme kappaletta, joka on näkymätön aamupäivällä ja näkyy iltapäivällä.



Kuva 9.

Signaaleja ja saippuakalvoja

Ovatko yllä tarkastellut paradoksaaliset ilmiöt vain kuriositeetteja vai onko niillä jotain yleisempää merkitystä? Yllämainitut fraktaaliset digitaalikellot ovat ainakin toistaiseksi enemmän hauskoja leluja kuin hyödyllisiä kapineita. Mutta Kakeyan ongelmaan sekä näkyvyyteen ja näkymättömyyteen liittyvät kysymykset ovat yhteydessä eräisiin nykymatematematiikan keskeisimpiin kysymyksiin. Niitä ovat viimeisten 30 vuoden aikana tutkineet useat huippumatemaatikot, joiden joukossa on kolme Fieldsin mitalistia C. Fefferman, J. Bourgain ja T. Tao. Matematiikassahan ei jaeta Nobeleita ja Fieldsin mitali on eräs matematiikan arvostetuimmista palkinnoista. Kakeya-tyyppisten ilmiöiden perusteellisempi ymmärtäminen liittyy ns. aaltoyhtälön ratkaisujen käyttäytymisen ymmärtämiseen. Aaltoyhtälö on differentiaaliyhtälö, joka kuvaa aaltojen etenemistä, esimerkiksi ääni- tai sähkömagneettisten aaltojen. Tällaisten aaltojen voidaan ajatella koostuvan aaltopaketeista, joiden osaset keskittyvät kapeisiin putkiin (kolmiulotteisiin neuloihin). Kun paketti (signaali) lähtee liikkeelle, osaset ovat siististi erillään, mutta sen edetessä ne voivat mennä päällekkäin mahdollisesti muodostaen Kakeya-tyyppisiä konfiguraatioita, jotka aiheuttavat signaaliin häiriöitä. Kakeya-tyyppisten joukkojen ominaisuuksien selvittäminen auttaa ymmärtämään missä määrin tällaisia singulariteettejä voi syntyä. Näkyvyyteen ja näkymättömyyteen liittyvät kysymykset taas ovat merkittäviä (vaikkakin monen mutkan kautta) esimerkiksi saippuakalvojen, eli minimaalipintojen, teoriassa, enemmän kuitenkin abstraktien korkeaulotteisten sellaisten, kuten kolmiulotteisten minimaalipintojen suhteellisuusteorian neliulotteisessa avaruudessa.



Kuva 10.

Tämä kirjoitus perustuu artikkeleihin

P. Mattila: Voiko näkymätön näkyä: geometrisen mittateorian paradokseja. - Arkhimedes 2/2004, 17-22,

P. Mattila: Fraktaaligeometriaa ja matemaattista analyysiä. - Sphinx, vuosikirja 2009-2010, 63-68.

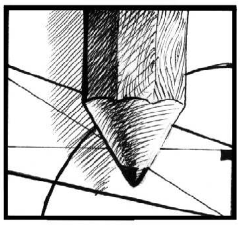
Verkko-Solmussa ilmestyneitä uusia kirjoituksia

Tuomas Korppi: Lukualueiden laajentamisesta

`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/nonarkh.pdf`

Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen: Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta

`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/Poranen-Haukkanen.pdf`



Jouluaatto on harvemmin sunnuntaina

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Kun uusi kalenteri ilmestyy, moni tarkastaa, mille viikonpäivälle joulu, vappu tai oma syntymäpäivä sattuu. Sehän vaihtelee, mutta tuntuu kuitenkin siltä, että aikojen kuluessa kaikki viikonpäivät esiintyvät yhtä usein. Mutta onkohan asia ihan varmasti näin? Lasketaanpa![1] Voisimme käyttää hyväksi modulaariaritmetiikkaa, mutta selviämme mainiosti ihan alkeellisillakin keinoilla.

Noudattamassamme, gregoriaaniseksi kutsutussa kalenterissa vuoden pituus on tavallisesti $365 = 52 \cdot 7 + 1$ päivää. Kuitenkin ne vuodet, joiden vuosiluku eli järjestysnumero on jaollinen neljällä, ovat karkausvuosia, ja niissä on $366 = 52 \cdot 7 + 2$ päivää. Tähän poikkeukseen liittyy vielä poikkeuksen poikkeus: vuodet, joiden vuosiluku on jaollinen 100:lla, mutta ei 400:lla, eivät ole karkausvuosia. Siten vuosi 2000 oli karkausvuosi, mutta esimerkiksi vuodet 1900, 2100 ja 2200 eivät ole. Tämä hiukan monimutkainen järjestely perustuu siihen, että vuosi määräytyy Maan kierrosta Auringon ympäri ja vuorokausi Maan kierrosta oman akselinsa ympäri. Nämä kiertoliikkeet eivät ole synkronissa. Jälkimmäisiä kierroksia ehtii edellisen kierroksen aikana tapahtua hiukan vähemmän kuin $365\,\frac{1}{4}$ kappaletta. Karkausvuosijärjestelyllä taataan se, että vuodenajat pysyvät kalenterissa omilla paikoillaan tuhansienkin vuosien kuluessa. Siitä kuitenkin seuraa, että kalenteripäivien ja viikonpäivien vastaavuus on hiukan epäsäännöllinen. Yleensä tietyn kalenteripäivän viikonpäivä on ensi vuonna ”yhtä suurempi” kuin tänä vuonna: kun uudenvuoden päivä vuonna 2011 oli lauantai, vuonna 2012 se on sunnuntai. Karkausvuoden ”ylimääräinen” päivä on 29. helmikuuta, joten karkausvuosien kalenteripäivät maaliskuusta alkaen siirtyvät viikonpäivinä kahdella edelliseen vuoteen verrattuna: kun vappuaatto vuonna 2011 oli lauantai, se on karkausvuonna 2012 maanantai.

Tarkastellaan mitä tahansa 400 vuoden jaksoa. Siinä on 97 karkausvuotta ja 303 tavallista vuotta. Tällaisessa jaksossa on päiviä kaikkiaan $400 \cdot 52 \cdot 7 + 2 \cdot 97 + 303$ kappaletta. Mutta $2 \cdot 97 + 303 = 497 = 71 \cdot 7$. Neljänsadan vuoden jaksossa olevien päivien lukumäärä on siis jaollinen seitsemällä, joten tällaisessa jaksossa on tasamäärä viikkoja ja jokainen viikonpäivä esiintyy yhtä monta kertaa. Ja jos jokin viikonpäivä aloittaa tällaisen jakson, seuraava 400 vuoden jakso alkaa samasta viikonpäivästä. Jos jokin kalenteripäivä, vaikkapa jouluaatto, sattuu tietylle viikonpäivälle jonkin 400 vuoden jakson aikana tietyn määrän kertoja, niin se sattuu tälle viikonpäivälle yhtä monta kertaa jokaisen 400 vuoden jakson aikana.

Vuonna 2011 jouluaatto on lauantaina. Tämä merkitsee sitä, että jouluaatto on lauantaina myös vuonna 2411. Selvitetään, kuinka usein jouluaatto on eri viikonpäivinä vuosina 2011 – 2410, siis 400 vuoden jaksossa. Ensimmäinen havainto on, että sellaisen 28 vuoden jakson

[1] Laskelman inspiraationa on kokoelmassa *D.O. Shklyarsky, N.N. Chentsov ja I.M. Yaglom: Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics*, Mir Publishers, Moskova 1979, esitetty tehtävä.

aikana, jonka kuluessa ovat tavalliset 7 karkausvuotta ja 21 tavallista vuotta, 52 viikkoa ylittyy 21 kertaa päivällä ja 7 kertaa kahdella päivällä. Ylittymisiä on siis 35 eli seitsemällä jaollinen määrä. 28 tällaiseen vuoteen sisältyy siis tasamäärä viikkoja, ja peräkkäiset tällaiset jaksot sisältävät saman määrän tietyn kalenteripäivän sattumisia tietyksi viikonpäiväksi. Jouluaatto vuonna 2012 (joka on karkausvuosi) on siis maanantai, vuonna 2013 tiistai, 2014 keskiviikko, 2015 torstai, 2016 lauantai, 2017 sunnuntai jne. Saamme seuraavan taulukon:

2011	la	2018	ma	2025	ke	2032	pe
2012	ma	2019	ti	2026	to	2033	la
2013	ti	2020	to	2027	pe	2034	su
2014	ke	2021	pe	2028	su	2035	ma
2015	to	2022	la	2029	ma	2036	ke
2016	la	2023	su	2030	ti	2037	to
2017	su	2024	ti	2031	ke	2038	pe

Taulukosta saamme helposti laskettua, että jouluaatto on tällaisessa 28 vuoden jaksossa yhtä usein kunakin viikonpäivänä. Tästä päättelemme, että vuosina $2039-2066$ ja $2067-2094$ jouluaatto sattuu yhtä usein jokaiselle viikonpäivälle ja että vuonna 2095 se sattuu taas lauantaille. Vuosi 2100 ei ole karkausvuosi. Vuosina $2095-2100$ jouluaaton viikonpäivät ovat siis järjestyksessä lauantai, maanantai, tiistai, keskiviikko, torstai ja perjantai. Vuonna 2101 jouluaatto on taas lauantai. Nyt voimme aloittaa uudet 28 vuoden jaksot, $2101-2128$, $2129-2156$ ja $2157-2184$, joina jouluaatto on yhtä usein joka viikonpäivänä. Vuonna 2185 ollaan taas lauantaissa. Kun vuodet $2180-2200$ käydään läpi yksitellen, saadaan lasketuksi, että tuona aikana jouluaatto on vain kerran perjantaina, kahdesti sunnuntaina, tiistaina ja torstaina, mutta kolmesti maanantaina ja lauantaina. Lisäksi vuoden 2201 jouluaatto sattuu torstaihin. Vuosien $2201-2300$ väli menee samoin, mutta kahden viikonpäivän siirrolla. Vuosina $2210-2284$ kaikki viikonpäivät ovat yhtä usein jouluaattoina ja vuoden 2285 jouluaatto on torstai. Vuosina $2285-2300$ jouluaatoissa on yksi keskiviikko, kaksi sunnuntaita, tiistaita ja perjantaita ja kolme torstaita ja lauantaita. Vuoden 2300 jouluaatto on maanantai ja vuoden 2301 jouluaatto on tiistai.

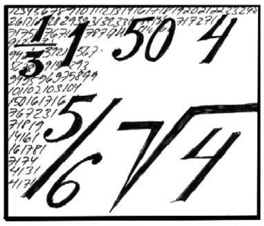
Vuosi 2400 on karkausvuosi. Koska $4 \cdot 28 = 112$, vuosina $2301-2412$ jouluaatto sattuu yhtä monesti kullekin viikonpäivälle. Vuosi 2411 alkaa uuden 400-vuotisen jakson. Vuosien 2411 ja 2412 jouluaatot ovat lauantaina ja maanantaina. Vuosina $2301-2410$ lauantai ja maanantai esiintyvät siis yhden kerran harvemmin kuin muut viikonpäivät.

Kerätään nyt yhteen havaitut poikkeamat viikonpäivien tasaisesta jakautumisesta:

	ma	ti	ke	to	pe	la	su
2095-2100	0	0	0	0	0	0	-1
2185-2200	3	2	3	2	1	3	2
2285-2300	3	2	1	3	2	3	2
2301-2410	-1	0	0	0	0	-1	0

Kun sarakkeet lasketaan yhteen, huomataan, että kaikkiaan jouluaatto on harvimmin perjantaina ja sunnuntaina, yhden kerran useammin (siis aina 400 vuoden aikana!) keskiviikkoisin ja torstaisin, ja että maanantain, torstain ja lauantain esiintymisten lukumäärä on kaksi enemmän kuin perjantain ja sunnuntain. Erot ovat kovin pieniä, eikä niillä taida olla merkitystä meidän kenenkään elinaikaan suhteutettuina. Alussa esitetyn laskun mukaan 400 vuoden jaksossa on viikkoja $400 \cdot 52 + 71 = 20871$ kappaletta. Kukin viikonpäivä esiintyy jakson aikana näin monta kertaa. Kalenteripäivää kohti sattuva enintään kahden päivän ero on alle 0,1 promillea.

Vuoden 2011 kalenterin perusteella ja edellisen laskelman perusteella voi tehdä päätelmiä minkä tahansa kalenteripäivän osumisesta eri viikonpäiville. Esimerkiksi itsenäisyyspäivä on vuonna 2011 tiistai. Tästä seuraa, että itsenäisyyspäivä on useimmin sunnuntaina, tiistaina ja torstaina, ja harvimmin maanantaina ja keskiviikkona. – Pääsiäisen määräytyminen on monimutkaisempien laskujen takana: siihenhän on Maan ja Auringon ohella sanansa sanottavana myös Kuulla. Mutta pääsiäissunnuntai sattuu aina sunnuntaiksi ja pitkäperjantai on aina perjantai!



Pomppiva pallo portaissa: koulumatematiikan jännityskertomus

Eero Haahden aikanaan esittämä tehtävä

Heikki Haahti

1. Olipa kerran valveutunut medisiinari, joka luennoidessaan alan asioita halusi oppilaiden virkistävän päähän pänttäämisen jähmettämiä aivojaan luovalla ajattelulla. Niinpä hän asetti oppilaidensa harkittavaksi seuraavan ongelman, jonka ratkaiseminen edellytti ainoastaan koulukurssin matematiikkaa, ja siitäkin pelkästään yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua sekä osittelulain $a(b+c) = ab + ac$.

Kun pallo pudotetaan K cm korkeudelta kovaan maahan kohtisuorasti maan tasoa vastaan, sen pomppauskorkeuden p suhde q pudotuskorkeuteen K on tietty ykköstä pienempi positiiviluku. Jos esim. suhdeluku q on 8 kymmenesosaa: $q = 0{,}8$, niin pudotettaessa pallo metrin korkeudesta se pomppaa 80 cm. Tämä suhdeluku ei riippune pudotuskorkeudesta K, joten meillä on seuraavassa kaikilla putoamiskorkeuden K arvoilla käyttöön tuleva laki

$$p = qK, \tag{2}$$

missä siis $0 < q < 1$. Seuraavissa sovelluksissa käytetään yo. arvoa $q = 0{,}8$.

Kyseisessä tapauksessa pallon pudottaja seisoo (hiukan viettävällä) tasaisella penkereellä korkealla portaikon yläpäässä ja pudottaa pallon korkeudelta $K = H$ cm. Pallo putoaa ensimmäisen pomppauksensa päätteeksi ylhäältä laskien ensimmäiselle porrastasanteelle, ja siitä edelleen seuraavaksi alemmalle portaalle, tästä kolmannelle portaalle jne. Koska ylätasanne on hiukan viettävä, ei pallo kohtaa sen tasoa aivan kohtisuorasti, mistä seuraa pallon liikkeelle sopiva vaakasuora komponentti ja myös pieni poikkeama pomppauskorkeuslaista (2). Tätä jälkimmäistä emme huomioi laskelmissamme. Sopivalla ylätason kaltevuuskulmalla saataneen toisaalta aikaan se, että pallon vaakasuora liikekomponentti vie pallon järjestyksessä portaalta portaalle, ilman että se pomppaa useammasti samalta portaalta tai jättää väliin portaita.

2. *Kuinka korkealle pallo pomppii edetessään alas portaita, kun kukin porrasaskelma on h cm edellisen alapuolella?* Fiksut medisiinarioppilaat päättelevät näin:

2.1. Haettuja pomppauskorkeuksia merkittäköön järjestyksessä symbolein $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Kun pudotuskorkeus penkereelle on $K = H$ cm, pallon ensimmäinen pomppaus on siis qH cm korkea. Koska nyt ensimmäinen porrasaskelma on h cm lähtötasanteen alapuolella, joutuu pallo putoamaan lakikorkeutensa saavutettuaan ensin takaisin pomppaamansa qH cm ja sen jälkeen vielä portaan korkeuden h cm:n verran. Toiseksi putoamiskorkeudeksi tulee näin $K = p_1 + h = qH + h$ cm ja toiseksi pomppauskorkeudeksi näin ollen $p_2 = qK = q(p_1 + h) = q(qH + h)$, eli muokkaamalla lauseke osittelulain mukaan, toinen pomppaus on $p_2 = q^2H + qh$ cm. Tämän pomppauksen lakikorkeuden saavutettuaan joutuu pallo jälleen putoamaan, ensin toisen pomppauksensa p_2 määrän ja sitten edelleen jatkamaan putoamistaan portaan korkeuden h verran. Pudotuskorkeudeksi tulee nyt siis $K = p_2 + h = q^2H + qh + h$, ja kolmannen pomppauksen korkeudeksi siis $qK = q(p_2 + h) = q(q^2H + qh + h)$ eli osittelulain avulla $p_3 = q^3H + q^2h + qh$. Samalla päättelyllä saadaan edelleen neljännen pomppauksen korkeudeksi $p_4 = q^4H + q^3h + q^2h + qh$. Vaikuttaa siis siltä, että lopulta minkä hyvänsä n:nnen pomppauksen korkeudeksi tulisi

$$p_n = q^nH + q^{n-1}h + q^{n-2}h + \cdots + q^2h + qh. \tag{3}$$

Kuitenkin tämä päättely perustuu vain tuntumaan. Joku voisi hyvällä syyllä epäillä, että jossain vaiheessa, esim. sadannen portaan jälkeen ilmestyy toisenlainen lauseke pomppauskorkeudelle. Että näin ei ole asianlaita, todistetaan seuraavassa koulustakin tutulla ”*täydellisellä induktiolla*”. Siinä oletetaan aluksi, että kaava (3) on pätevä, ja pyritään osoittamaan tämän ”induktiooletuksen” perusteella, että silloin sama laki pätee myös seuraavalla eli $(n + 1)$:nnellä askelmalla.

Kun pallo on pompannut n:nneltä portaalta yhtälön (3) antaman verran, se siis putoaa seuraavalle portaalle ensin tämän matkan ja sitten vielä portaiden korkeuseron h verran. Yhteensä pudotuskorkeudeksi $(n+1)$:nnelle portaalle tulee siis induktio-oletuksen (3) perusteella

$$\begin{aligned} K &= p_n + h \\ &= (q^nH + q^{n-1}h + q^{n-2}h + \cdots + q^2h + qh) + h. \end{aligned}$$

Pallo pomppaa siis tältä portaalta q:nnen osan tästä, joten $(n+1)$:nneksi pomppauskorkeudeksi tulee osittelulakia käyttäen

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= qK = q(p_n + h) \\ &= q(q^nH + q^{n-1}h + q^{n-2}h + \cdots + q^2h + qh) + qh \\ &= q^{n+1}H + q^nh + q^{n-1}h + \cdots + q^2h + qh. \end{aligned}$$

Huomataan, että tässä kaavan oikea puoli antaa $(n + 1)$:lle pomppaukselle induktio-oletuksen (3) mukaisen korkeuden; laissa on vain korvattava n luvulla $n + 1$. Jos siis kyseinen laki pätee jollain arvolla n, niin se on voimassa myös arvolla $n + 1$. Päättely jatkuu nyt seuraavasti: Koska laki on todettu oikeaksi edellä arvoon $n = 4$ saakka, se pätee edellisen päättelyn mukaan myös arvolla $n + 1 = 5$. Koska laki pätee arvolla $n = 5$, se pätee siis myös arvolla $n + 1 = 6$. Koska laki pätee arvolla $n = 6$, se pätee siis myös arvolla $n+1 = 7$ jne. Näin ulotetaan lain voimassaolon piiriin jokainen askelma, m.o.t.

Tarkastelemme nyt lähemmin saatuja pomppausten lausekkeita. Niitä esittäviin summiin ilmaantuu joka portaalla uusi positiivinen yhteenlaskettava qh. Tämän perusteella vaikuttaa siltä, että pomppauskorkeudet kasvavat pallon pomppiessa portaalta portaalle. Toisaalta, koska suhdeluku $q < 1$, merkitsee sillä kertominen aina kerrottavan pienentymistä, esim. kun $q = 0{,}8 = 8/10$, on $q \cdot 10 = 8 < 10$. Näin ollen vaikka pomppauksia kuvaavien summien yhteenlaskettavien määrä lisääntyy portaalta portaalle, yhteenlaskettavien suuruudet pienenevät. Kumpi näistä tendensseistä voittaa, eli kasvavatko pomppaukset pallon edetessä vai pienenevätkö ne? **Saa nähdä kuinka käy!** **Saa nähdä kuinka käy!**

2.2. Tämän selvittämiseksi muokataan saatua pomppauksen lauseketta (3) informatiivisempaan muotoon. Otetaan sen $n - 1$:n viimeisen termin summassa h yhteiseksi kerrottavaksi, osittelulakia nurinpäin käyttäen, jolloin saadaan

$$p_n = q^nH + (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2h + q)h. \tag{4}$$

Porraskorkeuden h kertojana oleva summa saadaan nyt koulukurssin mukaisesti valaisevampaan muotoon merkitsemällä sitä tilapäisesti esim. symbolilla s:

$$s = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q.$$

Tällöin osittelulain mukaan saadaan $qs = q(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q) = q^n + q^{n-1} + \cdots + q^2$. Asetetaan summat s ja qs allekkain, niin että yhteiset termit tulevat samaan pystyriviin:

$$\begin{aligned} s &= \phantom{q^n +{}} q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q, \\ qs &= q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2. \end{aligned}$$

Kun tässä, edelleen koulun oppeja noudattaen, suoritetaan vähennyslasku $s - qs$, niin jää vähentäjästä jäljelle ainoastaan summan ensimmäinen termi q^n miinusmerkkisenä ja vähennettävästä viimeinen yhteenlaskettava q, koska kaikki muut termit kumoutuvat nolliksi. Saadaan siis summan s määräämiseksi $s - qs = -q^n + q$, eli käyttämällä osittelulakia $s(1 - q) = -q^n + q$, mistä jakamalla puolittain luvulla $1 - q$,

$$s = \frac{-q^n + q}{1 - q} = -\frac{q^n}{1 - q} + \frac{q}{1 - q}.$$

Nyt yllä olevan n:nnen pomppauskorkeuden lauseke (2) saa muodonvaihdokset

$$\begin{aligned} p_n &= q^nH + (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q)h \\ &= q^nH + sh = q^nH + (-\frac{q^n}{1 - q} + \frac{q}{1 - q})h \\ &= q^nH - \frac{q^n}{1 - q}h + \frac{q}{1 - q}h. \end{aligned}$$

Tässä yhtälöketjun viimeisessä lausekkeessa vain kaksi ensimmäistä yhteenlaskettavaa riippuu pallon koskettamien portaiden lukumäärästä n, kun taas viimeinen termi ei siitä lainkaan riipu. Edellinen summa saakoon ympärilleen hienot sulkeet,

$$p_n = [q^nH - \frac{q^n}{1 - q}h] + \frac{q}{1 - q}h,$$

joista heltiää yhteiseksi tekijäksi potenssi q^n, ja niin on meillä lauseke

$$p_n = q^n[H - \frac{1}{1 - q}h] + \frac{q}{1 - q}h,$$

pallon n:nnen pomppauksen korkeudelle. Muistutamme, että tässä H oli pallolle annettu alkuperäinen pudotuskorkeus ylätasanteelle ja h oli kahden peräkkäisen portaan korkeusero, molemmat senteissä mitattuina.

2.3. Pomppauskorkeudelle saadun lausekkeen

$$p_n = q^n[H - \frac{1}{1-q}h] + \frac{q}{1-q}h, \qquad (5)$$

avulla tutkimme nyt edellä esiin tullutta kysymystä siitä, suurenevatko vai pienenevätkö pomppauskorkeudet. n:nnestä seuraavan pomppauksen korkeus p_{n+1} saadaan yllä olevasta lausekkeesta korvaamalla siinä n luvulla $n+1$:

$$p_{n+1} = q^{n+1}[H - \frac{1}{1-q}h] + \frac{q}{1-q}h. \qquad (6)$$

Muodostettaessa nyt lausekkeiden (5) ja (6) avulla pomppauksien korkeusero $p_{n+1} - p_n$ häviää vähennyslaskussa porraslukemasta riippumaton yhteinen jälkimmäinen yhteenlaskettava $\frac{q}{1-q}h$ ja saadaan

$$p_{n+1} - p_n = q^{n+1}[H - \frac{1}{1-q}h] - q^n[H - \frac{1}{1-q}h].$$

Muokataan tätä lauseketta tarkoituksenmukaisesti: erottamalla ensin yhteinen tekijä $q^n[H - \frac{1}{1-q}h]$ tulee kerrottavaksi $q-1$, joten osittelulain perusteella

$$p_{n+1} - p_n = q^n[H - \frac{1}{1-q}h](q-1).$$

Vaihdetaan tässä hakasuluissa oleva tekijä ja viimeinen tekijä vastaluvuikseen, jolloin tulon arvo säilyy ennallaan ja kyseisistä tekijöistä tulee $\frac{1}{1-q}h - H$ ja $1-q$. Kun tulon vaihdantalakia käyttämällä jätämme vielä hakasulkutekijän viimeiseksi, tulee lopulta kahden peräkkäisen pomppauksen korkeuseroksi

$$p_{n+1} - p_n = q^n(1-q)[\frac{h}{1-q} - H].$$

Koska ensimmäiset tekijät q^n ja $1-q$ ovat tässä aina positiivisia, seuraa että pomppauskorkeus kasvaa tai vähenee sen mukaan, onko hakasuluissa oleva erotus positiivinen tai negatiivinen. Jos esim. $q = 0{,}8$, jolloin $1 - q = 0{,}2 = 1/5$, saadaan korkeuseroksi $p_{n+1} - p_n = q^n \cdot 0{,}2[5h - H]$. Jos alkuperäiseksi pudotuskorkeudeksi H valitaan tässä viisinkertaista portaankorkeutta pienempi korkeus eli jos portaiden korkeudet h ovat suuremmat kuin viidennes pudotuskorkeudesta, niin tällöin pomppausten korkeudet kasvavat joka portaalta. Jos taas pudotuskorkeus H on viisinkertaista portaankorkeutta suurempi, eli jos kukin portaankorkeus h on pienempi kuin viidennes pudotuskorkeudesta, silloin pomppaukset pienenevät joka porrasaskeleella. Jos lopulta pudotuskorkeudeksi H valitaan tasan viisinkertainen porraskorkeus, jolloin korkeuserotusten lausekkeessa hakasuluissa oleva tekijä häviää, niin tällöin ovat kahden peräkkäisen pomppauksen korkeuserot aina $= 0$ cm, joten jokainen pomppaus on aina yhtä korkea. Tämä (ja muukin edellinen päättely) voidaan nähdä myös suoraan pomppauskorkeuden lausekkeesta (5), joka antaa yhteiseksi pomppauskorkeudeksi kaikilla n

$$p_n = q^n[H - \frac{h}{1-q}] + \frac{q}{1-q}h = \frac{q}{1-q}h.$$

Tapauksessa $q = 0{,}8$ ja $H = 5h$, on jokainen pomppaus siis $p_n = \frac{0.8}{0.2}h = 4h$ eli se on nelinkertainen porraskorkeuteen h verrattuna.

2.4. Pallon pomppauskorkeuksien selvittelyssä tutkimme lopuksi, kuinka niiden käy hyvin pitkissä portaissa, jotka jatkuvat esim. jostain korkealta alpin huipulta kauas alas laaksoon. Kopioidaan vielä tähän n:nnen pomppauksen korkeus kaavasta (5):

$$p_n = q^n[H - \frac{1}{1-q}h] + \frac{q}{1-q}h.$$

Koska tässä q on ykköstä pienempi positiivinen luku, sillä kertominen pienentää kerrottavaa, kuten edellä jo todettiin, joten erityisesti sen potenssi q^n on sitä pienempi, mitä korkeampi potenssi on kyseessä. Positiivisten lukujen jono $q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ on näin ollen laskeva: aina jonon luku on edeltäjäänsä pienempi, ja mitä edemmäs jonossa mennään, sitä pienempiä lukuja tulee vastaan: $1 > q > q^2 > q^3 > \ldots$ Itse asiassa kun eksponentti m rajatta kasvaa, tulee potenssi q^m tässä mielivaltaisen lähelle nollaa, eli sillä on nolla raja-arvonaan. Todistamme tämän sitovasti jäljempänä liitteessä.

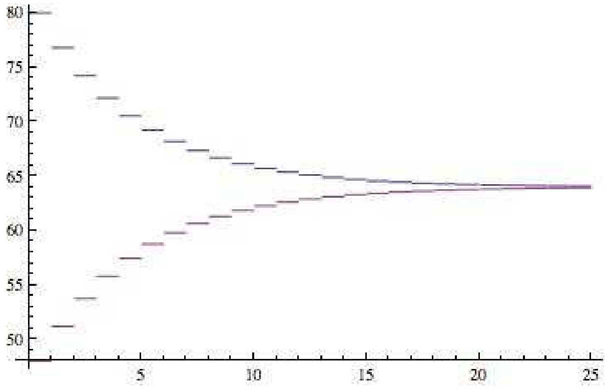
Koska nyt n:nnen pomppauskorkeuden p_n lausekkeessa hakasuluissa oleva luku on kerrottu luvulla q^n, joka tulee mielivaltaisen lähelle nollaa, seuraa tästä, että myös tulo $q^n[H - \frac{1}{1-q}h]$ lähestyy raja-arvonaan nollaa kuljettujen portaiden lukumäärän n kasvaessa. Näin ollen voidaan todeta, että hyvin pitkissä portaissa pomppausten korkeus lopulta riippuu ratkaisevasti pomppaustehon q ohella peräkkäisten portaiden korkeuserosta h, eikä lainkaan alkuperäisestä pudotuskorkeudesta H, koska pätee:

Jokaisella pallon pudotuksen H valinnalla lähestyy pomppauskorkeus aina rajatta arvoa

$$p_\infty = \frac{q}{1-q}h,$$

kun saavutettujen portaiden lukumäärä n kasvaa. Kun H on suurempi kuin $\frac{1}{1-q}h$, lähestyvät pomppauskorkeudet tätä raja-arvoa ylhäältä päin laskevasti. Milloin taas $H < \frac{1}{1-q}h$, lähestyvät ne sitä alhaalta käsin nousevasti. Kun vihdoin $H = \frac{1}{1-q}h$, niin ovat kaikki pomppaukset keskenään yhtä korkeat pomppauskorkeuden ollessa edellä esitetty arvo: $p_n = p_\infty$ kaikilla n.

Kun $q = 0{,}8$, lähestyvät pomppauskorkeudet siis rajatta arvoa $p_\infty = \frac{0.8}{0.2}h = 4h$, joka on myös pomppauksien yhteinen korkeus, kun valitaan $H = 5h$ (katso kuvaa seuraavalla sivulla).



Kuva 1. Pallon pomppauskorkeudet, kun pomppauksen suhde pudotuskorkeuteen on 0,8 *ja porrasaskelmien korkeuserot* $h = 16$ *cm. Vaaka-akselilla on portaiden järjestysluvut, pystyakselilla senttimetrit. Kriitilliseksi, aina yhtä korkeat pomppaukset tuottavaksi pudotuskorkeudeksi tulee näillä arvoilla* $H = 80$ *cm, jolloin kaikki pomppauskorkeudet ovat* $p_\infty = 64$ *cm. Tätä arvoa lähenevät sekä ylemmän että alemman katkoviivan osoittamat korkeudet. Niistä edellinen, laskeva katkoviiva kuvaa pudotuskorkeuden* $H = 100$ *cm antamia pomppauksia ja jälkimmäinen, nouseva, pudotuskorkeuden* $H = 65$ *cm alkuun panemia pomppauksia.*

Kiitokset. Kiitän lopuksi sydämellisesti professori Antti Kupiaista, joka on huolehtinut tekstiini liittyvän kuvan konstruktiosta ja auttanut tekstinkäsittelyssä.

P.S. Välttyäksemme muodikkailta moitteilta opin hyödyttömyydestä käytännön elämän kannalta muistutamme, että tietyllä matemaattisella rakenteella on monasti useita aivan yllättäviäkin sovelluksia. Niinpä edelläkin voimme sijoittaa: $H =$ yhteisön säästö, $q =$ vuotuisen käytön jälkeen säästöstä jäljelle jäävä prosenttiosuus, $h =$ seuraavan vuoden alussa suoritettu säästön lisäys, $p_n =$ säästö n:nnen vuoden alussa.

Liite

Tässä liitteessä on kyse siitä, tuleeko ykköstä pienemmän positiiviluvun n:s potenssi todella mielivaltaisen lähelle nollaa, kun eksponentti n kasvaa rajatta.

Kuten edellä jo ilmeni, positiivisten lukujen jono

$$1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots \tag{7}$$

on laskeva: kukin sen luvuista on edeltäjäänsä pienempi. Seuraako tästä siis, että q^n lähestyy mielivaltaisen lähelle nollaa? Eipä suinkaan, sillä esim. ykköstä pienempien positiivilukujen jono

$$a_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, \ldots$$

on niin ikään laskeva, mutta jokainen sen luku pysyy luvun $\frac{1}{3}$ yläpuolella, eikä näin ollen voi tulla mielivaltaisen lähelle nollaa.

Epäilyksiä väitteen todenperäisyyttä vastaan herättää myös se, että luku q voi olla hyvin lähellä lukua 1, esim. $q = 0{,}999$, jolloin jonossa (7) kukin jäsen on aivan vähän edeltäjäänsä pienempi, joten jonon jäsenet pienenevät hyvin hitaasti, ja on epäilyksen alaista, voiko jonon jäsen q^n todella koskaan päästä mielivaltaisen lähelle nollaa.

Nämä vastaväitteet kuitenkin voidaan kumota. Se voisi tapahtua helposti logaritmeja käyttämällä, mutta alkuperäisen työohjelmamme mukaanhan tarkoitus oli käyttää vain alussa mainittuja peruslaskutoimituksia, joten luovumme logaritmeista ja suoritamme sen sijaan alkeellisin keinoin epäsuoran todistuksen.

Teesimme kuuluu siis: kun q on mikä hyvänsä lukua 1 pienempi positiiviluku, niin q^n tulee mielivaltaisen lähelle nollaa, kun eksponentti n kasvaa rajatta.

Antiteesin mukaan teesi on väärä, joten on olemassa joku niin pieni positiivinen luku ϵ, että se estää alenevan jonon $1, q, q^2, \ldots$ pääsyn ohitseen kohti nollaa, joten jokaisella m pätee aina $q^m > \epsilon$. Meillä on antiteesin mukaan siis

$$1 > \epsilon, q > \epsilon, q^2 > \epsilon, \ldots, q^{n-1} > \epsilon, \ldots$$

Kun suoritetaan puolittain yhteenlasku, on vasemmilla puolilla olevien suurempien lukujen summa suurempi kuin epäyhtälöiden oikealla puolella olevien lukujen summa, tämän jälkimmäisen ollessa $= n\epsilon$, ja saadaan epäyhtälö

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} > n\epsilon.$$

Käyttämällä samaa metodia kuin edellä kohdassa 2.2. merkitään epäyhtälön vasenta puolta symbolilla s, jolloin siis $s > n\epsilon$, ja valitaan vähentäjäksi qs:

$$\begin{aligned} s &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}, \\ qs &= q + q^2 + \cdots + q^n. \end{aligned}$$

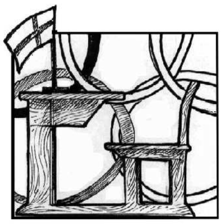
Saadaan $s - qs = 1 - q^n$, joten $(1 - q)s = 1 - q^n$ ja

$$s = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Päätellään edelleen $\frac{1}{1-q} > \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} = s > n\epsilon$. Antiteesin seurauksena olisi siis jokaisella kokonaisluvulla n voimassa epäyhtälö

$$\frac{1}{1 - q} > n\epsilon.$$

Mutta vaikka ϵ voi olla pieni, kasvaa tämän epäyhtälön oikea puoli kokonaisluvun n kasvaessa yli kaikkien rajojen ja erityisesti yli luvun $\frac{1}{1-q}$; ylittyyhän tämä raja jo, kun $n > \frac{1}{\epsilon(1-q)}$. Olemme tulleet ristiriitaan. Antiteesi on siis väärä ja teesi oikea, joten todella q^n tulee mielivaltaisen lähelle nollaa, kun n suurenee rajatta.



Suomi lähettää joukkueen tyttöjen matematiikkakilpailuun

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Aloitetaan kolmella tosiasialla, joista osa liittyy kiinteästi tähän tekstiin ja osa vain hieman tekstin aihepiiriin. Ensimmäiseksi iloinen uutinen, sitten muut:

1. Vuoden 2011 kansainväliset matematiikkaolympialaiset voitti Saksan Lisa Sauermann.

2. Vuoden 2011 kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa kilpailijoista 10,1 % oli naisia.

3. Elo- ja syyskuun taitteessa Oberwolfachissa järjestetyssä lukuteorian workshopissa kymmenien osallistujien joukossa oli kolme naista.

Vaikka on täysin ilmeistä, että tytöt ja naiset pärjäävät matematiikassa, jokin pitää kuitenkin lajin lähinnä miesten yksityisomaisuutena. Britannian ratkaisu on kehittää tytöille oma matematiikkakilpailu EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad), jonka tarkoitus ei ole korvata IMO:a (kansainvälisiä matematiikkaolympialaisia), vaan toimia ponnahduslautana muihin kilpailuihin.

Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa Britannian delegaatioon kuulunut EGMO:n pääjärjestäjä Ceri Fiddes mainosti kilpailua ahkerasti ja jakoi Euroopan maille kutsuja. Ajatus tyttöjen kilpailusta otettiin innostuksella vastaan, ja osin pienellä hämmennyksellä. Tämä ei Fiddesiä kuitenkaan yllättänyt, sillä hän kertoi itse alunperin kauhistuneensa kuultuaan tyttöjen kilpailuista, mutta tutustuttuaan asiaan paremmin, ja toimittuaan kerran Kiinan tyttöjen matematiikkakilpailussa Britannian joukkueenjohtajana, hän oli todennut kilpailun olevan aivan erinomaisen. Britannian joukkue oli itse asiassa kilpailun jälkeen toivonut jotain vastaavaa Britanniaankin, ja tämä oli päätetty järjestää.

On helppo argumentoida kilpailua vastaan: Eikö tyttöjen oma kilpailu viesti, että tytöissä on jotain vikaa, että heidät on pakko pistää omaan sarjaan, koska avoimessa he eivät pärjää? Tämä ei kuitenkaan missään nimessä ole järjestäjien tai kenenkään muunkaan ajattelevan olennon käsitys, vaan kilpailussa on kyse tosiasioiden tunnustamisesta: On olemassa valtaisa määrä lahjakkaita tyttöjä, jotka jostain syystä eivät ikinä päädy kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin, vaikka he tasonsa puolesta sinne ehdottomasti kuuluisivat. Tämän kilpailun avulla pyritään tavoittamaan heidät. Lisäksi esimerkiksi Kiinan tyttöjen kilpailun tehtävien vaikeusaste kertoo kyseessä olevan kovatasoisen kilpailun.

Euroopan naismatemaatikkojen järjestön (EWM – European Women in Mathematics) Suomen koordinaattori Anna Kairema kertoo kulttuurierojen olevan suuri tekijä: "Latinalaisessa Amerikassa matematiikka liitetään yhteen filosofian ja taiteiden kanssa, kun taas Euroopassa Saksan vaikutuksesta tekniikan ja luonnontieteiden yhteyteen. Tästä syystä matematiikka koetaan enemmän poikien lajina." Kairema muistuttaa, että vaikka tyttöjen matemaattiset kyvyt eivät ole heikommat kuin poikien, itseluottamus jostain syystä on paljon huonompi. Hän vielä kertoo, että vaikka esimerkiksi Helsingin yliopistolla noin puolet aloittavista matematiikan opiskelijoista on naisia, valmistuvat monet näistä matematiikan opettajiksi, ei tutkijoiksi. Tämän vuoden kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa Latinalaisesta Amerikasta tulevien tyttöjen osuus sikäläisistä kilpailijoista oli lähes 15 %, mikä on lähes 50 % enemmän kuin tyttöjen osuus kaikista kilpailijoista.

Kaikki ei tietenkään selity pelkästään kulttuurilla. Paljon on myös sattumaa, ja mahdollisesti useiden eri tekijöiden yhteisvaikutusta. Suomen kansainvälisessä matematiikkaolympiajoukkueessa oli vuodesta 1998 vuoteen 2003 joka vuosi vähintään yksi tyttö, vuonna 2000 peräti kolme. Toisaalta vuoden 2003 jälkeen ei Suomen olympiajoukkueessa ole ollut yhtään tyttöä minään vuonna. Tämän selittäminen on suuri avoin ongelma, ja ratkaiseminen vielä toivottavampaa kuin vain selittäminen. Euroopan tyttöjen kilpailu tuntuu erinomaiselta hankkeelta ongelman ratkaisuun. Jotta tämä olisi mahdollista, on kilpailusta kerrottava matematiikasta kiinnostuneille tytöille. Suomi lähettää joukkueen kilpailuun, joka järjestetään 10.-16.4.2012 Cambridgessa. Joukkue valitaan Suomen matematiikan olympiavalmennuksen piiristä. Olympiavalmennukseen kutsutaan MAOL:n kansallisen kilpailun menestyksen perusteella.

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmaan kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Kenestä ”Entten tentten” -loru kannattaa aloittaa: Opas pihapiirin huijarille

Tuomas Korppi

Johdanto

”Entten tentten” -lorulla voidaan valita esimerkiksi leikin aloittaja tai se, kuka on ensimmäisenä hippa. Lorua luettaessa leikkijät seisovat ringissä. Joku leikkijöistä osoittaa kutakin ringissäseisojaa vuorollaan ja sanoo aina osoittaessaan yhden lorun sanan. Valittu leikkijä on se, jota osoitettaessa sanotaan lorun viimeinen sana.

Kehen viimeinen sana sitten osuu? Vastaus riippuu tietysti siitä, kenestä lorun lukeminen on aloitettu. Yhteys näiden kahden seikan välillä on kuitenkin hiukan monimutkainen. Ennen lorun lukemista leikkijät eivät yleensä tiedäkään, kuka tulee valituksi. Tässä oppaassa selitämme tavan, jolla se voidaan laskea.

Lasketaan sanojen määrä

Lasketaan ensin entten tentten -lorun sanojen lukumäärä.

Entten tentten teelika mentten hissun
kissun vaapula vissun eelin keelin
klot viipula vaapula vot eskon
saun pium paum nyt mä
lähden tästä pelistä pois.

Lorun neljällä ensimmäisellä rivillä on viisi sanaa kullakin, ja viimeisellä neljä. **Sanoja on siis yhteensä** $4 \times 5 + 4 = 24$.

Jotkut käyttävät muita loruja kuin ”Entten tentten” -lorua. Jotkut käyttävät esimerkiksi ”Maalari maalasi” -lorua. Jos käytät eri lorua kuin minä, voit kuitenkin toimia kuten seuraavissa luvuissa neuvotaan. Sinun täytyy vain korvata ”Entten tentten” -lorun sanojen määrä oman lorusi sanojen määrällä. Liitteessä on esitetty joidenkin tunnettujen lorujen sanamääriä.

Kuinka monta kierrosta tehdään?

”Entten tentten” -lorussa on paljon sanoja. Lorua luettaessa leikkijöiden osoittaminen kulkee monta kertaa ringin ympäri. Pohditaan seuraavaksi, **kuinka monta kierrosta tehdään**. Tämän kysymyksen pohtiminen auttaa hahmottamaan tilanteen, vaikka olemmekin kiinnostuneet siitä, kuka valitaan.

Tutkitaan tilannetta, jossa leikkijöitä on yhdeksän. Aina kun tehdään täysi kierros, sanotaan yhdeksän sanaa. Näin kierrosten määrän ratkaisee kysymys: Kuinka monta yhdeksän sanan rimpsua 24 sanaan mahtuu? Lopputulos saadaan tietysti jakolaskulla:

$$24 : 9 = 2, \text{ jää } 6.$$

Siis täysiä kierroksia on kaksi, ja jäljelle jää kuusi sanaa.

Jos leikkijöitä olisi esimerkiksi seitsemän, kierrosten määrä saataisiin jakolaskulla

$$24 : 7 = 3, \text{ jää } 3,$$

eli täysiä kierroksia tehtäisiin kolme, ja jäljelle jäisi kolme sanaa.

Kuka valitaan?

Jatkossa oletamme, että osoittaminen tehdään myötäpäivään. Siis niin, että leikkijän osoittamisen jälkeen osoitetaan seuraavaksi hänen vasemmalla puolellaan olevaa. Jos teet osoittamisen vastapäivään, sinun täytyy vaihtaa joka kohdassa vasen ja oikea keskenään.

Lorun lukeminen aloitetaan jostain leikkijästä, jota kutsun *aloitusleikkijäksi.* Aina kun tehdään täysi kierros, kierroksen viimeisenä osoitetaan aloitusleikkijän oikealla puolella seisovaa leikkijää. Uusi kierros aloitetaan taas aloitusleikkijästä.

Palataan taas siihen tilanteeseen, jossa sanoja on 24 ja leikkijöitä 9. Kuten edellisessä luvussa laskimme, täysiä kierroksia tehdään kaksi. Kahden täyden kierroksen viimeisenä osoitetaan aloitusleikkijän oikealla puolella seisovaa.

Kuten edellisessä luvussa laskimme, sanoja jää yli kuusi. Noista kuudesta ylijäävästä sanasta ensimmäisellä osoitetaan aloitusleikkijää. Viidellä muulla ylijäävällä sanalla osoitetaan viittä aloitusleikkijän vasemmalla puolella seisovaa. **Valittu leikkijä on siis aloitusleikkijästä viides vasemmalle.**

Muut lorut ja leikkijöiden määrät

Nyt tiedämme, kuka valitaan, kun lorussa on sanoja 24 ja leikkijöitä yhdeksän. Entä jos lorussa on joku muu määrä sanoja ja leikkijöitä on joku muu määrä? Vastaus saadaan aivan samalla menetelmällä kuin edellisessä luvussa. Vain lukuarvot täytyy korvata sopivilla.

Menetelmä, jota käytimme edellä ja joka toimii myös muissa tapauksissa, on seuraava:

- Laske lorun sanojen lukumäärä. Laskeminen on helpompaa, kun lorun kirjoittaa paperille.
- Jaa lorun sanojen lukumäärä leikkijöiden lukumäärällä ja ota jakojäännös.
- **Jos jakojäännös on vähintään 2**, vähennä siitä 1. Erotus kertoo, kuinka mones aloitusleikkijästä vasemmalle valitaan. (Syy yhden vähentämiseen on seuraava: Ensimmäisellä jäljelle jäävällä sanalla osoitetaan aloitusleikkijää. Muilla jäljellejäävillä sanoilla osoitetaan hänen vasemmalla puolellaan olevia.)
- **Jos jakojäännös on 1**, täysien kierrosten jälkeen jäljelle jää yksi sana. Sillä osoitetaan aloitusleikkijää. Tässä tapauksessa siis valitaan aloitusleikkijä.
- **Jos jakojäännös on 0 eli jako menee tasan**, tehdään vain täysiä kierroksia, eikä sanoja jää yli. Tässä tapauksessa valitaan kierroksen viimeinen leikkijä, eli aloitusleikkijän oikealla puolella seisova.

Voit itse soveltaa menetelmää muihin loruihin ja leikkijöiden määriin.

Kuinka saat itsesi valituksi?

Jos pääset lukemaan lorua, saat yleensä valita, kenestä lorun lukeminen aloitetaan, eli kuka on aloitusleikkijä. Valitsemalla aloitusleikkijän sopivasti saat itsesi valituksi. Edellisen luvun ohje muuttuu silloin muotoon

- Jaa lorun sanojen lukumäärä leikkijöiden lukumäärällä ja ota jakojäännös.
- **Jos jakojäännös on vähintään 2**, vähennä jakojäännöksestä 1. Erotus kertoo, kuinka mones itsestäsi oikealle on se, josta loru kannattaa aloittaa.
- **Jos jakojäännös on 1**, aloita itsestäsi.
- **Jos jakojäännös on 0 eli jako menee tasan**, aloita vasemmalla puolellasi olevasta.

Jos lasket jonkun lorun sanojen lukumäärän, se kannattaa panna muistiin. Siitä voi laskea oikean aloituskohdan eri leikkijöiden lukumäärille.

Joskus lorulla ratkaistaan joku ikävä velvollisuus. Jos aloitat jostain muusta kuin yllä on neuvottu, voit varmistaa, ettet itse tule valituksi.

Tehtäviä

Tehtävissä käytetyt lorut löydät liitteestä.

Jos et tiedä vastaukseksi saatavan leikkijän nimeä, ilmoita vastaus tyyliin ”Kolmas Leevistä vasemmalle” tai ”Riitan oikealla puolella seisova”.

1. Leikkijöitä on viisi, ja he ratkaisevat ”Maalari maalasi taloa” -lorulla, kuka on ensiksi hippa. Aloitusleikkijä on Lasse. Kuka valitaan?
2. Keinupolttiksen ensimmäinen polttaja valitaan ”Elli keitti vellii” -lorulla. Leikkijöitä on kolme. Aloitusleikkijä on Maija. Kuka valitaan?
3. Seiniksen aloittaja valitaan ”Entten tentten” -lorulla. Leikkijöitä on viisi. Pekka pääsee lukemaan lorua. Kenestä hänen kannattaa aloittaa lorun lukeminen, että hän pääsisi aloittamaan seiniksen?

4. Leikkijöitä on 4, ja he valitsevat ”Entten tentten” -lorulla, kuka on kirkonrotassa ensimmäinen pestävä. Liisa lukee lorun, mutta hän on hiukan huolimaton, ja hän osoittaa sanoilla ”nyt mä” vain yhtä leikkijää. Liisa itse on aloitusleikkijä. Kuka valitaan?
5. Piilosleikin ensimmäinen etsijä valitaan ”Auto ajoi kilparataa” -lorulla (11 sanaa). Valinta osuu Minttuun. Jos oltaisiinkin käytetty ”Auto ajoi kilpa rataa” -lorua (13 sanaa), kuinka mones Mintusta vasemmalle oltaisiin valittu?
6. Purkkiksen ensimmäinen etsijä valitaan ”Maalari maalasi” -lorulla. Leikkijöitä on 7. Kaisa pääsee lukemaan lorua. Koska Eeva on kiusannut Kaisaa, Kaisa tahtoo Eevan jäävän ensimmäiseksi etsijäksi. Kenestä Kaisan kannattaa aloittaa loru?
7. Seitsemästä leikkijästä valitaan leikin aloittaja. Ville on aloitusleikkijästä toinen vasemmalle. Kuinka monta sanaa lorussa pitää olla, että Ville tulisi valituksi? (Yritä löytää kaikki tällaiset sanamäärät, jotka ovat korkeintaan 40 sanaa.)
8. Leikin aloittaja valitaan ”Entten tentten” -lorulla. Mitkä kaikki leikkijöiden lukumäärät ovat sellaisia, että aloitusleikkijän oikealla puolella oleva tulee valituksi?

Tehtävien ratkaisut

Älä lue ratkaisuja ennen kuin olet itse yrittänyt ratkaista tehtävät.

(1) $16 : 5 = 3$, jää 1. Valittu leikkijä on siis Lasse.

(2) $17 : 3 = 5$, jää 2. Valittu leikkijä on siis Maijan vasemmalla puolella oleva.

(3) $24 : 5 = 4$, jää 4. Kannattaa siis aloittaa Pekasta katsoen kolmannesta oikealle.

(4) Leikkijöiden osoituksia tulee yhteensä $24 - 1 = 23$. Nyt $23 : 4 = 5$, jää 3. Valittu leikkijä on siis Liisasta toinen vasemmalle.

(5) Koska jälkimmäisessä lorussa on kaksi sanaa enemmän, oltaisiin valittu toinen Mintusta vasemmalle.

(6) $16 : 7 = 2$, jää 2. Sovelletaan lukua ”Kuinka saat itsesi valituksi” niin, että itsen paikalla on Eeva. Kaisan kannattaa siis aloittaa Eevan oikealla puolella olevasta.

(7) Täysien kierroksien jälkeen jäljelle pitää jäädä kolme sanaa. Koska täysi kierros on seitsemän sanaa, mahdolliset lorujen sanaluvut ovat $0 \times 7 + 3 = 3$, $1\times7+3 = 10$, $2\times7+3 = 17$, $3\times7+3 = 24$, $4\times7+3 = 31$ ja $5 \times 7 + 3 = 38$. ($6 \times 7 + 3 = 45 > 40$, joten tätä suuremmilla sanamäärillä mennään yli tehtävässä annetun 40 sanan rajoituksen.)

(8) On siis ratkaistava, millä leikkijöiden määrillä jako

$$24 : \text{leikkijöiden määrä}$$

menee tasan. Nämä leikkijöiden määrät ovat 2, 3, 4, 6, 8, 12 ja 24.

Liite

Kunkin lorun sanamäärä on ilmoitettu lorun jälkeen.

Entten tentten teelika mentten hissun
kissun vaapula vissun eelin keelin
klot viipula vaapula vot eskon
saun pium paum nyt mä
lähden tästä pelistä pois.

24 sanaa.

Auto ajoi kilparataa mittari näytti
kahtasataa. Yksi pyörä putosi pelistä
pois.

11 sanaa.

Auto ajoi kilpa rataa mittari
näytti kahta sataa. Yksi pyörä
putosi pelistä pois.

13 sanaa.

Maalari maalasi taloa sinistä ja
punaista. Illan tullen sanoi hän:
Nyt mä lähden tästä pelistä
pois

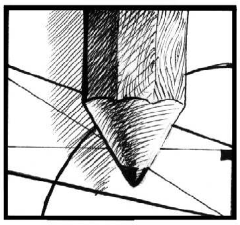
16 sanaa.

Piikerin paakerin piirun paarun, jännen
jääpykkä näärän nääpykkä, sinipää punapää
siirin miirin, juputin puputin puksis
pois.

16 sanaa.

Elli keitti vellii, antoi Matin
maistaa. Matti kaatoi lattialle, Maija
pyyhki pois. Puh, pah, tästä
pelistä pois.

17 sanaa.



Ihmisen uudet silmät – käänteisten ongelmien matematiikkaa

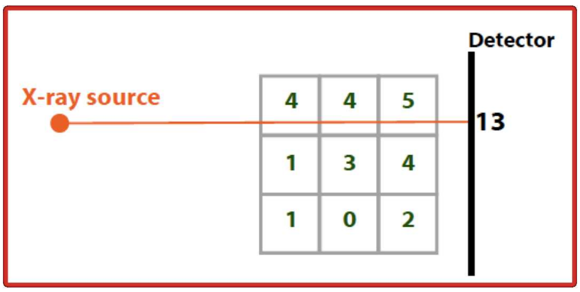
Mikko Salo
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto ja Jyväskylän yliopisto

(Teksti on kooste kirjoittajan Helsingin yliopiston alumni-illassa 17.3.2011 pitämästä esitelmästä.)

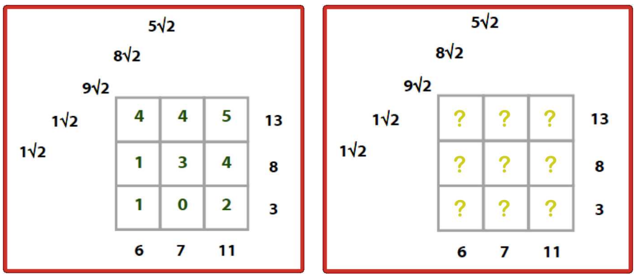
Näköaisti on ihmisen tärkeimpiä aisteja. Silmien avulla ihmiset pystyvät tehokkaasti muodostamaan kolmiulotteisen kuvan ympäröivästä maailmasta. On kuitenkin monia tilanteita, joissa näköaisti tai muutkaan ihmisen aistit eivät pysty tuottamaan tarkkaa tietoa kiinnostavista kohteista. Tällöin voidaan ottaa käyttöön apuvälineitä, kuten mikroskooppi tai kaukoputki, jotka muodostavat kuvia ihmissilmälle liian pienistä tai kaukaisista kappaleista. Näillä optisilla välineilläkin on rajoitteensa: niillä ei esimerkiksi pysty näkemään kiinteiden kappaleiden, kuten ihmiskehon tai maapallon, sisälle. Erilaisten epäsuorien mittausten yhdistäminen matemaattisiin kuvanmuodostusmenetelmiin voi tuottaa huomattavasti parempia tuloksia. Tässä kirjoituksessa ”ihmisen uusilla silmillä” tarkoitetaan matematiikkaan ja erilaisiin fysikaalisiin ilmiöihin perustuvia tehokkaita kuvantamismenetelmiä, joilla ihminen pystyy laajentamaan näkökykyään – näkemään pienempiä tai suurempia asioita kuin mihin paljas silmä pystyy, ja myös näkemään esineiden sisälle avaamatta niitä.

Aloitetaan esimerkillä, joka on useimmille tuttu. Röntgenkuvaus eri muodoissaan on tärkeä ja yleinen diagnostinen toimenpide nykyaikaisessa lääketieteessä, ja menetelmä on jokapäiväisessä käytössä myös lentomatkustamisen yhteydessä suoritettavassa käsimatkatavaroiden läpivalaisussa. Tietokonetomografiakuvaus, eli amerikkalaisista sairaalasarjoista tuttu ”CAT scan”, pystyy tuottamaan huomattavan tarkkoja kuvia esimerkiksi aivojen rakenteesta ilman pääkalloa avaavaa leikkausta.

Minkälaista matematiikkaa tietokonetomografiaan liittyy? Röntgensäteet koostuvat korkeaenergisistä fotoneista, jotka kulkevat ihmisen läpi oleellisesti suoria viivoja pitkin. Ihmisen eri kudokset vastustavat säteen kulkua tavalla, jota kuvataan attenuaatiokertoimilla. Röntgensäteiden avulla voidaan mitata attenuaatiokertoimien summia eri suoria pitkin (kuva 1). Kuvassa 2a on merkitty neliönmuotoisen kuvattavan kappaleen attenuaatiokertoimien vaakasuorat summat, pystysuorat summat ja lävistäjän suuntaiset summat.



Kuva 1. Röntgensäteet mittaavat attenuaatiokertoimien summia suoria pitkin. (Kuvat 1 ja 2a, 2b: Samuli Siltanen.)



Kuva 2. Tietokonetomografian (a) suora ongelma: määritä attenuaatiosummat, kun kertoimet tunnetaan, ja (b) käänteinen ongelma: määritä attenuaatiokertoimet, kun summat tunnetaan.

Tietokonetomografian suora ongelma on: jos kudos eli attenuaatiokertoimet tunnetaan, mitkä ovat summat suorien yli? Tämä ei ole vaikea ongelma. Käytännössä huomattavasti kiinnostavampi on käänteinen ongelma eli inversio-ongelma: jos tunnetaan röntgenmittaukset suorien yli, miten muodostetaan kuva kudoksesta? Eli jos tunnetaan attenuaatiosummat suorien yli, mitkä olivat alkuperäiset attenuaatiokertoimet (kuva 2b)?

Yllä esitetty röntgenkuvauksen inversio-ongelma on klassinen matemaattinen ongelma, jonka oleellisesti ratkaisi Johann Radon jo vuonna 1917. Ongelman jatkuvassa muotoilussa attenuaatiokertoimia kuvaa tasossa määritelty riittävän säännöllinen reaaliarvoinen funktio f. Inversio-ongelman matemaattinen muotoilu on: jos tunnetaan funktion f integraalit eli jatkuvat summat kaikkien tason suorien yli, voidaanko näistä määrätä funktio f? Matemaattiseen esitykseen kuuluu aina vähintään yksi kaava, ja seuraavassa annetaan ilman tarkempia perusteluja tämän tekstin ainoat kaavat (lisätietoa löytyy esimerkiksi kirjasta [1]). Jos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on riittävän säännöllinen funktio, sen Radon-muunnos on funktio

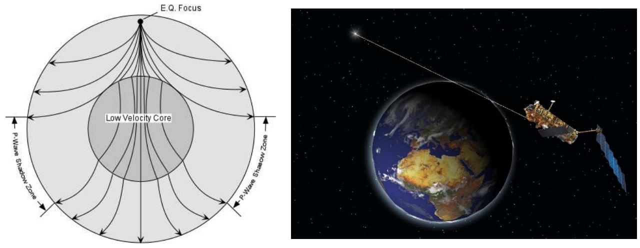
$$Rf(s,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\omega_\alpha + t\omega_\alpha^\perp)\,dt, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in [0,2\pi).$$

Tässä $\omega_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ ja $\omega_\alpha^\perp = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$. Radon-muunnos parametrien s ja α eri arvoilla esittää funktion f integraalit tason suorien yli. Seuraava Radonin käänteiskaava kertoo, miten alkuperäinen funktio f määrätään Radon-muunnoksesta:

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{s}\partial_s Rf(x\cdot\omega_\alpha + s, \alpha)\,d\alpha\,ds.$$

Tämän kaavan ja sen erilaisten diskreettien versioiden avulla pystytään siis muodostamaan kuvia kudoksesta, kun röntgenmittaukset tunnetaan.

Radon tutki ylläolevaa ongelmaa puhtaasta tieteellisestä mielenkiinnosta ajattelematta käytännön sovelluksia. Hyvä esimerkki vapaan tutkimuksen hyödyllisyydestä on se, että 1970-luvulla, jolloin teknologia oli riittävän kehittyneellä tasolla, Allan Cormack ja Godfrey



Kuva 3. (a) Maanjäristyksen aiheuttamien ääniaaltojen eteneminen maapallon läpi (kuva: Stephen A. Nelson, Tulane University), (b) GOMOS-instrumentti (kuva: Ilmatieteen laitos).

Hounsfield kehittivät samaan matematiikkaan perustuvan tietokonetomografiaskannerin. Tietokonetomografia auttaa nykyään miljoonia ihmisiä sairausten diagnosoinnissa, ja Cormack ja Hounsfield saivat työstään Nobelin lääketieteen palkinnon vuonna 1979. Tässä yhteydessä mainitaan toisinaan eräs yksityiskohta: Hounsfield työskenteli EMI -yhtiössä, joka on nykyäänkin toiminnassa oleva levy-yhtiö. EMI oli 1970-luvulla huomattavan varakas yhtiö, mihin vaikuttivat osaltaan The Beatlesin levyistä saadut valtavat myyntitulot. Tällä tavalla The Beatles epäsuorasti tuki EMI:n elektroniikkaosaston toimintaa ja mahdollisti Hounsfieldin pitkäjänteisen skannerin kehittämistyön!

Radon-muunnoksen matematiikka toimii lääketieteellisen kuvantamisen lisäksi monessa muussakin tilanteessa. Sen avulla voidaan kuvantaa hyvin pieniä asioita, kuten viruksia (esimerkiksi HI-virus) elektronimikroskoopilla. Tässä sovelluksessa röntgensäteet korvataan elektronisuihkuilla, mutta kuvantamisen matematiikka on hyvin samanlaista. Virusten kuvantamiseen liittyy kuitenkin yksi erityispiirre: virukset ovat hyvin pieniä, ja monesti on vaikea tietää tarkasti, mistä suunnista mittaukset on saatu. Kuvan muodostaminen on mahdollista myös tässä tuntemattomien suuntien tapauksessa, ja tilanteen matemaattinen analyysi hyödyntää algebrallisen geometrian menetelmiä.

Siirrytään hyvin pienistä esineistä suuremman mittakaavan asioihin. Kuten tiedämme, Japanissa tapahtui 11.3.2011 tuhoisa maanjäristys. Järistykset aiheuttavat suurta vahinkoa ja inhimillistä kärsimystä, mutta toisaalta niiden avulla saadaan tietoa maapallon rakenteesta. Seismisissä kuvantamismenetelmissä käytetään maanjäristysten aiheuttamia ääniaaltoja, jotka kulkevat maapallon läpi ja sisältävät informaatiota planeettamme syvästä rakenteesta. Ääniaallot eivät yleensä etene suoria viivoja pitkin (kuva 3a), ja tämän vuoksi seismisessä kuvantamisessa esiintyvien Radon-muunnosten matemaattinen analyysi on usein haastavampaa kuin röntgenkuvauksen vastaavissa ongelmissa.

Radon-muunnoksen matematiikkaa voidaan käyttää vieläkin suuremmissa skaaloissa, kuten avaruustutkimuksessa. Euroopan avaruusjärjestön ESA:n tutkimuskalustoon kuuluu Envisat-satelliitti, jossa on mukana suomalaistenkin kehittämä ilmakehän otsonimääriä mittaava GOMOS-instrumentti. GOMOS mittaa tähtien valon kirkkautta. Tähdet säteilevät valoa, ja kun valo kulkee ilmakehän läpi, niin ilmakehän kaasut, kuten otsoni, vastustavat valon kulkua samalla tavalla kuin ihmiskudos vastustaa röntgensäteiden kulkua. Mittaustuloksena saadaan jälleen kerran integraaleja suorien yli (kuva 3b). Radon-muunnos esiintyy siis tässäkin ongelmassa, jossa eräänä erityispiirteenä ovat suuret mittausmäärät, joiden käsittelyssä käytetään hyväksi tilastollisia menetelmiä.

Tässä kirjoituksessa on esitelty useita tilanteita, joissa Radon-muunnoksen matematiikka luo ihmiselle uudet silmät. Näillä silmillä pystytään havaitsemaan asioita, joita paljas silmä ei erota. Voi tuntua yllättävältä, että samantyyppiset matemaattiset menetelmät toimivat näin monessa erilaisessa sovelluksessa; tämä kuvastaa hyvin matematiikan universaalia luonnetta ja ”käsittämätöntä toimivuutta” (*unreasonable effectiveness of mathematics*, kuten fyysikko Eugene Wigner asian muotoili [2]).

Viitteet

[1] F. Natterer, The mathematics of computerized tomography. John Wiley & Sons Inc, 1986.

[2] E.P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 1–14.

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I – VI tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Vastauksia voi pyytää koulun sähköpostiin.