



Jouluaatto on harvemmin sunnuntaina

Matti Lehtinen

Helsingin yliopisto

Kun uusi kalenteri ilmestyy, moni tarkastaa, mille viikonpäivälle jouluku, vappu tai oma syntymäpäivä sattuu. Sehän vaihtelee, mutta tuntuu kuitenkin siltä, että aikojen kuluessa kaikki viikonpäivät esiintyvät yhtä usein. Mutta onkohan asia ihan varmasti näin? Laskeetaanpa!¹ Voisimme käyttää hyväksi modulaariaritmetiikkaa, mutta selviämme mainiosti ihan alkeellisillakin keinoilla.

Noudattamassamme, gregoriaaniseksi kutsutussa kalenterissa vuoden pituus on tavallisesti $365 = 52 \cdot 7 + 1$ päivää. Kuitenkin ne vuodet, joiden vuosiluku eli järjestysnumero on jaollinen neljällä, ovat karkausvuosia, ja niissä on $366 = 52 \cdot 7 + 2$ päivää. Tähän poikkeukseen liittyy vielä poikkeuksen poikkeus: vuodet, joiden vuosiluku on jaollinen 100:llä, mutta ei 400:llä, eivät ole karkausvuosia. Siten vuosi 2000 oli karkausvuosi, mutta esimerkiksi vuodet 1900, 2100 ja 2200 eivät ole. Tämä hiukan monimutkainen järjestely perustuu siihen, että vuosi määräytyy Maan kierrosta Auringon ympäri ja vuorokausi Maan kierrosta oman akselinsa ympäri. Nämä kiertoliikkeet eivät ole synkronissa. Jälkimmäisiä kierroksia ehtii edellisen kierroksen aikana tapahtua hiukan vähemmän kuin $365 \frac{1}{4}$ kappaletta. Karkausvuosijärjestelyllä taataan se, että vuodenaajat pysyvät kalenterissa omilla paikoillaan tuhansienkin vuosien kuluessa. Siitä kuitenkin seuraa, että kalenteripäivien ja viikonpäivien vastaavuus on hiukan epäsäännöllinen. Yleensä tietyn kalenteripäivän viikonpäivä on

ensi vuonna ”yhtä suurempi” kuin tänä vuonna: kun uudenvuoden päivä vuonna 2011 oli lauantai, vuonna 2012 se on sunnuntai. Karkausvuoden ”ylimääräinen” päivä on 29. helmikuuta, joten karkausvuosien kalenteripäivät maaliskuusta alkaen siirtyvät viikonpäivinä kahdella edelliseen vuoteen verrattuna: kun vappuaatto vuonna 2011 oli lauantai, se on karkausvuonna 2012 maanantai.

Tarkastellaan mitä tahansa 400 vuoden jaksoa. Siinä on 97 karkausvuotta ja 303 tavallista vuotta. Tällaisessa jaksossa on päiviä kaikkiaan $400 \cdot 52 \cdot 7 + 2 \cdot 97 + 303$ kappaletta. Mutta $2 \cdot 97 + 303 = 497 = 71 \cdot 7$. Neljänsadan vuoden jaksossa olevien päivien lukumäärä on siis jaollinen seitsemällä, joten tällaisessa jaksossa on tasamäärä viikkoja ja jokainen viikonpäivä esiintyy yhtä monta kertaa. Ja jos jokin viikonpäivä aloittaa tällaisen jakson, seuraava 400 vuoden jakso alkaa samasta viikonpäivästä. Jos jokin kalenteripäivä, vaikkapa jouluaatto, sattuu tietylle viikonpäivälle jonkin 400 vuoden jakson aikana tietyn määrän kertoja, niin se sattuu tälle viikonpäivälle yhtä monta kertaa jokaisen 400 vuoden jakson aikana.

Vuonna 2011 jouluaatto on lauantaina. Tämä merkitsee sitä, että jouluaatto on lauantaina myös vuonna 2411. Selvitetään, kuinka usein jouluaatto on eri viikonpäivinä vuosina 2011 – 2410, siis 400 vuoden jaksossa. Ensimmäinen havainto on, että sellaisen 28 vuoden jakson

¹Laskelman inspiraationa on kokoelmassa *D.O. Shklyarsky, N.N. Chentsov ja I.M. Yaglom: Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics*, Mir Publishers, Moskova 1979, esitetty tehtävä.

aikana, jonka kuluessa ovat tavalliset 7 karkausvuotta ja 21 tavallista vuotta, 52 viikkoa ylittyä 21 kertaa päivällä ja 7 kertaa kahdella päivällä. Ylittymisiä on siis 35 eli seitsemällä jaollinen määrä. 28 tällaiseen vuoteen sisältyy siis tasamäärä viikkoja, ja peräkkäiset tällaiset jaksot sisältävät saman määrän tietyn kalenteripäivän sattumisia tietyksi viikonpäiväksi. Jouluaatto vuonna 2012 (joka on karkausvuosi) on siis maanantai, vuonna 2013 tiistai, 2014 keskiviikko, 2015 torstai, 2016 lauantai, 2017 sunnuntai jne. Saamme seuraavan taulukon:

2011	la	2018	ma	2025	ke	2032	pe
2012	ma	2019	ti	2026	to	2033	la
2013	ti	2020	to	2027	pe	2034	su
2014	ke	2021	pe	2028	su	2035	ma
2015	to	2022	la	2029	ma	2036	ke
2016	la	2023	su	2030	ti	2037	to
2017	su	2024	ti	2031	ke	2038	pe

Taulukosta saamme helposti laskettua, että jouluaatto on tällaisessa vuoden jaksossa yhtä usein kunakin viikonpäivänä. Tästä päättelemme, että vuosina 2039 – 2066 ja 2067 – 2094 jouluaatto sattuu yhtä usein jokaiselle viikonpäivälle ja että vuonna 2095 se sattuu taas lauantaille. Vuosi 2100 ei ole karkausvuosi. Vuosina 2095 – 2100 jouluaaton viikonpäivät ovat siis järjestyksessä lauantai, maanantai, tiistai, keskiviikko, torstai ja perjantai. Vuonna 2101 jouluaatto on taas lauantai. Nyt voimme aloittaa uudet 28 vuoden jaksot, 2101 – 2128, 2129 – 2156 ja 2157 – 2184, joina jouluaatto on yhtä usein joka viikonpäivänä. Vuonna 2185 ollaan taas lauantaisissa. Kun vuodet 2180 – 2200 käydään läpi yksitellen, saadaan lasketuksi, että tuona aikana jouluaatto on vain kerran perjantaina, kahdesti sunnuntaina, tiistaina ja torstaina, mutta kolmesti maanantaina ja lauantaina. Lisäksi vuoden 2201 jouluaatto sattuu torstaihin. Vuosien 2201 – 2300 väli menee samoin, mutta kahden viikonpäivän siirroilla. Vuosina 2210 – 2284 kaikki viikonpäivät ovat yhtä usein jouluaattoina ja vuoden 2285 jouluaatto on torstai. Vuosina 2285 – 2300 jouluaattoissa on yksi keskiviikko, kaksi sunnuntaita, tiistaita ja perjantaita ja kolme torstaita ja lauantaita. Vuoden 2300 jouluaatto on maanantai ja

vuoden 2301 jouluaatto on tiistai.

Vuosi 2400 on karkausvuosi. Koska $4 \cdot 28 = 112$, vuosina 2301 – 2412 jouluaatto sattuu yhtä monesti kullekin viikonpäivälle. Vuosi 2411 alkaa uuden 400-vuotisen jakson. Vuosien 2411 ja 2412 jouluaatot ovat lauantaina ja maanantaina. Vuosina 2301 – 2410 lauantai ja maanantai esiintyvät siis yhden kerran harvemmin kuin muut viikonpäivät.

Kerätään nyt yhteen havaitut poikkeamat viikonpäivien tasaisesta jakautumisesta:

	ma	ti	ke	to	pe	la	su
2095-2100	0	0	0	0	0	0	-1
2185-2200	3	2	3	2	1	3	2
2285-2300	3	2	1	3	2	3	2
2301-2410	-1	0	0	0	0	-1	0

Kun sarakkeet lasketaan yhteen, huomataan, että kaikkiaan jouluaatto on harvimmin perjantaina ja sunnuntaina, yhden kerran useammin (siis aina 400 vuoden aikana!) keskiviikkoisin ja torstaisin, ja että maanantain, torstain ja lauantain esiintymisten lukumäärä on kaksi enemmän kuin perjantain ja sunnuntain. Erot ovat kovin pieniä, eikä niillä taida olla merkitystä meidän kenenkään elinaikaan suhteutettuina. Alussa esitetyn laskun mukaan 400 vuoden jaksossa on viikkoja $400 \cdot 52 + 71 = 20871$ kappaletta. Kukin viikonpäivä esiintyy jakson aikana näin monta kertaa. Kalenteripäivää kohti sattuva enintään kahden päivän ero on alle 0,1 promillea.

Vuoden 2011 kalenterin perusteella ja edellisen laskelman perusteella voi tehdä päätelmiä minkä tahansa kalenteripäivän osumisesta eri viikonpäiville. Esimerkiksi itsenäisyyspäivä on vuonna 2011 tiistai. Tästä seuraa, että itsenäisyyspäivä on useimmin sunnuntaina, tiistaina ja torstaina, ja harvimmin maanantaina ja keskiviikkona. – Pääsiäisen määräytyminen on monimutkaisempien laskujen takana: siihenhän on Maan ja Auringon ohella sanansa sanottavana myös Kuulla. Mutta pääsiäissunnuntai sattuu aina sunnuntaiksi ja pitkäperjantai on aina perjantai!