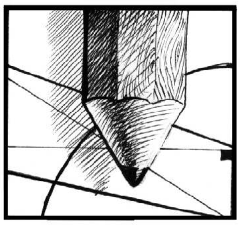


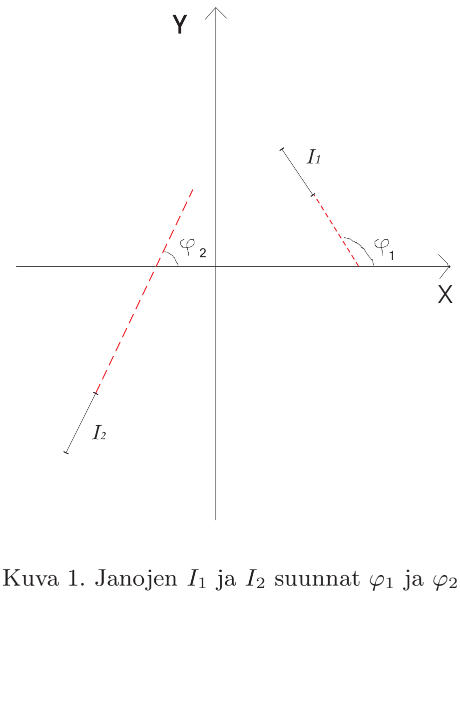
Geometrisia paradokseja: neulankääntöä ja digitaalisia aurinkokelloja

Pertti Mattila
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kakeyan ongelma ja Besicovitchin joukot

Vuonna 1917 japanilainen matemaatikko Kakeya kysyi: ”Kuinka pienessä (pinta-alaltaan) tasoalueessa neula voidaan kääntää ympäri?” Ympärikääntäminen tarkoittaa, että neulaa liikutetaan jatkuvalla liikkeellä pitäen se koko ajan kyseisessä alueessa ja lopussa se on samassa kohdassa kuin alussakin, mutta vastakkaisessa suunnassa. Neula on idealisoitu: sillä on tietty pituus, mutta ei paksuutta. Tuntuisi uskottavalta, että vastauksena olisi joku positiivinen luku, joka riippuisi neulan pituudesta. Näin ei kuitenkaan ole. Oli neulan pituus mikä tahansa, voidaan löytää pinta-alaltaan mielivaltaisen pieni alue, jossa tämä kääntäminen pystytään tekemään. Tällainen alue on kuitenkin aika monimutkainen. Esimerkiksi se ei voi olla konveksi (eli alue joka sisältää jokaisen pisteparinsa yhdistävän janan), vaan pienin haluttu konveksi alue on tasasivuinen kolmio, jonka korkeusjana on neulamme pituinen.

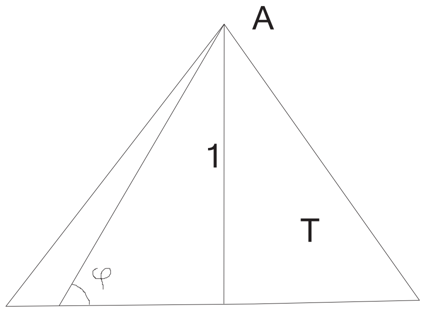
A.S. Besicovitch konstruoi vuonna 1919 yllämainitun pienialaisen alueen, jossa neula voidaan kääntää ympäri. Hänen ratkaisunsa antoi myös tasojoukon, jonka pinta-ala on nolla ja joka sisältää yksikön pituisen janan jokaisessa suunnassa. Yleisen tasojoukon pinta-ala on hieman mutkikas käsite, mutta pinta-ala nolla tarkoittaa vain, että kyseinen joukko voidaan peittää neliöillä, joiden pinta-alojen summa on mielivaltaisen pieni. Tämä oli itse asiassa se ongelma, jota Besicovitch ryhtyi ratkaisemaan, koska hän oli huomannut, että sen avulla saa selvitettyä erään integrointiin liittyvän kysymyksen. Besicovitch syntyi Venäjällä vuonna 1891, eikä vuonna 1919 ollut kuullutkaan Kakeyan ongelmasta. Yhteydet vallankumouksen jälkeisen Venäjän ja muun tieteellisen maailman välillä eivät olleet parhaat mahdolliset. Besicovitch siirtyi Kööpenhaminaan vuonna 1924 ja sieltä muutaman vuoden päästä Cambridgeen, Englantiin, jossa hän toimi kuolemaansa asti eli vuoteen 1970.



Kuva 1. Janojen I_1 ja I_2 suunnat φ_1 ja φ_2.

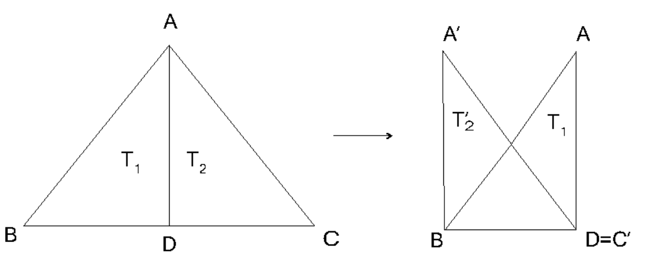
Selitän nyt lyhyesti geometriset perusideat, joilla nämä paradoksaaliset joukot saadaan konstruoitua. Pyritään ensin muodostamaan alaltaan pieni tasoalue, joka sisältää yksikön pituisen janan (neulan) kaikissa suunnissa. Janan suunnalla tarkoitan kulmaa φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$, kuten kuvassa 1. Siis jos jana sijaitsee suoran $y = kx$ suuntaisella suoralla, k on kulman φ tangentti.

Lähdetään liikkeelle tasasivuisesta kolmiosta T, jonka kanta on x-akselilla, yksi kärki A positiivisella y-akselilla ja jonka korkeusjanan pituus on yksi. Selvästi T sisältää A:sta lähtevän yksikön pituisen janan kaikissa suunnissa φ, $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$, ks. kuva 2.



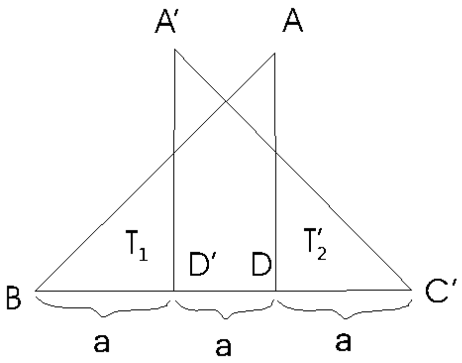
Kuva 2.

Pyritään nyt pienentämään T alueeksi, jossa emme ole menettäneet yhtään yksikköjanojen suunnista φ väliltä $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$. Jaetaan T kahteen osakolmioon T_1 ja T_2 kuvan 3 osoittamalla tavalla ja siirretään T_2:ta niin, että ne menevät osittain päällekkäin.



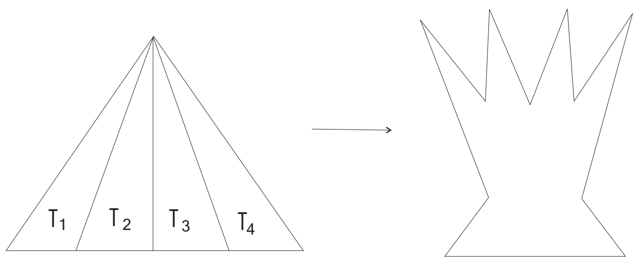
Kuva 3.

Jos $T_2^{'}$ on siirrolla saatu kolmio ja $A^{'}$ sen A:ta vastaava kärki, $T_2^{'}$ sisältää $A^{'}$:sta lähtevät yksikköjanat kaikilla suunnilla φ, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$, ja T_1 sisältää A:sta lähtevät yksikköjanat kaikilla suunnilla φ, $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Kuvassa 3 siirto on tehty niin, että T_1:n ja $T_2^{'}$:n kannat yhtyvät. Tällöin T:n pinta-ala $\frac{1}{\sqrt{3}}$ on pienentynyt alaksi $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$. Parempi tulos saadaan, jos kannat siirretään vain osittain päällekkäin kuten kuvassa 4. Tällöin T_1:n ja $T_2^{'}$:n muodostama ala on $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.



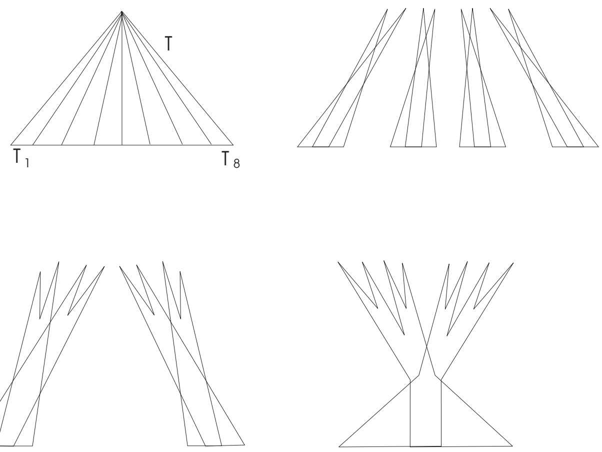
Kuva 4. $a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vielä enemmän alaa saadaan pienennettyä menettämättä yksikköjanojen suuntia jakamalla T neljään osaan ja siirtämällä niitä sopivasti osittain päällekkäin, kuten kuvassa 5.



Kuva 5.

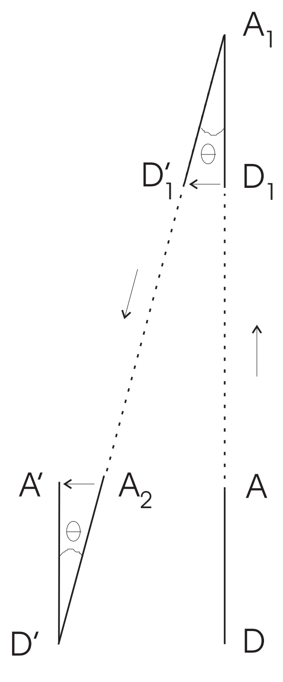
Kuvassa 6 on T jaettu kahdeksaan osaan ja niitä on siirretty kolmessa vaiheessa.



Kuva 6.

Jakamalla T näin tarpeeksi moneen osaan saadaan mielivaltaisen pieni alue, joka sisältää yksikön pituisen janan kaikissa suunnissa φ, $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$. Kun tätä aluetta kierretään 60° myötä- ja vastapäivään ja otetaan näin saatujen kolmen alueen yhdiste, saadaan pinta-alaltaan mielivaltaisen pieni tasoalue, joka sisältää yksikköjanan kaikissa suunnissa.

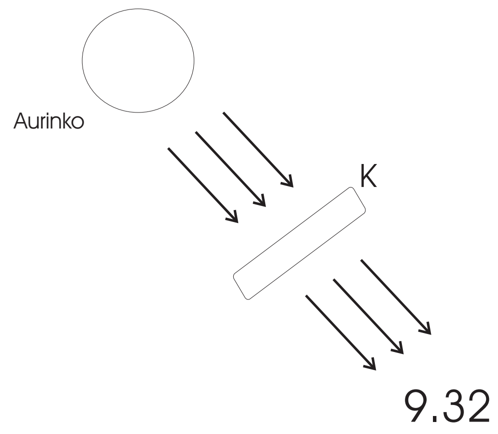
Tällä konstruktiolla saadaan myös Besicovitchin joukko, tason nolla-alainen osajoukko, joka sisältää yksikön pituisen janan jokaisessa suunnassa. Mutta se ei vielä ratkaise Kakeyan ongelmaa. Edes kuvan 4 tilanteessa yksikköjanaa ei voida *jatkuvasti* kiertää suunnasta $\frac{\pi}{3}$ suuntaan $\frac{2\pi}{3}$. Tämän aikaansaamiseksi täytyy käyttää myös toista yksinkertaista geometrista toimitusta. Katsotaan kuvaa 4 ja yritetään siirtää A:sta lähtevä ykkösen pituinen AB:n osajana A':sta lähtevälle $A'C'$:n osajanalle peittämällä mahdollisimman vähän pinta-alaa kolmioiden $T_1 = ABD$ ja $T_2' = A'C'D'$ ulkopuolella. Ensin tämä jana voidaan T_1:n sisällä kääntää janaksi AD. Samoin $A'D'$ voidaan kääntää T_2':n sisällä halutuksi $A'C'$:n osajanaksi. Ongelmaksi jää siis liikuttaa jana AD janaksi $A'D'$ peittämällä mahdollisimman vähän pinta-alaa. Tämä voidaan tehdä seuraavasti, ks. kuva 7. Siirretään ensin AD suoraa pitkin kauas janaksi A_1D_1. Sitten käännetään tämä A_1D':n osajanaksi A_1D_1'. Siirretään A_1D_1' suoraa pitkin janaksi A_2D' ja käännetään tämä janaksi $A'D'$. Paljonko pinta-alaa olemme käyttäneet? Suoria pitkin siirrettäessä emme yhtään. Kummassakin kääntämisessä saman verran eli $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, missä θ on janojen A_1D_1 ja A_1D_1' välinen kulma. Kun A_1 valitaan tarpeeksi kaukaa A:sta, kulma θ saadaan mielivaltaisen pieneksi ja täten myös käytetty pinta-ala.



Kuva 7.

Näkyvät ja näkymättömät joukot

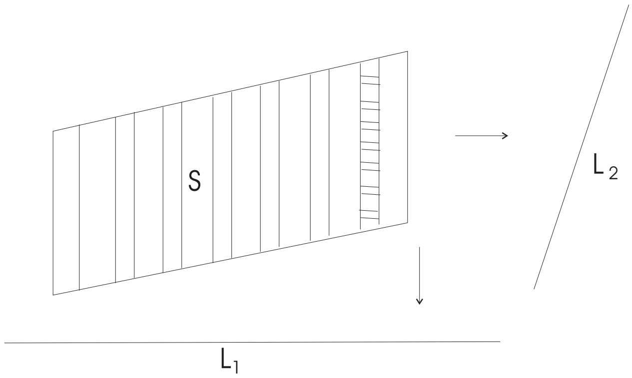
Tarkastellaan toisenlaista paradoksaalista geometrista ilmiötä: näkymätön voi muuttua näkyväksi. Sanomme, että tarkastelemamme avaruutemme geometrinen objekti on näkyvä, jos se auringon paistaessa jättää näkyvän varjon, muuten se on näkymätön. Mutta voiko tämä riippua suunnasta, josta aurinko paistaa? Toisin sanoen, voiko joukkomme olla aamupäivällä näkymätön ja iltapäivällä näkyä? Kyllä se voi, kuten skottimatematiikko K.J. Falconer on osoittanut. Tarkemmin sanottuna voidaan konstruoida avaruuskappale, joka jokaisena ajanhetkenä (jolloin aurinko paistaa) jättää halutun varjon. Erityisesti jos haluamme, että jokaisena kellonaikana varjona on tämän kellonajan numerot (digitit), saamme tulokseksi digitaalisen aurinkokellon eli hökötyksen K, jonka varjo näyttää kulloisenkin ajanhetken numerot.



Kuva 8.

Falconerin tulos on puhtaasti matemaattinen, mutta se voidaan toteuttaa myös käytännössä. Keksijät Hans Scharstein, Daniel Scharstein ja Werner Krotz-Vogel patentoivat työnsä Saksassa ja Yhdysvalloissa vuonna 1994. Heidän rakentamaansa digitaalista aurinkokelloa voi ostaa 91 euron hintaan. Tietoja tästä löytyy sivulta http://www.digitalsundial.com.

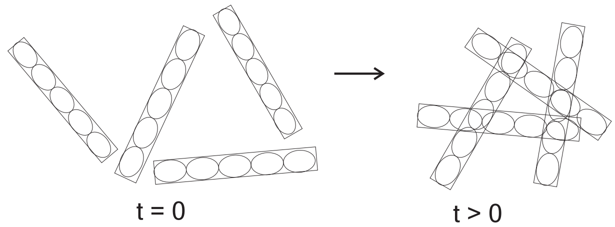
Teknisesti matemaattinen konstruktio on mutkikas, mutta perusidea on yksinkertainen. Katsotaan sitä tasossa. Otetaan suunnikas S ja sen sisältä kapeita yhden sivun suuntaisia osasuunnikkaita kuten kuvassa 9. Näiden kapeiden osasuunnikkaiden yhdisteen projektio (varjo) on pieni suoralla L_1 ja sitä lähellä olevilla suorilla, mutta muilla suorilla se on sama kuin S:n projektio. Seuraavaksi tehdään sama operaatio eri suunnassa kaikkien kapeiden suunnikkaiden sisässä, jolloin projektio on pieni L_1:ä ja L_2:a lähellä olevilla suorilla, mutta sama kuin S:n projektio muilla suorilla. Tällaisia operaatioita toistamalla useassa eri suunnassa pääsemme jo hyvin lähelle (ainakin tasossa) alussa haikailemaamme kappaletta, joka on näkymätön aamupäivällä ja näkyy iltapäivällä.



Kuva 9.

Signaaleja ja saippuakalvoja

Ovatko yllä tarkastellut paradoksaaliset ilmiöt vain kuriositeetteja vai onko niillä jotain yleisempää merkitystä? Yllämainitut fraktaaliset digitaalikellot ovat ainakin toistaiseksi enemmän hauskoja leluja kuin hyödyllisiä kapineita. Mutta Kakeyan ongelmaan sekä näkyvyyteen ja näkymättömyyteen liittyvät kysymykset ovat yhteydessä eräisiin nykymatematematiikan keskeisimpiin kysymyksiin. Niitä ovat viimeisten 30 vuoden aikana tutkineet useat huippumatemaatikot, joiden joukossa on kolme Fieldsin mitalistia C. Fefferman, J. Bourgain ja T. Tao. Matematiikassahan ei jaeta Nobeleita ja Fieldsin mitali on eräs matematiikan arvostetuimmista palkinnoista. Kakeya-tyyppisten ilmiöiden perusteellisempi ymmärtäminen liittyy ns. aaltoyhtälön ratkaisujen käyttäytymisen ymmärtämiseen. Aaltoyhtälö on differentiaaliyhtälö, joka kuvaa aaltojen etenemistä, esimerkiksi ääni- tai sähkömagneettisten aaltojen. Tällaisten aaltojen voidaan ajatella koostuvan aaltopaketeista, joiden osaset keskittyvät kapeisiin putkiin (kolmiulotteisiin neuloihin). Kun paketti (signaali) lähtee liikkeelle, osaset ovat siististi erillään, mutta sen edetessä ne voivat mennä päällekkäin mahdollisesti muodostaen Kakeya-tyyppisiä konfiguraatioita, jotka aiheuttavat signaaliin häiriöitä. Kakeya-tyyppisten joukkojen ominaisuuksien selvittäminen auttaa ymmärtämään missä määrin tällaisia singulariteettejä voi syntyä. Näkyvyyteen ja näkymättömyyteen liittyvät kysymykset taas ovat merkittäviä (vaikkakin monen mutkan kautta) esimerkiksi saippuakalvojen, eli minimaalipintojen, teoriassa, enemmän kuitenkin abstraktien korkeaulotteisten sellaisten, kuten kolmiulotteisten minimaalipintojen suhteellisuusteorian neliulotteisessa avaruudessa.



Kuva 10.

Tämä kirjoitus perustuu artikkeleihin

P. Mattila: Voiko näkymätön näkyä: geometrisen mittateorian paradokseja. - Arkhimedes 2/2004, 17-22,

P. Mattila: Fraktaaligeometriaa ja matemaattista analyysiä. - Sphinx, vuosikirja 2009-2010, 63-68.

Verkko-Solmussa ilmestyneitä uusia kirjoituksia

Tuomas Korppi: Lukualueiden laajentamisesta

`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/nonarkh.pdf`

Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen: Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta

`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/Poranen-Haukkanen.pdf`