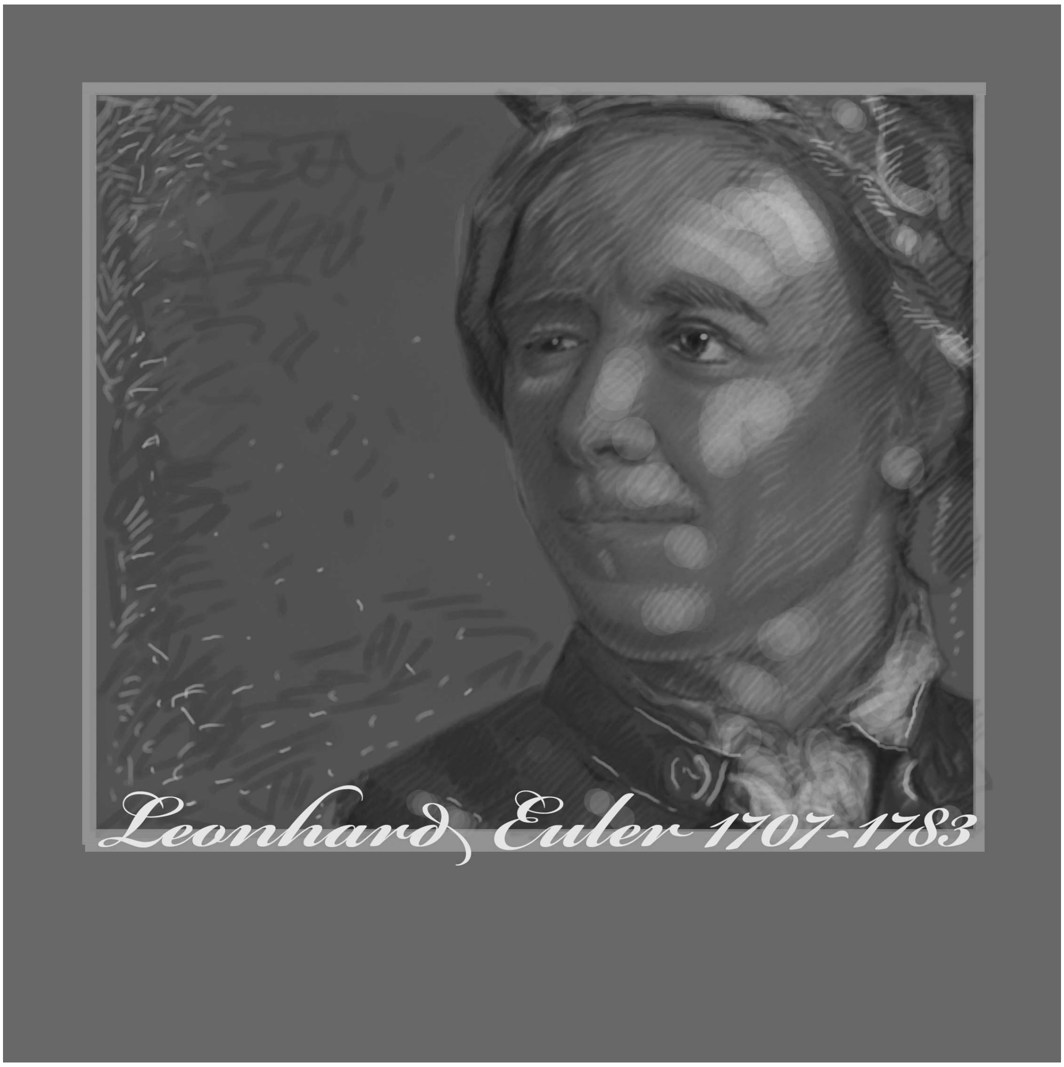
Solmu

Matematiikkalehti
2/2011

http://solmu.math.helsinki.fi



Solmu 2/2011

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi

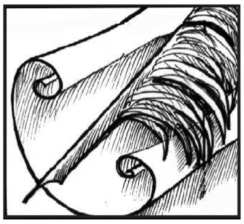
Numeroon 3/2011 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 11.9.2011 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Kansi: Leonhard Euler (1707–1783), yksi kaikkien aikojen merkittävimpiä matemaatikoita.

Sisällys



Mainintoja maaliskuulta

Koulumatematiikan opiskelun kulminaatiokohta, matematiikan ylioppilaskirjoitukset järjestettiin taas 23. maaliskuuta. Tehtävät asettanut Ylioppilastutkintolautakunnan matematiikan jaos pelasi ainakin pitkän matematiikan kokeessa selvästi varman päälle. Aiheellista kritiikkiä on useasti saanut se, että – suhteellisen arvostelun pakottamana – kokeen on voinut hyväksytysti suorittaa skandaalimaisen vähäisellä osaamisella. Kokeen pistejakauma ei tätä kirjoitettaessa ole tiedossa. Arvata sopii, että hyväksyttyyn suoritukseen tullaan tarvitsemaan kymmenjärjestelmässä kahdella numerolla kirjoitettava pistemäärä. Hyvä niin.

Mutta kun katsoo vähän tarkemmin kokeen 15 tehtävän sarjaa (vain kymmeneen tehtävään saa vastata), ei oikein matematiikan puolesta pysty iloitsemaan, vaikka kokeeseen onkin saatu värikkyyttä tehtäväpaperiin painetun värikuvan avulla. Tehtävät ovat kauttaaltaan perin helppoja ja yksinkertaisia. Matematiikkaa siinä mielessä kuin itse tämän tieteen ytimen ymmärrän, ei oikeastaan ole ollenkaan. Tehtävissä on tasan yksi sana ”näytä”, sekin kohdassa, jossa ”näytettävä” asia on laskutoimituksen tulos.

Ei kai voi sitä kritisoida, että ylioppilaskirjoituksissa, pitkän matematiikan kokeessakin, annetaan tehtäväksi ensimmäisen asteen yhtälön $2/x = 3/(x-2)$ ratkaiseminen. Perusosaaminen tulee tarkistaa. Mutta voisi kyllä olettaa, että lukuteorian kurssiin liittyen tehtäisiin hiukan haastavampi kysymys kuin luvun $46^{78} + 89^{67}$ jaollisuus viidellä (tehtävä 12) tai analyysissä olisi vähän haastavampi raja-arvotehtävä kuin $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (tehtävä 11, c-kohta). Tuntemani lukionopettaja oli turhautunut: eihän matematiikkaa enää kannata opettaa, kun päättökoe on kuitenkin tällainen!

Matematiikka ei ole helppoa, ja matematiikasta kiinnostuneille sen tekee kiinnostavaksi juuri haasteellisuus. Haasteita saa – totta kai – omaehtoisesti harrastaen ja matematiikkakilpailuissa. Mutta kyllä suuri merkitys olisi silläkin, että keskeinen kansallinen instituutiomme ylioppilaskoe tarjoaisi hiukan mahdollisuutta todellisenkin osaamisen esittämiseen. – Viime vuosina Teknologiateollisuuden satavuotissäätiö on palkinnut varsin anteliaasti hyviä matematiikan ylioppilaskoesuorituksia. Ei oikein voi välttyä ajatukselta, että tämän kevään kokeesta saadut 66 pistettä eivät juuri oikeuttaisi kovin merkittäviin palkitsemisiin.

* * *

Puhe matematiikan opetuksen tilasta kiertyy aina ennen pitkää PISA-tutkimuksen suomalaista osaamista imarteleviin tuloksiin. Näyttää syntyneen kaksi puoluetta: opetushallinto, luokanopettajat ja kasvatustieteellisesti orientoituneet tutkijat jakavat melko varauksetta käsityksen, jonka mukaan PISA-tutkimuksen tulokset osoittavat, että Suomessa opetetaan ja opitaan matematiikkaa oikein ja (ainakin melkein) maailman parhaalla tavalla. Toinen, PISA-kriittinen puolue viittaa moniin indikaattoreihin (kuten TIMMS-tutkimukseen ja laskutaidon heikkenemistä dokumentoineisiin suomalaisiin pitkittäistutkimuksiin sekä kilpailutuloksiin) ja silminnäkijähavaintoihin, joiden mukaan suomalaisten nuorten matematiikan osaamisessa on – kauniisti sanottuna – aika paljon parantamisen varaa. Tämän suuntauksen näkemyksen mukaan PISA-tutkimuksen (ei julkaistut) tehtävät mittaavat lähinnä lukutaitoa, luetun tekstin ymmärtämistä tai yleistä, ei erityisesti matematiikkaan liittyvää älykkyyttä, mutta opitun ja opetetun matematiikan taidon mittaamisen kanssa tehtävillä on vähän jos ollenkaan tekemistä. Matematiikka, sananmukaisesti 'se mitä on opittava', on kuitenkin paljon muutakin kuin yleistä ymmärrystä ja arkielämän viisautta: se on aikojen kuluessa syntynyt rakennus ja kehikko, joka myös tukee arkiajattelua, mutta on myös välttämätön voiteluaine kaiken sen luonnontieteellis-teknisen koneiston pyörittämisessä, jonka varassa elämämme ja kulttuurimme täällä toimii. Ja monelle meistä matematiikkaan liittyvät hienoimmat kauneuselämykset ja hienot onnistumisen tunteen hetket.

Maaliskuussa PISA oli taas esillä. Arvovaltainen Suomalainen tiedeakatemia oli järjestänyt avoimen PISA-seminaarin. En muiden velvoitteiden vuoksi voinut lähteä pääkaupunkiin, mutta ystäväni, jälkimmäiseen puolueeseen kuuluva, kertoi olleensa. Seminaarin kaikki viralliset alustajat edustivat PISA-myönteistä puoluetta. Seminaarin lopputoteamus oli, että yksikään muun matematiikan oppimistasoa kuvaavan tutkimuksen tulos ei poikkea olennaisesti PISA-tutkimuksen tuloksesta. En ole julkaissut huvikseni suorittamiani laskuja PISA-järjestyksen ja Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa saavutetun menestyksen korrelaatiosta. Korrelaatio oli negatiivinen.

Yksi keskeisistä ja suuria kustannuksia aiheuttavista yhteiskunnan ongelmista on nykyään se, että melko suuri osa peruskoulunsa päättävistä nuorista syrjäytyy: he eivät kykene opiskelemaan ammattia eikä työllistymään. Tätä ilmiötä on tutkittu ja yllättäen (?) saatu selville, että syrjäytymiseen yleensä liittyvät huonot perustiedot, erityisesti matematiikassa. Oivallinen koulumme sysää siis melkoisen osan nuorisostamme elämän sivuraiteille juuri siksi, että koulutus heidän kohdallaan epäonnistuu, laskennon ja perusmatematiikan pohja jää hataraksi. Tämän vakavan ongelman soisi valtaavan opetushallinnon ajatukset PISA-menestyksessä paistattelun sijasta.

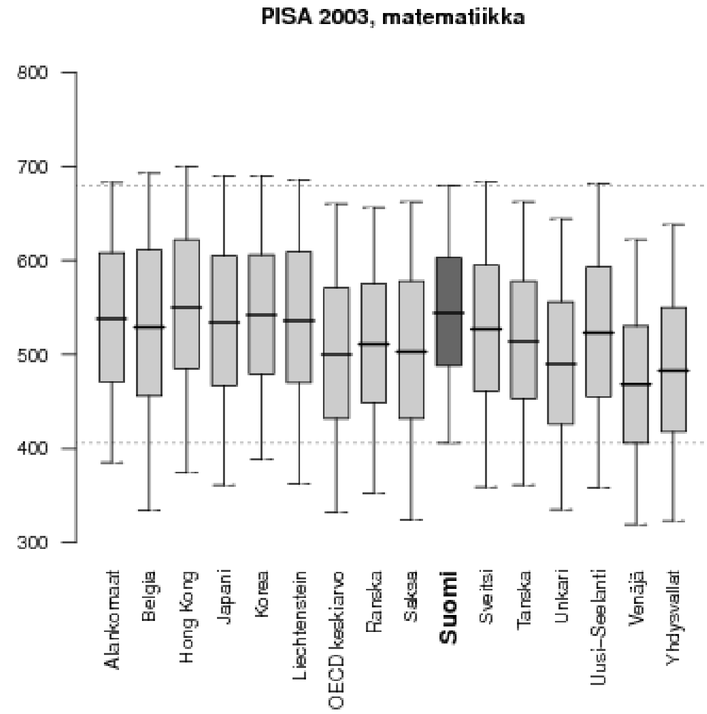
* * *

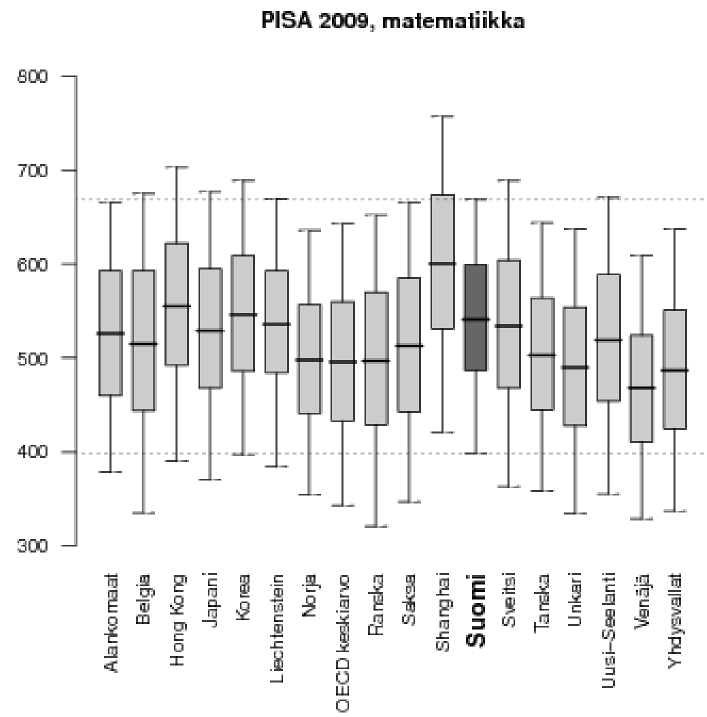
Maaliskuun viimeisen päivän Helsingin Sanomat julkaisi Suomen Akatemian kahden johtavan virkamiehen kirjoituksen korkeamman koulutuksen ja tutkimuksen tilasta, joka heidän mukaansa ei ole paras mahdollinen. Suomi on jäänyt jälkeen vertailukelpoisista maista, sellaisista kuin Tanska, Norja, Hollanti ja Sveitsi. Kirjoittajat etsivät syitä rahoitus- ja hallintorakenteista. Ei ole kuitenkaan kaukana se ajatus, että läpi koko koulutusjärjestelmämme kulkeva vaatimustason madaltuminen – josta esimerkkejä ovat niin ylioppilaskirjoitukset kuin PISA-menestyksen glorifiointi – tulee näkyviin myös tieteellisillä kilpakentillä. Kun lusikalla annetaan, ei voi kauhalla ammentaa, vai miten se sanonta menikään?

* * *

Kolmas ystäväni (taidan olla verkostoitunut!) kiinnitti huomiotani ikävään ilmiöön. Hän oli seurannut mielestään etevän ja pätevän opettajan pyrkimyksiä saada työtä. Nämä yritykset olivat kilpistyneet siihen yllättävään seikkaan, että työnhakija sattui olemaan matematiikasta väitellyt tohtori. Tämä tieto on riittänyt valitsijoille: edes haastatteluihin asti ei liian oppinut opettaja ole päässyt. Tuntematta yksityiskohtia ei tähän tapaukseen tietenkään voi ottaa kantaa. Mutta ei ole aivan harvinaista se, että opetettavaa ainetta tavanomaista paremmin osaavaa henkilöä koulumaailmassa vierastetaan. Matematiikan opettajaksi saatetaan valita kemisti, pikakurssitettu luokanopettaja tai koneinsinööri silloinkin, kun matematiikkaa riittävästi osaavia hakijoita olisi. Tämä on suurta tyhmyyttä ja oppilaiden oikeuksien polkemista. Opettajan ensimmäinen kriteeri on se, että hän tietää sen, mitä opettaa. Ja mitä paremmin tietää, sitä suurempi on hyöty oppijoille. Henkilö, johon ruumiillistuu kaikki kasvatuksellinen tieto ja taito on kelvoton matematiikan opettajaksi, ellei hän osaa matematiikkaa. Henkilö, joka osaa matematiikkaa riittävästi, osaa myös asemoida sen matematiikan, jota opettaa, oppilaidensa näkökulmasta oikein.

Matti Lehtinen





PISA:n matematiikan kokeen pisteiden jakauma maittain. Vaakaviivat osoittavat kullekin maalle (alhaalta ylöspäin) 5 %:n ja 25 %:n prosenttipisteet, keskiarvon, sekä 75 %:n ja 95 %:n prosenttipisteet. Esim. 25 %:n prosenttipisteen alapuolelle jää tämä osuus jakaumasta.

Loogisen ajattelun kulttuurista

Ilkka Norros
Valtion teknillinen tutkimuskeskus

Logiikka ja matematiikka ovat osa kulttuuria

Tarkastelen seuraavassa loogis-matemaattista ajattelua kulttuurin ja yleissivistyksen osana. Koetan tunnistaa sen perustavia elementtejä ja pohtia erityisesti näiden painotusten muuntumista tietotekniikan vaikutuksesta.

Ihmisen fyysinen potentiaali on suurin piirtein vakio, mutta hänen aktuaalinen, tosiasiallinen toimintakykynsä perustuu siihen, että hän on omaksunut vuosituhansien aikana kertynyttä kulttuuriperintöä. On tärkeää ymmärtää, että ihmisen järki ei ole synnyinlahjana saatu valmis kyky vaan taitoa käyttää kulttuurisesti opittuja ajattelun muotoja ja käsitteellisiä välineitä. Elävän kulttuurin sisältö ei ole pelkästään kasvava, vaan sen osia kuihtuu ja kuolee jatkuvasti samanaikaisesti kun uutta luodaan. Loogis-matemaattisen ajattelun kulttuurin uusintamisessa, elävänä pitämisessä koulu on poikkeuksellisen keskeisessä asemassa, koska matematiikan oppiminen vaatii runsaasti harjoittelua.

Matemaattisen tiedon kokonaisuus on valtava teoreemojen eli todistettujen väittämien verkosto, jonka elementit liittyvät toisiinsa loogisten todistusten välityksellä. Vaikka tämä kokonaisuus on jokseenkin puhtaasti kasvava toisin kuin muissa tieteissä, joissa vanhoja opinkappaleita silloin tällöin hylätään virheellisinä, matematiikankin elävä osa muuntuu koostumukseltaan sekä käyttötarpeitaan heijastaen että myös sisäisen kehityksensä kautta. Tunnetuille teoreemoille löydetään uusia, yksinkertaisempia todistuksia, ja teoriat pystytään esittämään yhä elegantimmin ja tehokkaammin. Nuoren matemaatikon ei tarvitse oppia lähimainkaan kaikkea aiemmin kehitettyä pystyäkseen luomaan uutta. Myös matemaattinen yleissivistys voi tulevaisuudessa rakentua eri lailla kuin nykyinen, niin konservatiivista kuin koulumatematiikan sisältö luonnostaan onkin.

Keskustelen nyt lyhyesti seuraavista loogis-matemaattisen ajattelun peruselementeistä:

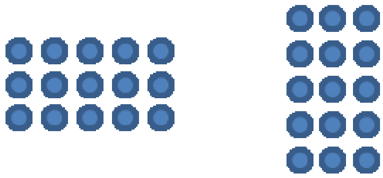
- luonnolliset luvut,
- rationaaliluvut,
- algoritmit,
- todistaminen.

Lopuksi yritän lapioida ‘kahden kulttuurin kuilua’ umpeen muistuttamalla, että vähemmänkin formaalin ajattelun muodoilla on logiikkaansa.

Luonnolliset luvut

Luonnolliset luvut $1,2,3,\ldots$ ovat kulttuurimme vanhin matemaattinen struktuuri ja yleensä ainoa, johon jossain määrin tutustutaan jo ennen kouluikää. Ne kuvaavat joukkoon kuuluvien yksiköiden lukumäärää eli joukon mahtavuutta. Lukujen koodaaminen kymmenellä numeromerkillä on mukana luonnollisessa kielessämmekin - suomenkielen sanat 'yhdeksän' ja 'kahdeksan' ilmaisevat sisältöjä yhtä ja kahta vaille kymmenen, ja kymmenen potensseilla on omia nimiä: sata, tuhat, miljoona. Moni ei ollenkaan tiedosta, että viimemainittujen lukujen erityinen 'pyöreys' johtuu ainoastaan siitä, että meillä sattuu olemaan kymmenen sormea. Jos niitä olisi kahdeksan kuten Aku Ankalla, tietokonemaailmassa yleiset 64 ja 512 tuntuisivat täsmälleen yhtä pyöreiltä, ja niiden merkinnätkin olisivat 100 ja 1000.

Luonnollisten lukujen yhteenlasku kuvaa erillisten joukkojen yhdistämistä, ja yhteenlaskun vaihdantalaki $a + b = b + a$ on intuitiivisesti varsin selvä. Toinen luonnollisiin lukuihin liittyvä perusoperaatio kertolasku on jo käsitteellisesti huomattavasti vaikeampi, koska kertoja on lukumäärä, mutta kerrottava on toisaalta, 'kertojan näkökulmasta', yksikkö, mutta toisaalta se on itsekin lukumäärä. Kertolaskun vaihdantalakia $ab = ba$ on itse asiassa vaikea ymmärtää tai arvata, ellei piirrä kuvaa



Kymmentä pienempien lukujen kertotaulun osaaminen voitaneen lukea yleissivistykseen. Kertotaulu on opittava ulkoa, mutta sen pystyy unohtamis- tai epävarmuustilanteissa helposti täydentämään, jos osaa yhteenlaskun.

Seuraava luonnollisten lukujen peruskäsite, alkuluku, on jo portti hyvin syvällisiin ja avoimiinkin ongelmiin. Voitaneen katsoa yleissivistykseen kuuluvaksi tietää, että jokainen ykköstä suurempi luonnollinen luku voidaan jakaa alkutekijöihin eli esittää alkulukujen tulona yhdellä ja vain yhdellä tavalla (vaikka alkutekijöiden yksikäsitteisyys on niin tuttu asia että se saattaa tuntua itsestäänselvyydeltä, sitä ei voi millään tavalla suoraan 'nähdä', vaan se vaatii kohtalaisen vaikean epäsuoran todistuksen). Tämä antaa lukuihin toisen yleisen näkökulman kuin niiden esittäminen kymmenjärjestelmän numeroilla. Luvuilla puuhailussa tulee tässä yhteydessä tärkeäksi osata kertotaulu myös takaperin eli muistaa sataa pienemmistä luvuista mitkä ovat alkulukuja ja miten jäljelläolevat saadaan pilkotuksi pienempiin tekijöihin.

Rationaaliluvut (murtoluvut)

Vaikka rationaaliluvut kuvaavat kokonaislukujen suhteita, niiden luonteva esittely alkaa *jatkuvien* suureiden tasan jakamisesta - käsitteet puolikas, kolmasosa, kymmenesosa ja muut käänteisluvut soveltuvat ongelmattomimmin tilanteisiin, joissa jako menee aina tasan kuten kakun jakamisessa (esim. neljää antiikkituolia ei voi jakaa tasan kolmelle perilliselle). Rationaaliluku esitetään murtolukuna: nimittäjä kertoo miten pienistä osista on kysymys, ja osoittaja ilmoittaa näiden osien lukumäärän. Keskeinen apuoperaatio on murtolukujen laventaminen, jota tarvitaan niin keskinäisen järjestyksen selvittämiseen kuin yhteenlaskuunkin:

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}.$$

Pienimmän yhteisen nimittäjän löytämiseksi erisuuret nimittäjät on ensin jaettava alkutekijöihinsä. Siksi murtoluvuilla operoiminen on vaikeaa, ellei kertotaulua osata ulkoa myös takaperin. Murtoluvuilla laskemisen taito on toisaalta erittäin keskeinen, koska vastaavia operaatioita tarvitaan lähes kaikessa tätä korkeammassakin matematiikassa jatkuvasti. Tässä tietotekniikka tuottaa vahinkoa kulttuurille, sillä arkielämässä murtoluvuilla laskemisen tarve on vähentynyt, ja tämän taidon motivoinnista on nyt tullut opetuksen haaste.

Tässä yhteydessä haluaisin myös kiinnittää huomiota siihen, että yleensäkin kaikenlainen 'nurin kääntäminen' on raskasta ja vaikeaa ajatella sisällöllisesti – ja vaatii siis harjoittelua aivan samoin kuin urheilulajien liikeratojen omaksuminen, musisointi ym. Vaatii esimerkiksi aina tiettyä ponnistusta hahmottaa, miten monta prosenttia a on b:stä, jos b on niin ja niin monta prosenttia a:sta. Formaali manipulointi kynällä ja paperilla auttaa usein tällaisissa tilanteissa, kunhan sen säännöt on opittu ja mieluummin myös ymmärretty ja siis tarkistettavissa ja reprodusoitavissa.

Äärettömyyteen liittyviä kysymyksiä voisi sisältyä yleissivistykseen enemmän kuin nykyään usein ajatellaan. Onhan yksi matematiikan hienoimmista ominaispiirteistä, että ihminen siinä pystyy täsmällisesti käsittelemään äärettömiä objekteja, joita ei arkielämässä ollenkaan kohdata. Äärettömyyttä ei koulumatematiikassakaan pitäisi lakaista maton alle, vaan päinvastoin nostaa mahdollisuuksien mukaan esiin, nimenomaan sen paradoksaalisuuden ja kiehtovuuden takia. On esimerkiksi varsin yksinkertaista selittää, että vaikka rationaaliluvut ovat tiheässä, ne voidaan numeroida, kun taas Cantorin nerokas diagonaaliargumentti osoittaa, että jatkuvia suureita kuvaavia reaalilukuja ei voida. Tämäntyyppiselle matemaattiselle yleissivistykselle taskulaskimet ja tietokoneet eivät muodosta minkäänlaista uhkaa.

Algoritmit

Seuraavaksi puhun lyhyesti algoritmin käsitteestä. Aiheen tärkeys ilmenee jo siitä, että algoritmin suorittaminen on täsmälleen sitä mitä tietokone tekee (kun jätetään huomiotta koneen muistin rajallisuus sekä sen kommunikointi ulkomaailman kanssa — algoritmi pystyy tuottamaan vain pseudosatunnaislukuja, kun taas reaalimaailmassa esiintyy ainakin nykyisen fysiikan mukaan todellistakin satunnaisuutta). Algoritmin suorittaminen on täysin 'mekaanista', ennalta kiinnitetyn ohjelman mukaista (yksinkertainen esimerkki alempana). Yleissivistykseen voisi kuitenkin kuulua huomattavasti monivivahteisempi näkemys algoritmeista kuin toisaalta tieto niiden mekaanisuudesta, toisaalta mielikuva tietokoneiden mahtavista kyvyistä.

Vaikka algoritmin suorittaminen on konemaista, hyvän algoritmin keksiminen tai luominen tiettyyn tehtävään voi olla hyvin vaikeaa. Merkittävät algoritmit ovat kulttuurin kertyvää rikkautta, ja sellaisten tunteminen ja ymmärtäminen on osa sivistystä. Koulun alaluokilla on käytetty kohtalaisesti aikaa suurten lukujen kerto- ja jakolaskun algoritmeihin, joiden tarve käytännön elämässä on jyrkästi vähentynyt, kun laskut tehdään koneilla. Tämä esimerkki valaisee tärkeitä näkökohtia. Vaikka algoritmin suorittaminen sinänsä on nimenomaan jotain mikä voidaan jättää koneen tehtäväksi, ihmisen taitojen elementit ovat varsin suurelta osin luonteeltaan algoritmien osaamista. Näitä taas ei voi kunnolla tuntea, ymmärtää ja muistaa suorittamatta ja harjoittelematta niitä. Tavanmukaisuus ja luovuus ovat ihmisen toiminnassa erottamattomia. Monien yksittäisten algoritmien tärkeys yleissivistyksen tai jonkin alan koulutuksen osana voi silti muuttua radikaalistikin. Vaikka matematiikan oppiminen ei ole mahdollista ilman runsasta puuhailua lukujen parissa, sataa pienemmät luvut kenties riittävät päässä hallittavaksi hiekkalaatikoksi? Tällöin jakokulmalla olisi sama kohtalo kuin tuluksilla, joiden käyttötaito kuului esiisiemme ihmisyyden perusteisiin.

Kolmas tärkeä piirre algoritmien kokonaiskuvassa on, että sen selvittäminen, mitä algoritmi tuottaa, voi olla erittäin vaikeaa. Ei esimerkiksi ole algoritmia, jolle voitaisiin syöttää toisten algoritmien ohjelmakoodeja ja joka sellaisen tutkittuaan kertoisi, pysähtyykö kyseinen algoritmi joskus vai ei koskaan. Vaikka algoritmien toiminta on mekaanista, niiden analysoiminen on yleisesti ottaen kaikkea muuta kuin mekaanista. Esimerkiksi, jonka voisi hyvin kertoa koulussakin, sopii seuraava:

$3n+1$ –algoritmi
Syöte: luonnollinen luku $N > 0$.
0. $n := N$.
1. Jos $n = 1$, lopeta.
2. Jos n on parillinen, $n := n/2$, muuten $n := 3n+1$.
3. Mene kohtaan 1.

Kokemuksen mukaan tämä erittäin yksinkertainen algoritmi nimittäin pysähtyy kaikilla syötteillä N, mutta kukaan ei ole pystynyt tätä todistamaan. Suuri matemaatikko Paul Erdös sanoi tästä haasteesta: 'Mathematics is not yet ready for such problems'.

Logiikka ja todistaminen

Teoreema on matemaattinen väite, jolla on *todistus* eli kyseessä olevan teorian määritelmistä ja muista teoreeman oletuksista väitteeseen johtava päätelmien ketju. Todistuksen kukin askel soveltaa joitakin logiikan päättelysääntöjen suppeasta valikoimasta. Todistuksen oikeellisuus on näin ollen periaatteessa mekaanista todentaa, ja kirjaimellisestikin mikäli se on kirjoitettu yksityiskohtia myöten auki (mitä ei käytännössä koskaan tehdä). Tällainen todentaminen ei ole samaa kuin todistuksen ymmärtäminen, sillä sen voi tehdä varsin tyhmäkin kone. Toisaalta teoreeman totuutta, sen välttämättömyyttä, ei voi ymmärtää tutkimatta sen todistusta. Todistusten löytäminen on yleisesti ottaen vaikeaa, ja merkittävien todistusten 'juonet' ovat osa kulttuurisaavutuksiamme. Väitteiden todistamisella pitäisi olla tärkeä rooli myös matematiikan kouluopetuksessa.

Muodollisen logiikan perusoperaatiot ovat 'ei' ($\neg$), 'ja' ($\wedge$), 'tai' ($\vee$), 'kaikille x pätee, että…' ($\forall x$) sekä 'on olemassa x jolle pätee, että…' ($\exists x$). Monia mutkikkaita käsitteitä ja luonnollisen kielen lauseita voidaan analysoida loogisesti muotoilemalla niille ensin vastineet yksinkertaisempien käsitteiden ja loogisten operaatioiden avulla. Esimerkiksi relaatio 'x on y:n veli' tarkoittaa samaa kuin

$$\begin{aligned}&(\exists a\colon ((a \text{ on } x\text{:n äiti}) \wedge (a \text{ on } y\text{:n äiti})))\\ &\quad \wedge (\exists i\colon ((i \text{ on } x\text{:n isä}) \wedge (i \text{ on } y\text{:n isä})))\\ &\quad \wedge (y \text{ on miespuolinen})\end{aligned}$$

Lyhyt sana 'veli' koodaa siis loogisen rakenteen, joka sisältää myös kaksi eksistenssikvanttoria ($\exists$). Ehkäpä äidinkielen ja matematiikan opetus voisivat kohdata logiikan alueella? Näiden kosketuspinta sisältää jännittävämpiäkin asioita kuin yllä viitattu luonnollisen kielen looginen analyysi. Koko todistamisen käsitteeseen, niin matematiikassa kuin vaikkapa oikeudessa, voidaan nimittäin ottaa ns. peliteoreettisen semantiikan tarjoama dialoginen näkökulma, jota erityisesti filosofi Jaakko Hintikka on kehitellyt pitkään ja monipuolisesti. Seuraava esimerkki valaisee perusideaan:

Väite: Jonon $1/n$ raja-arvo on 0, kun n kasvaa rajatta.
Sama formaalisti esitettynä: $\forall \epsilon > 0\, \exists m\, \forall n > m\ 1/n < \epsilon$.
Tulkinta pelinä:

- kaikki-kvanttori $\forall$ edustaa vastustajan siirtoa; hän saa valita minkä tahansa luvun ϵ, ja toisella vuorollaan minkä tahansa luvun n, joka on suurempi kuin m;
- eksistenssikvanttori $\exists$ edustaa minun siirtoani; minun on valittava lukuni m taidolla.

Voittostrategia: Vastustajan annettua luvun ϵ valitsen sellaisen luvun m, että $m > 1/\epsilon$; tällöin vastustaja saa toisella siirrollaan valita minkä tahansa luvun $n > m$ muttei pysty kumoamaan relaation $1/n < \epsilon$ totuutta.

Todistus voidaan siis tulkita *strategiaksi, jolla voittaa aina.* Niin paljon kuin tietokoneet elämäämme vaikuttavatkin, ihmisten kiinnostusta pelaamiseen ne eivät ole vähentäneet, pikemmin päin vastoin. Pelinäkökulman tuominen monien mielestä rutikuiviin asioihin kuten todistamiseen saattaisi olla tutkimisen arvoinen asia myös kouluopetuksessa.

* * *

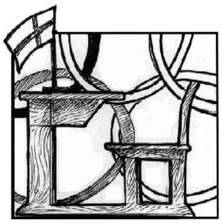
Lopuksi haluaisin huomauttaa, että edellä käsiteltyjen formaalin logiikan ja matematiikan ohella on toki paljon muutakin, minkä voidaan katsoa kuuluvan 'loogisen ajattelun kulttuuriin', kuten seuraavat asiat:

1. Eri 'tasojen' erottaminen — millä tasolla milloinkin keskustellaan.

2. Mallien ja todellisuuden erottaminen. Fysiikan teoriat ovat matemaattisia malleja luonnonilmiöille, ja taloustiede rakentaa (huomattavasti karkeampia) malleja talouden ilmiöille. Mallien käyttö on erittäin tärkeää todellisuuden jäsentämisessä ja ymmärtämisessä, mutta ne pitää ymmärtää konstruktioiksi.

3. ”Ristiriitaisten”, ”jännitteisten” kohteiden käsitteellistäminen (dialektiikka). Esimerkiksi Marxin mukaan kapitalismissa on keskeistä se, että siinä työ on samanaikaisesti sekä käyttöarvon että abstraktin, mm. rahalla ilmennettävän 'arvon' tuottamista.

4. Semiotiikka: kulttuurin merkkien ja merkitysten valtavan verkoston elementtien huomaaminen (koska tutuinta on vaikea huomata) ja tutkiminen.



Tuhtia matematiikkaa Mongolian alakoulunopettajien kilpailussa

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Solmun numerossa 3/2010 kerrottiin alakoulunopettajille ("primary school teachers") Mongolian vuoden 2010 matematiikkaolympialaisten yhteydessä järjestetystä matematiikkakilpailusta. Suomen peruskoulun opettajakunta ei juuri lukene Solmua, koska ratkaisuehdotuksia kirjoituksen yhteydessä julkaistuille tehtäville ei opettajilta ole saapunut, ei kyllä muiltakaan. Seuraavassa esitettävät ratkaisut perustuvat siis pääosin kilpailun järjestäjältä Mongolian Kansalliselta Yliopistolta saatuun aineistoon.

Tällaisia olivat tehtävät, ja näin niitä olisi ehkä voinut ratkaista:

1. *Matematiikkakilpailussa oli 25 osallistujaa ja kolme tehtävää A, B ja C. Jokainen osallistuja ratkaisi ainakin yhden tehtävän. Niissä osallistujissa, jotka eivät ratkaisseet tehtävää A, oli kaksi kertaa niin paljon sellaisia, jotka ratkaisivat B:n kuin sellaisia, jotka ratkaisivat C:n. Osallistujia, jotka ratkaisivat vain tehtävän A, oli yksi enemmän kuin muita tehtävän A ratkaisseita. Niistä osallistujista, jotka ratkaisivat vain yhden tehtävän, puolet ei ratkaissut tehtävää A. Kuinka moni osallistuja ratkaisi vain tehtävän B?*

Ratkaisu. Tämä ratkaisu näyttää suoraviivaiselta yhtälöryhmän ratkaisulta. Tuntemattomia on kuitenkin enemmän kuin sellaisia ehtoja, joista voi yhtälöitä rakentaa. Ratkaisun avaimeksi muodostuu se, että kaikki tuntemattomat, eli eri tehtäväyhdistelmien ratkaisseiden lukumäärät ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja.

Merkitään a:lla vain tehtävän A ratkaisseiden kilpailijoiden lukumäärää, b:llä vain B:n ratkaisseiden lukumäärää ja c:llä vain C:n ratkaisseiden lukumäärää. Mukavuuden vuoksi merkitään vielä $a \odot b$:llä vain A:n ja B:n ratkaisseiden lukumäärää jne. Koska jokainen osallistuja ratkaisi ainakin yhden tehtävän,

$$a + b + c + a \odot b + a \odot c + b \odot c + a \odot b \odot c = 25. \quad (1)$$

Toinen ehto merkitsee yhtälöä $b + b \odot c = 2(c + b \odot c)$ eli

$$b = 2c + b \odot c. \quad (2)$$

Kolmas ehto merkitsee, että

$$a = 1 + a \odot b + a \odot c + a \odot b \odot c. \quad (3)$$

Viimeinen ehto merkitsee, että

$$a = b + c. \quad (4)$$

Kun yhtälöt (1) ja (3) lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$2a + b + c + b \odot c = 26. \quad (5)$$

Kun (5) ja (2) lasketaan yhteen ja otetaan huomioon (4), saadaan

$$c = 26 - 4b. \quad (6)$$

Koska $c \geq 0$, on oltava $b \leq 6$. Kun tämä c yhtälöstä (6) sijoitetaan yhtälöön (2), saadaan

$$b \odot c = 9b - 52. \quad (7)$$

Koska $b \odot c \geq 0$, on oltava $b \geq 6$. Ainoa mahdollisuus on siis $b = 6$. On vielä tarkistettava, että $b = 6$ on mahdollinen. Jos $b = 6$, $c = 2$, $b \odot c = 2$ ja $a = 8$. Ehdot (1) ja (3) täyttyvät, jos $a \odot b + a \odot c + a \odot b \odot c = 9$. Koska yhtälössä olevia suureita eivät sido muut ehdot, ne voi valita vapaasti, esimerkiksi $a \odot b = a \odot c = a \odot b \odot c = 3$. Ratkaisu $b = 6$ on siis paitsi välttämätön, myös mahdollinen.

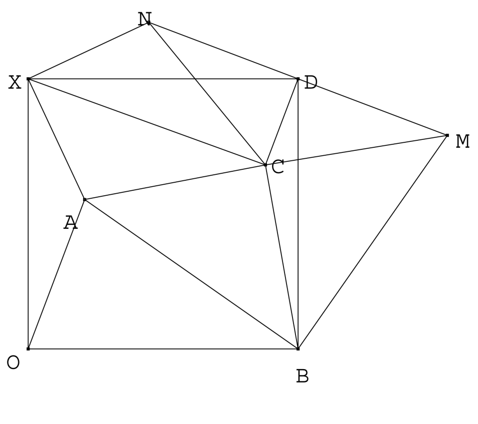
2. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $m^2 < a, b < m^2 + m$ ja $a \neq b$. Määrittäkää kaikki ne luonnolliset luvut c, joille c on luvun ab tekijä ja $m^2 < c < m^2 + m$.*

Ratkaisu. Ilmeisiä ratkaisuja ovat luvut a ja b. Osoittautuu, että muita ratkaisuja ei olekaan. Olkoon nimittäin c luvun ab tekijä ja $m^2 < c < m(m+1)$. Koska $(a-c)(b-c) = ab - c(a+b-c)$, niin c on myös luvun $(a-c)(b-c)$ tekijä. Nyt $a - c < m^2 + m - m^2 = m$ ja $c - a < m^2 + m - m^2 = m$. Siis $|a - c| < m$. Samoin $|b - c| < m$. Mutta tämä merkitsee, että $|(a-c)(b-c)| < m^2 < c$. Luku on tekijänä itseään pienemmässä positiivisessa kokonaisluvussa vain, jos viimeksi mainittu luku on nolla. Siis $c = a$ tai $c = b$.

3. *Olkoot A ja C neliön $XOBD$ sisäpisteitä niin, että $\angle AXC = \angle ABC = 45°$. Merkitään kolmion PQR alaa symbolilla S_{PQR}. Osoittakaa, että*

$$S_{AXO} + S_{ABC} + S_{CXD} = S_{ACX} + S_{AOB} + S_{CBD}.$$

Ratkaisu. Viehättävä ratkaisu perustuu siihen, että kumpikin kuvio on paloiteltavissa kolmioiksi, joista jokaiselle löytyy yhtenevä pari toisen kuvion paloittelusta. Paloittelua on varsin vaikea hahmottaa alkuperäisestä kuviosta, mutta jos kaksi kolmiota siirretään sopivasti uuteen paikkaan neliön ulkopuolelle, asia helpottuu olennaisesti. Tehtävässä oleva kulmatieto kertoo, että parissa kuvion kolmiossa tulee olemaan yhtä suuria kulmia sen vuoksi, että tietyt janat ovat suoran kulman puolittajilla.



Aletaan siis ratkaisu siirtämällä kolmiot OAX ja OBA neliön ulkopuolelle kiertämällä OAX:ää vastapäivään 90° X:n ympäri kolmioksi XDN ja OBA:ta 90° myötäpäivään B:n ympäri kolmioksi DBM (kiertosuunnat olettaen, että $XOBD$ on nimetty positiiviseen kiertosuuntaan). On todistettava, että nelikulmion $XCDN$ ja kolmion ABC ala on yhteensä sama kuin nelikulmion $CBMD$ ja kolmion ACX. Tämä nähdään seuraavasti. Koska $\angle AXC = 45°$ ja $\angle AXN = 90°$, niin $\angle AXC = \angle CXN$. Lisäksi $AX = NX$. Täten kolmioilla ACX ja CNX on sama ala. Koska OA kiertyy sekä janaksi DN että janaksi DM, ja kierrot olivat 90° kiertoja, niin $DN \| DM$, ja N, D ja M ovat samalla suoralla. Lisäksi $DN = DM$. Siis kolmioilla DCM ja DNC on sama ala. Vielä $\angle ABC = 45°$ ja $\angle ABM = 90°$, sekä $AB = BM$. Kolmioilla ABC ja BMC on siis sama ala. Kumpikin tarkasteltavista nelikulmion ja kolmion yhdisteestä on näin jaettu kolmeksi kolmioksi, jotka ovat pareittain sama-alaisia. Väitös on todistettu.

4. *Määrittäkää kaikki positiiviset kokonaisluvut N, joille on olemassa positiivinen kokonaisluku M seuraavin ominaisuuksin:*

a) M:n ensimmäiset numerot muodostavat luvun N.

b) Jos S on se luku, joka saadaan, kun M:n ne ensimmäiset numerot, jotka muodostavat luvun N, siirretään M:n viimeisiksi numeroiksi, niin $S \cdot N = M$.

(Esimerkiksi kun $N = 46$, luku $M = 4601000217438573602957 16$ toteuttaa ehdon.)

Ratkaisu. Tehtävä on erittäin mielenkiintoinen ja tuntuu kovin haastavalta. Taitaa olla matematiikan osaaminen korkealla tasolla Mongolian opettajien keskuudessa, kun tällaisia selvittävät! Se, että luku 46 ei ole kovin erikoinen, onkin ehkä ratkaisuun viittaava vihje. Osoittautuu nimittäin, että jokaista positiivista kokonaislukua N kohden tehtävässä määritelty M löytyy, ei kuitenkaan kovin helposti.

Olkoon siis N mielivaltainen positiivinen kokonaisluku ja olkoon c sellainen, että $N < 10^c$. N on siis enintään c-numeroinen luku. Määritellään jono ei-negatiivisten kokonaislukujen pareja (a_n, b_n) asettamalla ensiksi $(a_0, b_0) = (N, 0)$. Määritellään jonon muut termit induktiivisesti: jos (a_n, b_n) on määritelty, asetetaan luvuksi a_{n+1} luvun $a_nN + b_n$ jakojäännös 10^c:llä jaettaessa eli luvun $anN + b_n$ viimeisten c:n numeron muodostama luku ja luvuksi b_{n+1} luku $(a_nN + b_n - a_{n+1})10^{-c}$ eli se luku, joka jää, kun $(anN + b_n)$:stä poistetaan c viimeistä numeroa. On selvää, että a_{n+1} ja b_{n+1} ovat kokonaislukuja ja että $a_{n+1} < 10^c$. Osoitetaan induktiolla, että jokainen b_n on $< N$. Selvästi $b_0 < N$, ja jos $b_n < N$, niin

$$b_{n+1} < ((a_n+1)N - a_{n+1})10^{-c} \leq (a_n+1)N10^{-c} \leq N.$$

Koska siis sekä $a_n < 10^c$ että $b^n < N$, niin mahdollisia pareja (a_n, b_n) on enintään 10^cN kappaletta. Jokin pari siis toistuu, ja tästä parista alkaen jono on jaksollinen. Mutta jos (a_{n+1}, b_{n+1}) tiedetään, niin on oltava $b_n \equiv 10^c b_{n+1} + a_{n+1} \mod N$. Koska $b_n < N$, b_n määräytyy yksikäsitteisesti a_{n+1}:stä ja b_{n+1}:stä. a_n puolestaan on se luku, joka kerrottuna N:llä ja lisättynä b_n:llä tuottaa luvun $10^c b_{n+1} + a_{n+1}$, joten $a_n = \frac{1}{N}(10^c b_{n+1} + a_{n+1} - b_n)$. Pari (a_{n+1}, b_{n+1}) määrittää siis yksikäsitteisesti parin (a_n, b_n). Jaksoa voidaan siis seurata myös taaksepäin, ja myös pari (a_0, b_0) esiintyy siinä. Jollain t on siis $(a_0, b_0) = (a_t, b_t)$.

Muodostetaan nyt luku M, jossa kirjoitetaan peräkkäin vasemmalta a_t, a_{t-1}, ..., a_2 ja a_1. Koska luvut a_i ovat c-numeroisia,

$$M = a_t 10^{(t-1)c} + a_{t-1}10^{(t-2)c} + \cdots + a_2 10^c + a_1.$$

Silloin

$$S = a_{t-1}10^{(t-1)c} + a_{t-2}10^{(t-2)c} + \cdots + a_1 10^c + a_t.$$

Koska $a_t = a_0 = N$, luku $S \cdot N$ syntyy niin, että S kerrotaan termeittäin N:llä. $N \cdot a_0$ on luku $b_1 10^c + a_1$. $S \cdot N$:n viimeiset c numeroa ovat M:n c viimeistä numeroa. Seuraavaksi $(Na_1 + b_1)10^c = 10^c(10^c b_2 + a_2)$, joten $S \cdot N$:n c seuraavaa numeroa oikealta ovat samat kuin M:n vastaavat numerot. Näin nähdään, että M toteuttaa tehtävän ehdon.

Tehtävässä esimerkkinä oleva $N = 46$, johon liittyy 24-numeroinen M, vaikuttaa aika kesyltä. Luvun M muodostavaa algoritmia on helppo tarkastella esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla. Kun esimerkiksi $N = 13$, niin vasta $(a_{216}, b_{216}) = (a_0, 0)$, ja kun $N = 14$, vasta $(a_{699}, b_{699}) = (a_0, 0)$. Luvussa M on tällöin 1398 numeroa. Ei ole mahdotonta, että muitakin ratkaisuja tehtävälle olisi, ainakin joillakin N:n arvoilla. Mahtaako löytyä?

5. *Todistakaa, että jokainen parillinen kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin $2n(4n+1)$, voidaan kirjoittaa muotoon*

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 4n,$$

missä kunkin $\pm$-merkin kohdalle kirjoitetaan joko $+$ tai $-$.

Ratkaisu. Summaan voi $+$ ja $-$-merkit sijoittaa 2^{4n} tavalla, ja näistä puolet on positiivisia. Parillisia positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat $\le 2n(4n+1)$, on vain $n(4n+1)$ kappaletta. Valinnanvaraa tuntuisi ainakin olevan, mutta mitään yksikäsitteistä vastaavuutta merkkikombinaatioiden ja lukujen välille ei näyttäisi löytyvän. Toisaalta tehtävän muoto houkuttaa etsimään induktioratkaisua. Sellainen löytyykin.

Kun $n = 1$, $2n(4n+1) = 10$. Nyt $1 - 2 - 3 + 4 = 0$, $-1 + 2 - 3 + 4 = 2$, $1 + 2 - 3 + 4 = 4$, $1 - 2 + 3 + 4 = 6$, $-1 + 2 + 3 + 4 = 8$ ja $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Induktio lähtee siis käyntiin. Otetaan sitten induktioaskel. Oletetaan, että kaikille positiivisille parillisille kokonaisluvuille, jotka ovat $\le 2n(4n+1)$, löytyy muotoa $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 4n$ oleva esitys. Koska $(4n+1) - (4n+2) - (4n+3) + (4n+4) = 0$, kaikille tällaisille luvuille on myös esitys $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 4n + 4$. Nyt $1 + 2 + 3 + \cdots + (4n+4) = (2n+2)(4n+5)$. Silloin

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + (k-1) - k + (k+1) + \cdots + (4n+4) \\ = (2n+2)(4n+5) - 2k. \end{aligned}$$

Kun k käy luvut 1:stä $(4n+4)$:ään, saadaan haluttunmuotoinen esitys kaikille parillisille kokonaisluvuille, jotka ovat enintään $(2n+2)(4n+5) - 2$ ja vähintään $(2n+2)(4n+5) - 8n + 8 = (2n+2)(4n+1)$. Katsotaan sitten lukuja

$$1 + 2 + \cdots + (m-1) - m + (m+1) + \cdots + (4n+3) - (4n+4).$$

Kun l saa kaikki arvot 1:stä $4n$:ään, saadaan haluttun kaltainen esitys kaikille parillisille kokonaisluvuille $(2n(4n+1) + 2)$:sta $((2n+2)(4n+1) - 2)$:een. Näin on saatu haluttu esitys kaikille parillisille kokonaisluvuille, jotka ovat enintään $2(n+1)(4(n+1)+1)$. Induktioaskel on otettu, joten todistus on valmis.

6. *Merkintä (a, b) tarkoittaa lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää. Olkoon m ja n sellaisia luonnollisia lukuja, että $(2m+1, 2n+1) = 1$. Määrittäkää*

$$\left(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right).$$

Ratkaisu. Opiskellaan aluksi hiukan lukuteoriaa. Tarkastellaan ensin kahta lukua $2^n - 1$ ja $2^m - 1$. Jos $d = (m, n)$, niin $n = pd$ ja $m = qd$ joillain sellaisilla positiivisilla kokonaisluvuilla p ja q, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Luvut $(2^d)^p - 1$ ja $(2^d)^q - 1$ ovat jaollisia luvulla $2^d - 1$. Lukujen $2^n - 1$ ja $2^m - 1$ suurin yhteinen tekijä on siis jaollinen tällä luvulla. Mutta itse asiassa onkin $(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^d - 1$. Miksi näin?

Oletetaan, että $n > m$. Koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, on olemassa kokonaisluku s, jolle $sq < p < (s+1)q$. Silloin $p - sq < q$. Merkitään lyhyyden vuoksi $2^d = a$. Nyt $2^n - 1 = a^p - 1 = a^p - a^{p-q} + a^{p-q} + a^{p-2q} - \cdots - a^{p-sq} + a^{p-sq} - 1 = (a^{p-q} + a^{p-2q} + \cdots + 1)(a^q - 1) + a^{p-sq} - 1$. Lukujen $a^p - 1$ ja $a^q - 1$ yhteiset tekijät ovat siis luvun $a^{p-sq} - 1$ tekijöitä. Merkitään $r_1 = p - sq$. Jos $r_1 > 1$, luvuilla r_1 ja q ei ole yhteisiä tekijöitä. Näin ollen jollain s_1 on $s_1 r_1 < q < (s_1 + 1)q$. Toistamalla edellinen päättely saadaan $a^q - 1 = n_1(a^{r_1} - 1) + a^{q - s_1 r_1} - 1$, joten jokainen $(a^p - 1)$:n ja $(a^q - 1)$:n yhteinen tekijä on tekijänä myös luvussa $a^{q - s_1 r_1} - 1$. Alkaa näyttää samanlaiselta kuin Eukleideen algoritmi sovellettuna lukuihin p ja q! Prosessia voidaan jatkaa, kunnes tullaan jakojäännökseen $a - 1$. Eukleideen algoritmin päättelyn mukaan jokainen lukujen $2^n - 1 = a^p - 1$ ja $2^m - 1 = a^q - 1$ yhteinen tekijä on luvun $a - 1 = 2^d - 1$ tekijä, ja tulos

$$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1$$

on tehty uskottavaksi. Itse asiassa luvun 2 ominaisuuksia ei ole käytetty hyväksi, joten on päätelty, että $(k^m - 1, k^n - 1) = k^{(m,n)} - 1$.

Palataan tehtävään. Merkitään

$$c = \left(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right).$$

Muodostetaan tuloja, joiden tekijä c on käyttämällä kahdesti aina hyödyllistä kaavaa $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$. On nimittäin $(2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1)(2^{2a+1} - 2^{a+1} + 1) = (2^{2a+1} + 1)^2 - 2^{2a+2} = 2^{4a+2} + 2^{2a+2} + 1 - 2^{2a+2} = 2^{4a+2} + 1$ ja $(2^{4a+2} + 1)(2^{4a+2} - 1) = 2^{8a+4} - 1$. Kun a:lle annetaan vuoron perään arvot m ja n, nähdään että c on tekijänä sekä luvussa $2^{8m+4} - 1$ että luvussa $2^{8n+4} - 1$. Se on siis tekijänä näiden lukujen suurimmassa yhteisessä tekijässä. Mutta tämän suurimman yhteisen tekijän saamme selville, kun etsimme lukujen $8m + 4$ ja $8n + 4$ suurimman yhteisen tekijän. Koska oletettiin, että $(2m + 1, 2n + 1) = 1$, lukujen $8m + 4$ ja $8n + 4$ suurin yhteinen tekijä on 4. Aiemmin esitetyn perusteella $(2^{8m+4} - 1, 2^{8n+4} - 1) = 2^4 - 1 = 15$. Luku c on siis luvun 15 tekijä. Mutta luvun $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1 = 2 \cdot 4^a + 1 + 2^{a+1} = 2(3 + 1)^a + 1 + 2^{a+1}$ jakojäännös kolmella jaettaessa on sama kuin luvun 2^{a+1}; luku ei siis ole 3:lla jaollinen. Mahdollisuuksiksi jäävät siis vain $c = 1$ ja $c = 5$. Jos a sattuu olemaan 4:llä jaollinen, $a = 4t$, niin $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1 = 2 \cdot 2^{8t} + 2 \cdot 2^{4t} + 1 = 2 \cdot 256^t + 16^t + 1 = 2(255 + 1)^t + 2 \cdot (15 + 1)^t + 1$. Tällainen luku on selvästi jaollinen viidellä. Jos siis sekä m että n ovat neljällä jaollisia, niin $c = 5$. Käymällä läpi tapaukset $a = 4t + 1$, $a = 4t + 2$ ja $a = 4t + 3$ havaitsee, että tällöin $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1$ ei ole jaollinen viidellä. Jos siis ainakin toinen luvuista m ja n ei ole neljällä jaollinen, $c = 1$.

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmaan kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

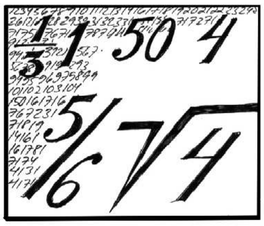
Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria



Heronin ja Brahmaguptan kaavoista

Juhani Fiskaali
Oulun Lyseon lukio

Heronin kaava

Kolmio on jäykkä kappale. Kun sivujen pituudet tunnetaan, tiedetään kolmion muoto ja myös ala. Kolmion ala sivujensa lausekkeena on tunnetun Heronin kaavan mukaisesti

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

missä p on kolmion piirin puolikas, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Johdetaan tämä alan kaava lähtemällä kolmion alasta $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Eliminoidaan tästä $\sin\gamma$ kosinilauseen antaman tuloksen $a^2+b^2-2ab\cos\gamma = c^2$ ja identiteetin $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ nojalla. Tässä γ on sivujen a ja b välinen kolmion kulma, jolle pätee erityisesti $0 < \gamma < \pi$ ja $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} > 0$. Suoraviivaisella laskulla saadaan

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\gamma} \\
&= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab-a^2-b^2+c^2)(2ab+a^2+b^2-c^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p)} \\
&= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}.
\end{aligned}$$

Siten kaava $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ tuli todistetuksi.

Brahmaguptan kaavan sekä Heronin kaavan uusi muotoilu

Nelikulmio ei ole jäykkä kappale. Nelikulmion muoto ei määräydy, vaikka sivujen pituudet tunnetaan. Nelikulmio muotoutuu mahdollisimman pyöreäksi siinä mielessä, että alasta tulee mahdollisimman suuri täsmälleen silloin, kun nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on oikokulma π. Intialainen Brahmagupta (600-luvulla) tunsi jo edellä luonnehditun syklisen nelikulmion alan sivujen funktiona, nimittäin lausekkeen $A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, missä p on nelikulmion piirin puolikas, $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. Johdetaan tässä yleisen kuperan nelikulmion alan lauseke ja päätellään siitä vastaavan syklisen nelikulmion ala. Olkoot kuperan nelikulmion sivut (vastapäiväisessä) järjestyksessä a, b, c ja d ja olkoon α sivujen a ja b välinen kulma sekä β sivujen c ja d välinen kulma. Nelikulmion ala A on kahden kolmion alan summana $A = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta$. Tästä saadaan identiteetti

$$\begin{aligned}
16A^2 = 4a^2b^2\sin^2\alpha + 4c^2d^2\sin^2\beta \\
+ 8abcd\sin\alpha\sin\beta. \quad (1)
\end{aligned}$$

Nelikulmion lävistäjän pituuden neliöksi saadaan kosinilauseen mukaisesti

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta,$$

josta

$$(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta.$$

Neliöön korottaminen tuottaa identiteetin

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)^2 &+ (c^2 + d^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)\\ &= 4a^2b^2\cos^2\alpha + 4c^2d^2\cos^2\beta - 8abcd\cos\alpha\cos\beta. \quad (2)\end{aligned}$$

Yhteenlaskulla saadaan kaavoista (1) ja (2) identiteettiä $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja kosinin yhteenlaskukaavaa $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ hyväksi käyttämällä

$$\begin{aligned}16A^2 + (a^2 + b^2)^2 + (c^2 + d^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)\\ = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Tästä saadaan sieventämällä,

$$\begin{aligned}16A^2 = 2(a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + a^2b^2 + c^2d^2)\\ -(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) - 8abcd\cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Kun oikean puolen ensimmäiset termit täydennetään neliöksi, saadaan

$$\begin{aligned}16A^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)\\ - 8abcd\cos(\alpha + \beta). \quad (3)\end{aligned}$$

Kun merkitään $\gamma = \alpha + \beta$ ja kun käytetään sivujen neliöiden summalle, sivujen neljänsien potenssien summalle ja sivujen tulolle merkintöjä $N = a^2+b^2+c^2+d^2$, $Q = a^4+b^4+c^4+d^4$ ja $W = abcd$, saadaankin kuperan nelikulmion ala muodossa

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{N^2 - 2Q - 8W\cos\gamma}. \quad (4)$$

Selvästi ala A on suurin mahdollinen, kun $\cos\gamma = -1$. Täten $\gamma = \pi$ ja syklisen nelikulmion alaksi ja Brahmaguptan kaavan uudeksi ilmiasuksi saadaan

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{N^2 - 2Q - 8W}. \quad (5)$$

Alan lauseke (4) ei muutu, vaikka kulman γ sijasta kaavassa käytettäisiin toisten vastakkaisten kulmien summaa $\delta = 2\pi - \gamma$, sillä $\cos\gamma = \cos\delta$.

Kun nelikulmion yksi sivu asetetaan nollaksi, $d = 0$, saadaan kaavasta (4) Heronin kaavan uusi muoto

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}. \quad (6)$$

Heronin ja Brahmaguptan kaavojen muotoilu sivujen potenssisummien avulla

Kaavasta (6) nähdään erityisesti, että kolmion alan laskemiseksi riittää tietää sivujen kaksi potenssisummaa $N = a^2 + b^2 + c^2$ ja $Q = a^4 + b^4 + c^4$. Tällöin kolmion alaksi tulee

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{N^2 - 2Q}.$$

Syklisen nelikulmion ala saadaan nelikulmion sivujen potenssisummien lausekkeena kunhan symmetrinen polynomi $W = abcd$ kaavassa (5) esitetään potenssisummien avulla. Jos merkitään symmetrisiä potenssisummia isoilla kirjaimilla

$$\begin{aligned}M &= a + b + c + d,\\ N &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2,\\ P &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3\end{aligned}$$

ja

$$Q = a^4 + b^4 + c^4 + d^4,$$

saadaan syklisen nelikulmion alan kaava (5) hieman vaivaa näkemällä muotoon

$$A = \frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{M^4 + 6N^2 + 8MP - 6M^2N - 12Q}.$$

Mutta symmetriset polynomit ja niiden esittäminen potenssisummien tai vastaavasti elementaaristen symmetristen polynomien avulla onkin jo toisen jutun aihe.

Tehtävä on kesken

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Anneli Kanto, Antti Kanto ja *Markku Sointu*: **Tehtävä Maassa**. Gummerus 2010. 248 s. 25 €.

Yksi maailman ehdottomia ja ikiaikaisia lainalaisuuksia on se, että nuorison käyttäytyminen on aina jotenkin virheellistä, ja sitä tulisi korjata. Asia koskee myös matematiikkaa: sen oppimista, halukkuutta sen oppimiseen, asennetta sitä kohtaan. Moni huolestunut kypsempien ikäpolvien ryhmä on tälläkin alueella pyrkinyt parannuksiin. Aika usein on päätetty perustaa koululaisille matematiikkakilpailu tai järjestää kerho. On suunniteltu hauskoja havaintovälineitä ja opettavaisia pelejä. Joku joukko on päättänyt perustaa lehden tai verkkosivuston. Tällaisen työn tulosta luet parhaillaan.

Kirjoittajakolmikon Kanto, Kanto ja Sointu luoman fiktiivisen *Matematia*-pikkuplaneetan ilmeisen tyynessä ja arvokkaassa miljöössä asustavat matematiikan suurmestarit. Heillä on klassiselta kalskahtavia nimiä, sellaisia kuin *Geometrica, Arithmetica, Mecanicus, Statisticus, Pedagogica* tai *Absoluticus*. Suurmestarien mieltä täyttää matematiikan ohella huoli erityisesti pohjoisen Suomen nuorisosta, jonka matematiikkasuhteessa on kovasti ongelmaa. Suurmestarien keino huonon tilanteen parantamiseksi on paheksuva julkilausuma, mutta Matematian nuoremmat asukkaat, vielä kisällistatuksessa olevat *Inspiratius, Fractalia* ja *Hackeria* huomauttavat aiheellisesti, että keino on tyystin tehoton. Sen sijaan he haluavat itse Maahan tilannetta korjaamaan.

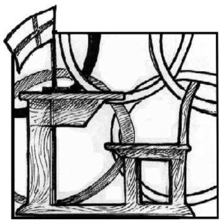
Tämä on takakannen tietoromaaniksi ristimän *Tehtävän maassa* alkuasetelma. Ennen pitkää ensin Inspiratius, sitten Fractalia ja tarinan pahis, juopon Absoluticuksen Hackeria-tytär siirtyvätkin suomalaiseen lukioympäristöön, ja loppu on melko vähämielenkiintoista kolmiodraamaa ja koululaiskuvausta. Kisällien aikaansaannokset eivät näytä julkilausumaa tuloksellisemmilta.

Kirja esittelee juoneen löyhästi liittyen myös muutamia matemaattisia tuloksia ja tarkasteluja, mm. uhkapelipanoksen jatkuvaan kahdentamiseen liittyvän *Pietarin paradoksin*, talonpoikaisjärjen vastaiselta vaikuttavan ehdollisen todennäköisyyden *Monty Hall* -ongelman, pienen *nim*-pelin analyysin, aika köykäisen trikin isojen lukujen viidennen juuren määrittämiseen ja analyysin keinoin ratkeavan optimointiongelman. Matemaattisten osioiden irrallisuutta muusta tekstistä on korostettu painamalla ne muusta tekstistä erottuvilla kirjasimilla. Kirjaa *Opettaja*-lehdessä esitellyt äidinkielenopettaja tästä iloitsikin: matemaattiset kohdat voi helposti ohittaa.

Matematiikan popularisoinnin vakiintunut tapa on, että matematiikan historiaan tulee vedota. Tässä ei Tehtävä Maassa poikkea genresta: muutamissa erillisissä tietolaatikoissa esitellään jokunen pääasiassa matematiikan suurmies. *Newton, Leibniz, Pythagoras, Platon, Arkhimedes, Descartes, Weierstrass, Lindemann, Gauss, Riemann* ja *Einstein* ovat päässeet laatikkoihin luonnehdinnoin, joita voi kauniisti sanoa hiukan faktoja oikoviksi. Aukeamaa, jolla listan viimeiset kolme nimeä esittelevä tietolaatikko sijaitsee, on kohdannut huono onni. Fyysikko-Einsteinin etunimi on tunnetusti *Albert*, mutta teoksessa mainittu *Alfred Einstein* on merkkihenkilö hänkin, tunnettu saksalais-amerikkalainen musiikkihistorioitsija. (Kantojen ja Soinnun erehdys ei ole ainutlaatuinen. Seitsemästä ensimmäisestä Googlen Alfred Einstein -kuvahaun kuvasta viisi esittää Albertia.) Ja kirjan varsinaisessa tekstissä juuri samalla aukeamalla Carl Friedrich Gaussin tietolaatikossa oikein oleva etunimi on muuttunut Johanniksi, etunimeksi, joka Gaussilla tosin myös oli, vaikka hän ei sitä koskaan aikuisella iällään käyttänyt, eivätkä Gaussista kirjoittavat käytä.

Ymmärrän, että Tehtävän Maassa kirjoittajakollektiivi haluaa liittyä alussa mainittuun maailmaa erityisesti nuorison matematiikanharrastuksen kohdalta parantamaan pyrkivään joukkoon. Tervetuloa! En oikein jaksa toivoa, että Tehtävä Maassa kovin monia matematiikalta kadotettuja sieluja pelastaisi, niin kuin eivät näy sen Matematia-lähettiläät juuri tekevän. Ja jos uskoo, että viehtymys matematiikkaan liittyisi kriittiseen ajatteluun, niin kirjan juonen epäloogisuudet ja lapsellisuudet eivät varmaan viehätä. Mutta ehkä kirjoittajat jättävät Inspiratiuksen, Fractalian ja Hackerian suomalaiseen lukioonsa kirjan jatko-osaa odottamaan.

Tehtävä maassa tuskin muodostuu myyntimenestykseksi. Se on tietysti vahinko, sillä tietoromaani on kuitenkin ideana hauska ja kirjoittajilla on yhtä ja toista sanottavaa, rivien välissäkin. Matematian suurmestarit esimerkiksi näyttävät olevan aika tasaisesti kumpaakin sukupuolta.



Matemaattisesta fysiikasta lukiossa

Heikki Pokela
Tapiolan lukio

Matematiikka ja fysiikka ovat erillisiä tieteitä. Matematiikkaa pidetään abstraktina määrän ja muodon tieteenä, jolla on vahvasta luonnontiede-kytköksestään huolimatta asema itsenäisenä oppiaineena lähes kaikissa yleissivistävissä kouluissa ympäri maailmaa. Se on osa sivistysperustaamme, vaikka matematiikkaan liitetään yleensä pelkkä välinearvo. Opetuksessa pyritään usein herättämään oppilaan kiinnostus matematiikkaan sellaisenaan, ilman liiallista motivaation hakua ns. sovellusesimerkeistä. Oppilas harjoittelee lukemattoman määrän toistoja polynomien sievennyksessä, integrointitekniikassa, tasogeometriassa kolmion ja ympyrän avulla jne. Harjoittelun mukana lisääntyy kyky nähdä syvemmälle matematiikan lainalaisuuksiin yhdistämällä opittuja asioita, ja oppilaalle kehittyy taito todistaa erilaisia väittämiä.

Myöhemmin yliopisto-opinnoissa matematiikka toimii vahvasti erityisesti fysiikassa. Useimmat fysiikan perusteorioista ovat esitettävissä säilymislakeina, jotka yleisimmässä esitystavassa kirjoitetaan integraalimuotoisina yhtälöinä. Näiden säilymislakien vaikutus yksinkertaistetuissa esimerkeissä fysiikan peruskursseilla tulee esille differentiaaliyhtälöillä. Aiemmilla kouluasteilla harjoitellut rutiinit ja lainalaisuudet pitäisi kyetä ottamaan käyttöön fysiikan opinnoissa – ja melko nopealla aikataululla omaksuttuna. Ongelmaksi tulee, että lukiossa erillisinä asioina opiskellut matematiikan osa-alueet, kuten vektorit ja integraalit, nähdään jonain ylioppilaskirjoituksiin hätäisesti opeteltavana juttuna, jolla ei ole käyttöä lukion jälkeen. Monelle lahjakkaallekin oppilaalle matematiikan syvällisempi yhteys fysiikkaan on mysteeri, ja miksipä ei olisi, sillä yhteyttä ei lukiossa opeteta. Kuitenkin sellaisiakin abiturientteja löytyy, joilla olisi kykyä opiskella matemaattista fysiikkaa lukiotasolla.

Differentiaali- ja integraalilaskennan käyttö fysiikassa jo lukiossa olisi mielestäni perusteltua, sillä analyysin ymmärtäminen ja sovellukset ovat käsittääkseni suomalaisen koulumatematiikan punainen lanka. Siis ainakin sovellustekniikka, jos ymmärtäminen jää vähemmälle, koska valitettavan usein analyysi joudutaan opettamaan heikolle pohjalle. Opetus lähtee murtoluvuista, ja polynomialgebran avulla edetään rationaalilausekkeisiin, joiden käsittely sievennystaidoilla eli lähinnä polynomien jaollisuudella avaa tien erotusosamäärään ja lopulta raja-arvon kautta derivaattaan. Derivaatta johdattaa integraalilaskentaan, differentiaaliyhtälöihin ja lopulta (luonnon)ilmiöiden simulointikykyyn yhteiskunnan teknologia- ja sivistystarpeita varten.

Mäntän lukion opetusmonisteesta kirjaksi

Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski ovat julkaisseet Solmun verkkosivulla

`http://solmu.math.helsinki.fi/2009/mfl.pdf` matemaattisen fysiikan kurssikirjan (lyh. MFL). Esipuheensa mukaan se on syntynyt parinkymmenen vuoden aikana Mäntän lukiossa käytetystä materiaalista matemaattisen fysiikan erikoiskurssiin. Käytin tätä kurssikirjaa syksyinä -09 ja -10 Tapiolan lukion kolmannen vuoden opiskelijoilla ja seurasin Aalto-yliopiston Teknillisen Korkeakoulun (lyh. TKK) tuntiopettajana, kuinka ensimmäisenä syksynä kurssikirjan opiskelleet saivat TKK:n perusopinnot alkuun syksyllä -10.

Jatko-opintojen alussa vektoreista ja kulmista otetaan aikaderivaattoja liikeyhtälöiden muodostamiseksi erilaisissa koordinaatistoissa. MFL:n fysiikan esitys alkaa perinteisesti mekaniikalla ja katsauksella termodynamiikkaan. Tässä tuodaan mukaan historiallinen perspektiivi, sillä Newtonin ja Keplerin liikeyhtälöt ovat alkeistapauksissa yksinkertaisia differentiaaliyhtälöitä, joiden ratkaisu voidaan opettaa myös lukiotasolla separoinnin, integroivan tekijän ja sijoittamisen avulla. Periaatteena MFL:ssä on opettaa differentiaaliyhtälöiden teoriaa riittävästi mutta kuitenkin riittävän vähän. Näin vältetään ongelma, joka on tuttu myös jatko-opintojen opettajille: raskas paketti differentiaaliyhtälöistä kompleksiratkaisuineen uudelle opiskelijalle – jolla yleensä ei ole mitään käsitystä differentiaaliyhtälöistä ennen jatko-opintoja – ei yleensä siirry käyttörutiiniksi ymmärryksen kanssa mekaniikan perusopintoihin. MFL:n tiivis ja havainnollinen opetusperiaate haastaa myös opettajan: kuinka suunnitella oppitunnille esitys, joka on samankaltainen mutta ei kuitenkaan kopio kirjan teoriasta ja esimerkeistä, jotta lahjakkaalle opiskelijalle jäisi itselleen opiskeltavaksi tunnin jälkeen kotonaan kirjan esitys, ja näin asian sisäistäminen vahvistuisi entisestään.

Toinen käsiteltävä osa-alue fysiikasta on termodynamiikka, jonka matemaattista käsittelyä kirjassa pohjustetaan johdatuksella integrointiin pitkin käyrää. Ennen kuin oppilas kunnolla huomaa, hän on jo soveltanut integraalilaskentaa termodynaamiseen prosessiin. Tarkastellessaan integraalin riippuvuutta polusta oppilas havaitsee, että on olemassa energian differentiaali dQ, joka jaettuna lämpötilalla T mahdollistaa laskemisen ilman riippuvuutta polusta, ja entropian luonne olennaisena suureena fysiikassa alkaa valjeta.

On toki todettava, että kirja edellyttää oppilaalta erinomaiset pohjatiedot. Koulumatematiikka on oltava hallinnassa tappiin saakka. Toisaalta TKK:n slangilla ilmaistuna kirjan esittämä ns. alkeisfuksimekaniikka (ensimmäisen TKK:n opintovuoden mekaniikan peruskurssin alkeet) edellytetään joko osatuksi tai nopeasti omaksutuksi heti opintojen alussa. Jossain oppiminen on siis tapahduttava, ja jos valita saa, mieluiten jo abiturienttina olisi hyvä saada jokin muistijälki aikaiseksi.

Yksittäisen lukiokurssin tuntimäärä on rajattu, minkä vuoksi kirjassa aihealueita voi olla vain muutama. Mekaniikan perusliikeyhtälöiden ja termodynamiikan valinta on ilmiselvä; Newtonin liikeyhtälöihin ja termodynamiikan sovellusten kehittymiseen eli höyrykoneisiin perustuu teollinen vallankumous. Aaltoliikeoppi, joka on myös valittu kurssikirjaan, kilpailee mielestäni tästä asemasta RLC-piirien ja yleisestikin sähköopin kanssa.

Koekysymysten laadinta tällaisesta kurssista on aina mielenkiintoista. Laadin kokeesta syksyn -09 kurssilla mielestäni mahdollisimman haastavan. Yllätyksekseni jokaiseen koetehtävään tuli oikea ratkaisu – eri oppilailta. Päätelmäni on, että kurssin sisältö soveltuu hyvin abiturienteille opetettavaksi sillä edellytyksellä, että pohja laskurutiinin muodossa on kunnossa. Ilman sitä tulee vaikeuksia. Jotain tietysti kertoo kyseisen vuoden oppilasryhmästä, että heistä kolme eteni fysiikan lukiokilpailun loppukilpailuun ja yksi heistä saavutti lopulta hopeaa fysiikkaolympialaisissa, ja eräs toinen eteni pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun saakka. Voi vain toivoa, että lukiomme saisi käyntiin matematiikkapainotuksen, jotta joka vuosi olisi mahdollista saada kyvyiltään vastaavantasoinen ryhmä kokoon. Ryhmän merkitystä yksittäiselle oppilaalle ei voi aliarvioida.

Lukion tarkoituksesta

Lyhyesti ilmaistuna lukion päätehtävä on valmistaa opiskelija kyvykkääksi aloittamaan jatko-opinnot. Lukio on yleissivistävä ja kaikki lukion aloittavat oppilaat eivät suinkaan ole selvillä tulevaisuuden urasuunnitelmistaan. Kuitenkin sellaisille oppilaille, joilla on kykyä ja kiinnostusta painottaa opinnoissaan matematiikkaa ja luonnontieteitä, tulisi antaa siihen mahdollisuus valtakunnallisen sitovan lainsäädännön kautta. Suurissa lukioissa, joilla on painotus esimerkiksi matematiikkaan, tämä onnistuu järjestämällä eritasoisia ryhmiä pitkän matematiikan sisälle ja resurssien sallimissa puitteissa tarjoamalla myös erikoiskursseja esimerkiksi differentiaaliyhtälöistä, matematiikkakilpailutehtävistä – ja matemaattisesta fysiikasta.

Mielestäni olisi suorastaan kulttuuriteko, jos lukion opetussuunnitelmaan palautettaisiin differentiaaliyhtälöiden perusteet – ja lisättäisiin MFL:n esityksen mukainen matemaattinen fysiikka. Jotta edellä mainittujen asioiden oppiminen sujuisi abiturientilta, analyysin lisäksi myös aiemmin oppilaille esitellyt matematiikan osa-alueet, joitten perusosaaminen on välttämätön esitietovaatimus analyysille, algebra ja geometria tulisi vahvistaa jo yläkoulussa. Pyörää ei toki tarvitse keksiä uudelleen, sillä vilkaisu vanhoihin opetussuunnitelmiin, jotka olivat käytössä oppikoulun aikana, osoittavat, että kyse on enemmän palauttamisesta kuin lisäyksestä opetussuunnitelmaan.

Ensimmäinen opiskeluvuosi Teknillisessä korkeakoulussa: perusopintojen tarkoitus

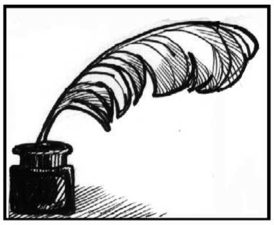
Suomalaisessa yhteiskunnassa on tarve henkilöille, jotka ovat saaneet vahvan matemaattisen pohjakoulutuksen ammattiinsa. Tätä tarvetta silmällä pitäen TKK:lla on muotoutunut ns. perusopintojen laaja oppimäärä. Matematiikan peruskurssit laajalla oppimäärällä ovat sisällöltään varsin kunnianhimoisia – mutta tarpeellisia, jos halutaan ylläpitää monia tärkeinä pitämiämme asioita. Laajaa oppimäärää kutsutaan suorittamaan jokaisesta koulutusohjelmasta noin kymmenen prosenttia hakijoiden parhaimmistosta TKK:n pääsykoepisteiden perusteella. Teknillisen fysiikan ja matematiikan opiskelijoille laaja oppimäärä kuuluu pakollisena tutkintoon.

Tasoero lukion pitkästä matematiikasta TKK:n laajaan matematiikkaan on monille opiskelijoille liian iso. Turhan moni putoaa kyydistä, vaikka TKK:n puolelta on tehty paljon opintojen alun sujuvuuden suhteen: luentojen ja laskuharjoitusten lisäksi järjestetään nykyisin myös laskutupia, joissa assistentteja on arkisin koko päivän ajan opastamassa peruskurssien tehtävissä. Havaintoni mukaan syksyllä -09 kurssikirjan sisällön Tapiolan lukiossa opiskelleet abiturientit saivat opintonsa keskimääräistä paremmin alkuun TKK:lla syksyllä -10. Erityisesti he kokivat tärkeiksi paikkavektorin aikaderivaatan esityksen napakoordinaatistossa ja yleensäkin kaiken, mikä opetti jonkin muun kuin tutun xyz-koordinaatiston käyttöä.

Matematiikan osalta uusilta TKK:n opiskelijoilta on tullut palautetta lukiokurssin Ma13 raja-arvotarkasteluista. Matematiikan Taito -kirjasarjaa – jonka tekijäryhmään MFL:n kirjoittajat kuuluvat – käyttäneiden lukioiden oppilaat ovat abisyksynään tutustuneet raja-arvojen täsmälliseen esitykseen, epsilon-todistukseen. Ensiksi suhtauduin hieman epäilevästi asian käsittelyyn abiturienttien kanssa, mutta tässäkin parin vuoden aikana kertynyt näyttö puhuu puolestaan: epsilon-todistuksia on harjoiteltava lukiossa yksinkertaisimmissa muodoissaan ajan kanssa ennen niiden käyttöä matematiikassa tärkeiden ja monimutkaisempien lauseiden todistuksiin. Jos tämä vaihe jää syvällisesti ymmärtämättä, tie matematiikan pääaineopintojen menestykselliseen läpikäymiseen on melko tukossa – ja uusi vahvan matemaattisen pohjakoulutuksen saanut diplomi-insinööri jää syntymättä palvelemaan yhteiskuntaa.

Laajan oppimäärän lisäksi TKK:lla on jokaisella koulutusohjelmalla omiin ammattiopintoihin painottuvat matematiikan peruskurssit, jotka ovat enemmän "insinöörimatematiikkaa" ja jotka valtaosa opiskelijoista suorittaa (laajan oppimäärän sijaan). Epsilon-todistusten asema näissä insinöörimatematiikan peruskursseissa herättää aina silloin tällöin keskustelua. Samoin voi kysyä, miten tarpeellista on yrittää epsilon-todistusten alkeita lukiossa abivuonna muille kuin kiitettäviä arvosanoja aiemmista kursseista saaneille oppilaille. Vastaus lienee: ei välttämättä olekaan tarpeellista, mutta niille oppilaille, jotka tarvitsevat matematiikkaa tulevaisuudessa, se on suorastaan välttämätöntä.

Uusien korkeakouluopiskelijoiden matemaattisten valmiuksien lähtötaso herättää paljon keskustelua. Opettajat yliopistoissa pitävät yleensä lähtötasoa keskimäärin liian heikkona, mutta jotkut lukioiden opettajat puolestaan tuskailevat, että matematiikan ylioppilaskokeet ovat oppilaille keskimäärin liian vaikeita ja siksi he haluavat kevennyksiä opetussuunnitelmiin. Kuitenkin jollain tapaa pitäisi turvata lahjakkaiden oppilaiden sujuva siirtyminen lukiosta yliopistoon. Matemaattisen fysiikan kirja toimii parhaimmillaan kuin sillanrakentajana näiden kahden koulutason nivelvaiheessa.



Kahdenlaisia kultamitaleja

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Ruudinkeksijä on sanonnan mukaan fiksunoloinen henkilö. Dynamiitin ruotsalainen keksijä *Alfred Nobel* nosti yli sata vuotta sitten kolme tieteenalaa, fysiikan, kemian ja lääketieteen ylitse muiden perustamalla kuuluisat palkintonsa. Myöhemmin on samaan sarjaan liitetty vielä taloustiede. Aina silloin tällöin kysytään, miksi matematiikassa ei jaeta tuota miljoonan euron suuruusluokan palkintoa. Sellainenkin teoria, ilmeisen perätön, on esitetty, että taustalla olisivat olleet Alfred Nobelin ja hänen maanmiehensä, Suomessakin aikanaan toimineen ja koko Euroopan matematiikkaan organisaatiotasolla suuresti vaikuttaneen *Gösta Mittag-Lefflerin* henkilökohtaiset kaunat, joiden lähtökohta olisi ollut mustasukkaisuus.

No, Nobel oli kemisti ja liikemies. Hänen palkinnoilla arvostamiensa alojen saavutuksien vaikutus elämään, vaurauteen ja maailmankuvaankin on helpommin hahmotettavissa kuin matematiikan. Nobelin ratkaisu oli varmasti harkittu ja perusteltu.

Mutta on matemaatikoillakin nobelinsa. Yleisen käsityksen mukaan korkein kunnianosoitus, jonka matemaatikko voi työstään saada, on *Fieldsin mitali*. Rahallisesti tämä palkinto on Nobelin palkinnon rinnalla kolikkotasoa: *Arkhimedeen* kuvalla varustetun kultamitalin lisäksi palkittu saa 15000 Kanadan dollarin šekin. Miksi juuri Kanadan rahaa? Taustalla on vuonna 1924 Torontossa pidetty Kansainvälinen matemaatikkokongressi. Sitä oli järjestämässä matemaatikko *John Charles Fields* (1863–1932). Hänen toimensa olivat niin taitavia, että kongressin järjestäjille jäi hiukan ylijäämää. Fields sai ajatuksen säätiöidä ylijäämä käytettäväksi nuorille matemaatikoille Kansainvälisten matemaatikkokongressien yhteydessä jaettavina palkintoina. Kongresseja pidetään joka neljäs vuosi, ja Fieldsin idea eteni hitaasti. Hän ehti kuolla ennen ensimmäisen palkinnon jakoa, mutta tästä sinänsä harmillisesta tapahtumasta seurasi palkinnon kannalta hyvääkin, sillä Fieldsin testamentti sisälsi huomattavan lahjoituksen palkintosäätiölle.

Ensimmäiset Fieldsin mitalit jaettiin vuonna 1936 Oslossa, joka tuolloin oli Kansainvälisen matemaatikkokongressin järjestämisvuorossa. Aivan ensimmäisen Fieldsin mitalin sai (aakkosjärjestyksen ansiosta) suomalainen *Lars Valerian Ahlfors* (1907–96). Toinen tuolloin palkittu oli yhdysvaltalainen *Jesse Douglas*. Lars Ahlfors vaikutti vuodesta 1946 Harvardin yliopistossa, mutta hänen perillisensä lahjoittivat Ahlforsin Fieldsin mitalin Helsingin yliopistolle. Sitä (tai oikeastaan sen näköiskopiota, alkuperäinen on kassaholvissa) voi käydä ihailemassa Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen ala-aulassa Kumpulan kampusalueella.

Fieldsin mitaleja jaetaan joka neljäs vuosi. Kulloinkin palkitaan kahdesta neljään matemaatikkoa. Palkintoon liittyy mielenkiintoinen lisäehto: palkittu ei saa olla yli 40-vuotias. Niinpä Fieldsin mitalilla ei palkita ehyttä elämäntyötä (niin kuin Nobelin palkinnolla usein tehdään), vaan sellaisen saa yleensä parhaassa luomisiässään oleva henkilö. 40 vuottaan täyttänyt matemaatikko voi toisaalta rauhoittua, hänen ei tarvitse haaveilla suuresta läpimurrosta, joka mitalin tuottaisi.

Viime vuosien kuuluisimpia matemaattisia saavutuksia oli *Andrew Wilesin* esittämä todistus *Fermat'n suurelle lauseelle*, todistus, jota oli etsitty pian 350 vuotta. Vuonna 1953 syntynyt Wiles oli ratkaisun valmistuessa 1990-luvun puolivälissä jo kriittisen ikärajan ylittänyt, eikä mitalia saanut.

Tätä kirjoittamaan minut innosti neljän nimen luettelo viimeisistä mitalinsaajista. Jako tapahtui viime elokuussa Intian Hyderabadissa pidetyssä Kansainvälisessä matemaatikkokongressissa. Fieldsin mitalin saajat olivat *Ngô Bao Châu, Stanislav Smirnov, Elon Lindenstrauss* ja *Cédric Villani*. Nimistä kolme löytyy toisestakin mitaliluettelosta. Ngô Bao Châu kilpaili Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa vuosina 1988 ja 1989 Vietnamin joukkueessa, palkittiin molemmilla kerroilla kultamitalilla, ja sai vuoden 1988 olympiatehtävistä täydet pisteet. Stanislav Smirnov puolestaan kilpaili kahta vuotta aikaisemmin, vuosina 1986 ja 1987 Neuvostoliiton joukkueessa. Molemmilla kerroilla kultamitali ja täydet pisteet. Entä Lindenstrauss? Hän kilpaili vuonna 1988 Israelin joukkueessa ja palkittiin pronssimitalilla (muistetaan, että matematiikkaolympialaisissa kultamitali ei välttämättä tarkoita sijaa 1 ja pronssimitali tarkoittaa sijoitusta vähän keskivälin yläpuolella). Villanin nimeä ei matematiikkaolympialaisten tulosluetteloissa ole.

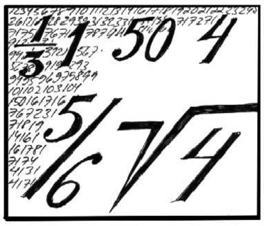
Göteborgilainen matemaatikko Ulf Persson oli hänkin läsnä Hyderabadin kongressissa. Persson haastatteli aika perusteellisesti kaikkia neljää mitalinsaajaa. Haastattelut on julkaistu Euroopan Matemaattisen Yhdistyksen tiedotuslehdessä joulukuussa 2010. Persson sivusi jokaisessa haastattelussa myös matematiikkakilpailuja ja sitä, miten mitalistit olivat päätyneet matemaatikoiksi. Mitalistien kokemukset eivät olleet yhteneviä. Lindenstrauss, itse tunnetun matemaatikon poika, kertoo ymmärtäneensä jo aika nuorena, mitä on olla matemaatikko. Hän ei kokenut saaneensa koulusta paljonkaan eväitä uralleen, eikä kommentoinut osallistumistaan matematiikkakilpailuihin. Ngô Bao Châu oli saanut opiskella lahjakkaille tarkoitetussa koulussa Hanoissa. Hänen mielestään Vietnamin intensiivinen olympiavalmennus ei ollut pelkästään hyväksi: useat sen läpikäyneet kilpailuosallistujat kyllästyivät ja siirtyivät pois matematiikasta. Hänen mielestään keskittyminen vaikeiden tehtävien ratkaisemiseen voi hämärtää sen, että matematiikka pohjimmiltaan pyrkii syvällisesti ymmärtämään yksinkertaisia asioita.

Stanislav Smirnovin tie matematiikkaan puolestaan oli kulkenut matematiikkakilpailujen kautta. Hän oli jo 11-vuotiaana ollut ensimmäisissä paikalliskilpailuissaan ja vedetty mukaan matematiikan harrastuspiireihin. Smirnovin mukaan harva matematiikan opettaja osaa aidosti välittää oppilailleen matematiikan vetovoimaa. Neuvostoliitossa toimineet matemaattiset harrastuspiirit korvasivat Smirnovin mukaan oivallisesti tämän puutteen. Menestys Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa antoi itseluottamusta, mutta Smirnov piti kuitenkin paikallisia ja aluekilpailuja tärkeämpinä portaina kohti matemaatikon uraa.

Cédric Villanikin muisteli, että kun hän oli ollut alun toisella kymmenellä, niin pari hyvää, koulukurssin ulkopuolellekin uskaltautunutta opettajaa olivat merkittävästi vaikuttaneet hänen uravalintaansa. Villanin vanhemmat olisivat toivoneet poikansa osallistuvan myös matematiikkakilpailuihin, mutta hänen tuolloinen opettajansa oli ollut toista mieltä: kilpaileminen on merkityksetöntä ja mahdollisesti vahingollistakin. Villani ei kokenut kärsineensä tilanteesta, mutta hänkin myöntää, että kilpailumenestyksen ja matemaatikkona menestymisen välillä on yllättävän suuri korrelaatio, niin erilaisia kuin asiat ovatkin.

Fieldsin mitaleita on tähän mennessä jaettu 52 kappaletta ja näistä enintään 32 sinä aikana, jona matematiikkaolympialaisiin osallistuneella olisi ollut mahdollista mitali saada. Ainakin 11 mitalistia on menestynyt myös kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa. Heidän joukossaan ovat jo mainittujen lisäksi mm. viime vuosien valovoimaisimpiin matemaatikkoihin kuuluva *Terence Tao* (pronssimitali, hopeamitali ja kultamitali vuosina 1986–88; Tao on kaikkien aikojen nuorimpia olympiakilpailijoita) ja kuuluisan *Poincarén otaksuman* todistanut eksentrinen *Grigori Perelman* (kultamitali vuonna 1982, kieltäytyi ottamasta vastaan Fieldsin mitalia).

Fieldsin mitalin saajien muodostamasta pienotoksesta voi, jos haluaa, lukea varsin lohdullisen viestin. Loisteliaaksi matematiikan tutkijaksi tullakseen ei ole tarpeen olla nuorena loistelias kilpailumatemaatikko, mutta ei sellaisena olemisesta juuri vahinkoakaan koidu. Tutkija, vaikka työskentelisikin hitaasti laajan ongelman kimpussa, kohtaa yleensä työssään pienempiä kompastuskiviä, jotka saattavat olla hyvinkin kilpailutehtävän luonteisia. Jos on tottunut löytämään ratkaisun nopeasti, tulee se laajapiirteisempikin työ varmemmin valmiiksi.



Mitä ovatkaan merkitsevät numerot?

Juho Niemelä
Kustannustoimittaja, Tammi Oppimateriaalit

Kirjoissa ja internetissä kerrotaan melkoisen vaihtelevasti siitä, mitä ovat merkitsevät numerot. Yleensä sanotaan, että desimaaliluvun alussa olevat nollat eivät ole merkitseviä. Toisinaan sanotaan myös, että kokonaisluvun lopussa olevat nollat eivät ole merkitseviä. Kukaan ei tunnu haluavan kertoa yksinkertaisesti ja täsmällisesti, mitkä kaikki numerot ovat merkitseviä. Ei edes Kalle Väisälä ollut kirjassaan *Algebran oppi- ja esimerkkikirja I* (15. painos, s. 147) kovin täsmällinen:

”Jos taas viimeinen näistä n:stä desimaalista on hieman epävarma, niin se kuitenkin usein säilytetään likiarvossa, vaikka se *saattaakin* olla jonkin verran virheellinen, ja likiarvossa sanotaan tällöin olevan *n merkitsevää desimaalia*, so. desimaaleja, joilla on jotakin merkitystä.”

Kallen määritelmä on minusta hankala. Pyrin tässä yksinkertaisempaan. Vastaan heti aluksi keskeisimpiin kysymyksiin:

- Ovatko desimaaliluvun alussa olevat nollat merkitseviä numeroita?
  - Eivät ole, koskaan. Oikeita numeroita ne voivat olla.

- Ovatko nollia seuraavat numerot merkitseviä numeroita?
  - Yleispätevää vastausta ei ole. Kysy likiarvon antajalta, kuinka suuri on likiarvon virhe, niin sitten osaan vastata. Jos virheestä ei saada tietoa, usein voinee olettaa, että numerot ovat oikeita ja siis myös merkitseviä (koska ne eivät ole alkunollia).

- Ovatko kokonaisluvun lopussa olevat nollat merkitseviä?
  - Sama vastaus kuin edelliseen. Tosin epävarmuus niiden oikeellisuudesta eli merkitsevyydestä on suurempi kuin edellisessä tapauksessa.

- Kerrotko siis vielä oikein lyhyesti, mitä ovat merkitsevät numerot?
  - Numeroita, jotka eivät ole alkunollia ja jotka ovat oikeita. Numeron oikeellisuus riippuu likiarvon virheestä. Jos virheen suuruudesta ei tiedetä mitään, merkitsevien numeroiden lukumäärääkään ei tiedetä. Lue lisää alempaa...

Likiarvo ja virhe. Oikeat ja merkitsevät numerot

Toisinaan luvun tarkkaa arvoa ei tiedetä vaan on turvauduttava **likiarvoihin**. Likiarvossa on yleensä virhettä. Määritellään:

$$(\textbf{absoluuttinen})\ \textbf{virhe} = |\text{tarkka arvo} - \text{likiarvo}|.$$

Tarvittaessa voidaan asettaa myös seuraava määritelmä:

$$\textbf{korjaus} = \text{tarkka arvo} - \text{likiarvo},$$

ts.

$$\text{tarkka arvo} = \text{likiarvo} + \text{korjaus}.$$

Likiarvon numero on **oikea**, jos likiarvon virhe on korkeintaan puolet numeron paikkaa vastaavasta yksiköstä (kymmenpotenssista). Esimerkki valaisee asiaa:

$$\text{tarkka arvo} = 1$$
$$\text{likiarvo} = 1{,}0234$$
$$\text{virhe} = 0{,}0234$$

Nyt likiarvon viimeinen oikea numero on 0, sillä numeron 0 paikkaa vastaava yksikkö on 0,1 ja

$$\text{virhe} = 0{,}0234 \leq 0{,}05 = 0{,}5 \cdot 0{,}1.$$

Seuraava numero 2 ei enää ole oikea, koska

$$\text{virhe} > 0{,}005 = 0{,}5 \cdot 0{,}01.$$

Oikeita ovat siis kaksi ensimmäistä numeroa 1 ja 0.

Viimeinen oikea numero löydetään seuraavasti:

- Laske likiarvon virhe.
- Katso virheen ensimmäistä nollasta poikkeavaa numeroa: onko se ≤ 5 vai > 5?
    - Jos se on ≤ 5 (ja tapauksessa 5 numeron perässä on vain nollia), tämän numeron paikkaa *edeltävällä* paikalla oleva likiarvon numero on viimeinen oikea numero.
    - Jos se on > 5 (tai 5 ja roskia perässä), tämän numeron paikkaa *kahta edempänä* oleva likiarvon numero on viimeinen oikea numero.

Havainnollistetaan tätä:

tarkka arvo:	1	1
likiarvo:	$\overbrace{1\;,\;0}^{\text{oikeita}}\overbrace{2\;3\;4}^{\text{eivät oikeita}}$	$\overbrace{1\;,\;0}^{\text{oikeita}}\overbrace{0\;7\;8}^{\text{eivät oikeita}}$
	1 askel	2 askelta
virhe:	$0\;,\;0\underbrace{\boxed{2}}_{\leq 5}3\;4$	$0\;,\;0\;0\underbrace{\boxed{7}}_{> 5}8$

Likiarvon **merkitseviä numeroita** ovat kaikki oikeat numerot paitsi mahdolliset likiarvon alussa olevat nollat. **Oikeita desimaaleja** ovat kaikki desimaalipilkun jälkeen tulevat oikeat numerot.

Tästäkin esimerkki:

$$\text{tarkka arvo} = 0{,}1$$
$$\text{likiarvo} = 0{,}0995$$
$$\text{virhe} = 0{,}0005$$

Oikeita numeroita ovat 0, 0, 9 ja 9, joista merkitseviä ovat yhdeksiköt. Likiarvossa on siis kaksi merkitsevää numeroa. Oikeita desimaaleja on kolme (0, 9, 9).

Huomautus: Väisälän määritelmä eroaa edellä esitetystä määritelmästä ainoastaan tilanteissa, joissa virhettä ei tiedetä tarkasti. Väisälän mukaan oikeiksi tiedettyjä numeroita seuraavakin numero on merkitsevä, jos ”sillä on merkitystä”, minkä ymmärtäisin tarkoittavan jotakin sellaista kuin ”jos se on oikea kohtalaisen suurella todennäköisyydellä”. Jos esimerkiksi käsiajanotolla saatu aika on 14,6 s ja virheen tiedetään olevan korkeintaan 0,2 s, niin Väisälän mukaan kaikki numerot ovat merkitseviä, sillä onhan hyvinkin mahdollista, että myös 6 on oikea. Mutta jos myöhemmin saadaan tietoon sähköaika 14,72 s, niin sillä hetkellä kaiketi 6 *lakkaa olemasta merkitsevä*, koska silloin tiedetään *varmasti*, ettei se ole oikea. Se, että numeron merkitsevyys riippuu virhetiedosta, on aika hankalaa ymmärtää ja opettaa. Tässä esitetyn määritelmän pohjalta asiat menevät minusta yksinkertaisemmin: käsiajassa numerot 1 ja 4 ovat varmasti merkitseviä, ja numeron 6 merkitsevyyttä ei yksinkertaisesti tiedetä. Sähköajan kuulemisen yhteydessä selviää, että 6 ei ole merkitsevä. – Jatketaan nyt siis edellä esitetyn määritelmän pohjalta.

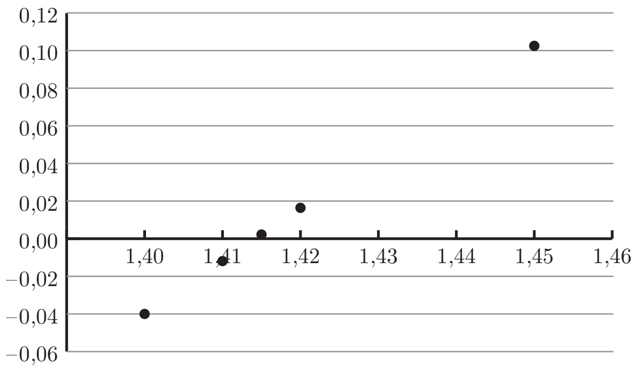
Huomaa, että tarkasta arvosta pyöristämällä ja normaaleja pyöristyssääntöjä noudattamalla saatavan likiarvon *kaikki numerot* ovat aina oikeita. Tämä johtuu siitä, että pyöristyksestä aiheutuva virhe on aina korkeintaan puolet viimeisestä mukaan tulevasta yksiköstä. Rajatapaukset voidaan pyöristää sekä alas- että ylöspäin: luvun 1,5 likiarvoissa 1 ja 2 on kummassakin yksi oikea numero (koska virhe on kummassakin 0,5). Yksinkertaisinta on noudattaa tavanomaista pyöristyssääntöä eli pyöristää rajakohdasta ylöspäin.

Pyydettäessä määrittämään jokin luku *k:n merkitsevän numeron tarkkuudella* tai *k:n desimaalin tarkkuudella* on määritettävä likiarvo, jossa on k merkitsevää numeroa tai vastaavasti k oikeaa desimaalia. Likiarvon loppuun ei tällöin pidä jättää numeroita, joiden oikeellisuudesta ei ole tietoa, jottei annettaisi harhaanjohtavaa kuvaa likiarvon tarkkuudesta – luonnollinen oletus kun on, että annetun likiarvon kaikki numerot ovat oikeita. Pyydetynlainen likiarvo löydetään esimerkiksi siten, että etsitään jokin riittävän lyhyt väli, jolta kaikki luvut pyöristyvät normaalien pyöristyssääntöjen mukaisesti samaan, pyydetyn mittaiseen likiarvoon.

Esimerkki: Määritä funktion $f(x) = x^2 - 2$ positiivinen nollakohta kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu: Lasketaan funktion arvoja:

x	$f(x)$	
1	-1	< 0
2	2	> 0
1,5	0,25	> 0
1,3	$-0{,}31$	< 0
1,4	$-0{,}04$	< 0
1,45	0,1025	> 0
1,42	0,0164	> 0
1,41	$-0{,}0119$	< 0
1,415	0,002225	> 0



Nollakohta on suurempi kuin 1,41 ja pienempi kuin 1,415, joten se pyöristyy luvuksi 1,41, joka on pyydetty likiarvo. Vastaukseksi ei pidä antaa esimerkiksi 1,415, vaikka siinäkin on vähintään kolme merkitsevää numeroa, koska numeron 5 oikeellisuutta ei voida päätellä taulukkoon laskettujen arvojen perusteella.

Varsinkin luonnontieteissä on tapana noudattaa seuraavia sääntöjä:

- Jos laskutoimituksissa on vain yhteen- ja vähennyslaskuja, vastaus ilmoitetaan yhtä monen *desimaalin* tarkkuudella kuin epätarkin lähtöarvo.
- Muulloin vastaus ilmoitetaan yhtä monen *merkitsevän numeron* tarkkuudella kuin epätarkin lähtöarvo.

Säännöt ovat käytännöllisiä, mutta ne eivät takaa, että vastauksen kaikki numerot ovat oikeita, vaikka lähtöarvojen kaikki numerot olisivat oikeita. Yksinkertainen esimerkki on seuraava:

tarkat arvot: 1,5 ja 2,5
likiarvot: 2 ja 3 (numerot ovat oikeita)

tarkkojen arvojen summa: $1{,}5 + 2{,}5 = 4$
likiarvojen summa: $2 + 3 = 5$ (numero ei ole oikea)

tarkkojen arvojen tulo: $1{,}5 \cdot 2{,}5 = 3{,}75$
likiarvojen tulo: $2 \cdot 3 = 6$ (numero ei ole oikea)

Täsmällisempi virhearviointi edellyttää tarkempaa virheiden kasautumisen tarkastelua (jäljempänä).

Likiarvon merkitsemistapoja

Likiarvon ilmoittamisen lisäksi tulisi aina kertoa, *millä välillä* tarkan arvon tiedetään tai ainakin arvellaan olevan. Toisin sanoen tulee tavalla tai toisella ilmoittaa likiarvo ja *virheen yläraja.*

Yksinkertainen tapa on ilmoittaa pelkästään likiarvo ja antaa samalla ymmärtää, että likiarvon kaikki numerot ovat oikeita. Esimerkiksi antamalla likiarvoiksi

$$1{,}23 \text{ ja } 10{,}3 \text{ m}$$

ilmaistaan, että tarkat arvot ovat väleillä

$$[1{,}225;\ 1{,}235] \text{ ja } [10{,}25 \text{ m},\ 10{,}35 \text{ m}].$$

Toinen vaihtoehto on käyttää $\pm$-merkkiä. Esimerkiksi merkinnöillä

$$1{,}23 \pm 0{,}01 \text{ ja } 10{,}3 \text{ m} \pm 0{,}02 \text{ m}$$

tarkoitetaan, että tarkat arvot ovat väleillä

$$[1{,}22;\ 1{,}24] \text{ ja } [10{,}28 \text{ m},\ 10{,}32 \text{ m}].$$

(Huomaa, että tässä tapauksessa likiarvossa 1,23 tiedetään olevan vähintään kaksi merkitsevää numeroa. Likiarvon 10,3 m kaikki numerot ovat merkitseviä.)

Virheen yläraja voidaan ilmaista myös prosentteina likiarvosta. Merkinnät

$$1{,}23 \pm 10\ \% \text{ ja } 10{,}3 \text{ m} \pm 1\ \%$$

tarkoittavat samaa kuin

$$1{,}23 \pm (0{,}1 \cdot 1{,}23) \text{ ja } 10{,}3 \text{ m} \pm (0{,}01 \cdot 10{,}3 \text{ m}),$$

joten tarkat arvot ovat väleillä

$$[1{,}23 - 0{,}123; 1{,}23 + 0{,}123] = [1{,}107; 1{,}353]$$

ja

$$\begin{aligned}&[10{,}3 \text{ m} - 0{,}103 \text{ m}, 10{,}3 \text{ m} + 0{,}103 \text{ m}]\\ &\qquad = [10{,}197 \text{ m}, 10{,}403 \text{ m}].\end{aligned}$$

(Nyt likiarvossa 1,23 on merkitseviä numeroita vähintään yksi ja likiarvossa 10,3 m vähintään kaksi.)

Varsin usein saatetaan kuitenkin ilmoittaa pelkkä likiarvo, vaikka likiarvon kaikkia numeroita ei tiedettäisikään oikeiksi. Esimerkiksi Päiväntasaajan pituudeksi ilmoitetaan usein 40 000 km, vaikka tiedetäänkin, etteivät kaikki numerot tässä luultavasti ole oikeita. (Päiväntasaajan pituus on kilometrin tarkkuudella 40 075 km, joten oikeita numeroita on itse asiassa vain kaksi.)

Selkeintä, mutta ei ehkä käytännöllisintä, olisi aina ilmoittaa virheen yläraja yksiselitteisellä tavalla.

Suhteellinen virhe

Absoluuttista virhettä paremmin likiarvon hyvyyttä kuvaa **suhteellinen virhe** eli se, kuinka suuri virhe on suhteessa tarkkaan arvoon:

$$\text{suhteellinen virhe} = \left|\frac{\text{absoluuttinen virhe}}{\text{tarkka arvo}}\right|.$$

Suhteellinen virhe ilmaistaan usein prosentteina.

Jos suhteellinen virhe on pieni, niin

$$\text{suhteellinen virhe} \approx \left|\frac{\text{absoluuttinen virhe}}{\text{likiarvo}}\right|.$$

Esimerkki tästä: Tarkka arvo 100, likiarvo 99, (absoluuttinen) virhe 1, suhteellinen virhe $1/100 = 0{,}01 = 1\,\%$. Suhteellinen virhe on lähestulkoon sama kuin $1/99 = 0{,}010101\ldots = 1{,}0101\ldots\,\%$.

Tarkkaa arvoa ei useinkaan tiedetä, eikä silloin pystytä laskemaan suhteellista virhettäkään. Yläraja suhteelliselle virheelle saadaan laittamalla osoittajaksi absoluuttisen virheen yläraja ja nimittäjäksi kyseisessä tilanteessa pienin mahdollinen tarkan arvon itseisarvo.

Esimerkki: Jos talon pituus on 13 m $\pm$ 0,1 m, niin likiarvon 13 m suhteellinen virhe on korkeintaan

$$\frac{0{,}1\text{ m}}{12{,}9\text{ m}} = \frac{1}{129} \approx 0{,}78\,\%.$$

Virheiden kasautumisesta

Jos lähtöarvoissa on virhettä, niin laskutoimitusten lopputuloksissa saattaa olla sitä vielä enemmän. Pahimmassa tapauksessa virhe kasvaa eli kasautuu, mutta voi käydä myös niin onnellisesti, että virheet kumoavat toisiaan.

Yhteenlaskussa (ja vähennyslaskussa) likiarvojen summan virhe on korkeintaan lähtöarvojen virheiden ylärajojen summa. Kahden luvun summalle tämä nähdään seuraavasti: jos $T_1 = L_1 \pm V_1$ ja $T_2 = L_2 \pm V_2$ (T = tarkka, L = likiarvo, V = virheen yläraja), niin

$$T_1 + T_2 = (L_1 + L_2) \pm (V_1 + V_2).$$

Kerto- ja jakolaskussa näin yksinkertaista sääntöä ei ole. Likimain on voimassa, että likiarvojen tulon ja osamäärän *suhteellinen* virhe on korkeintaan lähtöarvojen *suhteellisten* virheiden ylärajojen summa. Kun oletetaan, että kaikki esiintyvät luvut ovat positiivisia, kahden luvun tulolle tämä nähdään seuraavasti: Jos lähtöarvojen suhteelliset virheet ovat korkeintaan

$$\frac{V_1}{T_1} = S_1 \text{ ja } \frac{V_2}{T_2} = S_2,$$

niin

$$\begin{aligned} L_1L_2 &\le (T_1 + V_1)(T_2 + V_2) \\ &= T_1T_2 + T_1V_2 + T_2V_1 + V_1V_2 \\ &\approx T_1T_2 + T_1V_2 + T_2V_1 \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} L_1L_2 &\ge (T_1 - V_1)(T_2 - V_2) \\ &= T_1T_2 - T_1V_2 - T_2V_1 + V_1V_2 \\ &\approx T_1T_2 - T_1V_2 - T_2V_1. \end{aligned}$$

Pätee siis likimain $T_1T_2 = L_1L_2 \pm (T_1V_2 + T_2V_1)$, josta saadaan tulon L_1L_2 suhteelliselle virheelle yläraja

$$\frac{T_1V_2 + T_2V_1}{T_1T_2} = \frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} = S_1 + S_2.$$

Esimerkki: Tarkat arvot $T_1 = 100$ ja $T_2 = 10$, likiarvot $L_1 = 101$ ja $L_2 = 11$. Tulot ovat

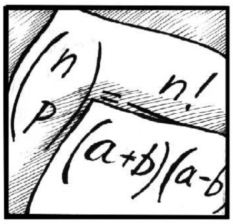
$$T_1T_2 = 1000, \quad L_1L_2 = 1111.$$

Likiarvojen tulon suhteellinen virhe on

$$\frac{111}{1000} = 0{,}111 = 11{,}1\,\%.$$

Lähtöarvojen suhteellisten virheiden summa on

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{10} = \frac{11}{100} = 0{,}11 = 11\,\%.$$



Eulerin luvuista

Juhani Fiskaali
Oulun Lyseon lukio

Johdanto

Mitä ovat Eulerin luvut $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$? Miten ne määritellään? Eulerin luvut voidaan määritellä kertoimina, kun potenssit k^m esitetään tiettyä muotoa olevien binomikertoimien lineaarikombinaationa. Seuraavasta kahdesta esimerkistä ilmenee, millaisia lineaarikombinaatioita tässä tarkastellaan. Esimerkiksi, olisikohan olemassa sellaiset kertoimet x, y ja z, että kehitelmä

$$k^3 = x\binom{k+2}{3} + y\binom{k+1}{3} + z\binom{k}{3}$$

on voimassa jokaisella positiivisella kokonaisluvulla k. Tai, olisikohan olemassa sellaiset kertoimet $a, b, \ldots, e$, että lineaarikombinaatio (identiteetti)

$$\begin{aligned} k^5 = a\binom{k+4}{5} + b\binom{k+3}{5} \\ + c\binom{k+2}{5} + d\binom{k+1}{5} + e\binom{k}{5} \end{aligned}$$

on voimassa. Jos ja kun mainitunlaiset identiteetit ovat voimassa, kertoimia $x, y, \ldots, d, e$ kutsutaan Eulerin luvuiksi. Lukuja merkitään symboleilla $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$, missä m ja j ovat kokonaislukuja ja $1 \leq j \leq m$. Edellä

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ldots, d = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ ja } e = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ovat Eulerin lukuja. Seuraavissa kohdissa perehdytään siihen, kuinka mainitut luvut voidaan laskea. Myöhemmin kohdassa ”Eulerin luvut ja permutaatioiden kasvuindeksit” huomataan, että Eulerin lukujen ja permutaatioiden välillä on mielenkiintoinen yhteys. Eulerin luku $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$ ilmoittaa, monellako lukujen $1, 2, 3, \ldots, m$ permutaatiolla on kasvuindeksinä luku j. Koska tapaamme näitä lukuja tässäkin kirjoituksessa kahdessa aivan erilaisessa yhteydessä, luvut varmasti ovat merkityksellisiä ja universaaleja. Eräänä lukujen sovelluksena lasketaan kohdassa ”Sovellutuksena potenssisummien kaavat” potenssisummia. Saaduista potenssisummien esityksistä (kaavoista) tehdään viimeisessä kohdassa ”Potenssisummien ominaisuuksia” joitakin yleisiä johtopäätöksiä.

Lukujen määritelmä ja palautuskaava

Suoralla laskulla voidaan todeta, että esimerkiksi seuraavat positiivisten kokonaislukujen identiteetit ovat voimassa,

$$\begin{aligned} k &= \binom{k}{1}, \\ k^2 &= \binom{k+1}{2} + \binom{k}{2}, \\ k^3 &= \binom{k+2}{3} + 4\binom{k+1}{3} + \binom{k}{3} \end{aligned}$$

ja

$$k^4 = \binom{k+3}{4} + 11\binom{k+2}{4} + 11\binom{k+1}{4} + \binom{k}{4}.$$

Huomattakoon, että binomikertoimet $\binom{n}{m}$ ovat nollia, jos $n < m$. Yleisemmin haluaisimme tietää kertoimet $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$ identiteetissä

$$k^m = \sum_{j=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \binom{k+m-j}{m},$$

kun m on annettu kokonaisluku. Kertoimia $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$, missä $1 \leq j \leq m$ sanomme Eulerin luvuiksi. Luvut voidaan kirjoittaa kolmioksi Pascalin kolmion tapaan. Kolmion huippu on edellä esitettyjen potenssikehitelmien mukaan

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ 1 & 11 & 11 & 1 \end{array}$$

Kolmiosta luetaan, että esimerkiksi $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 4$. Entä miten saadaan kolmion viides rivi? Miten uusi rivi saadaan jo saaduista riveistä? Palautuskaavan etsimisessä hyödynnetään binomikertoimien rekursiokaavaa

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Johdetaan tässä Eulerin kolmion viides rivi, kun neljäs rivi on tiedossa; vastaavalla tavalla päätellään yleinen palautuskaava. Saadaan

$$\begin{aligned} k^5 &= k \cdot k^4 \\ &= (k+4-4)\binom{k+3}{4} + 11(k+3-3)\binom{k+2}{4} \\ &\quad + 11(k+2-2)\binom{k+1}{4} + (k+1-1)\binom{k}{4} \\ &= 5\binom{k+4}{5} - 4\binom{k+3}{4} + 5 \cdot 11\binom{k+3}{5} \\ &\quad - 3 \cdot 11\binom{k+2}{4} + 5 \cdot 11\binom{k+2}{5} \\ &\quad - 2 \cdot 11\binom{k+1}{4} + 5\binom{k+1}{5} - \binom{k}{4} \\ &= \binom{k+4}{5} + (4 + 2 \cdot 11)\binom{k+3}{5} \\ &\quad + (3 \cdot 11 + 3 \cdot 11)\binom{k+2}{5} \\ &\quad + (2 \cdot 11 + 4)\binom{k+1}{5} + \binom{k}{5}. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, miten Eulerin kolmion viidennen rivin alkiot saadaan neljännen rivin alkioista. Viides rivi on täten

$$1 \;\; 26 \;\; 66 \;\; 26 \;\; 1,$$

missä esimerkiksi jälkimmäinen 26 on kerroin

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 11 + 4 \cdot 1.$$

Yleisesti, tarkastelemalla potenssia

$$k^{m+1} = k \cdot k^m$$

saadaan vastaavalla tavalla palautuskaavat

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} m \\ j-1 \end{bmatrix} (m-j+2). \tag{R}$$

Alkuehtoina voidaan pitää sitä, että Eulerin kolmion kukin rivi alkaa luvulla 1 ja päättyy lukuun 1. Kaavaa soveltamalla kolmion kuudenneksi riviksi tulee

$$1 \;\; 57 \;\; 302 \;\; 302 \;\; 57 \;\; 1$$

ja seitsemänneksi

$$1 \;\; 120 \;\; 1191 \;\; 2416 \;\; 1191 \;\; 120 \;\; 1.$$

Algoritmi Eulerin lukujen laskemiseksi

Algoritmi perustuu edellä jo mainittuun binomikertoimien rekursiokaavaan, erityisesti sen erotusmuotoon

$$\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}.$$

Algoritmissa lasketaan potenssijonon erotusjono, erotusjonon erotusjono jne. sopivaan määrään asti ja luetaan jonojen matriisin viimeiseltä riviltä etsityt Eulerin kolmion luvut. Jos esimerkiksi halutaan saada kolmion kolmas rivi, lähdetään jonosta $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $x_k = k^3$. Saadaan jonon ja erotusjonojen matriisi

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & \ldots \\ 1 & 7 & 19 & 37 & 51 & \ldots \\ 1 & 6 & 12 & 18 & 24 & \ldots \\ 1 & 5 & 6 & 6 & 6 & \ldots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \ldots \end{array}$$

Tässä viimeiseltä riviltä on luettavissa, että

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \text{ ja } \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1,$$

sekä pääteltävissä, että

$$k^3 = \binom{k+2}{3} + 4\binom{k+1}{3} + \binom{k}{3}.$$

Nimittäin lähdettäessä binomikertoimien muodostamasta jonosta, matriisin viimeisen rivin yhdelle paikalle tulee ykkönen ja muille paikoille nollat. Esimerkiksi jonoa, jäseninään $x_k = \binom{k+2}{3}$, $k = 1, 2, \ldots$, vastaavan matriisin ensimmäinen rivi on 1 4 10 20 ... ja viides rivi 1 0 0 0 .... Jos kääntäen matriisin viides rivi on esimerkiksi 0 4 0 0 ..., ovat ensimmäisen rivin alkiot muotoa $x_k = 4\binom{k+1}{3}$, $k = 1, 2, \ldots$. Kun siis halutaan Eulerin kolmion m:nnen rivin alkiot, muodostetaan erotusjonojen matriisi lähtemällä jonosta, jonka jäsenet ovat $x_k = k^m$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Eulerin lukujen eksplisiittinen kaava

Tarkastellaan kaavan johtamista esimerkin valossa. Jos halutaan, että on voimassa identiteetti

$$\begin{aligned} n^5 = a\binom{n+4}{5} + b\binom{n+3}{5} \\ + c\binom{n+2}{5} + d\binom{n+1}{5} + e\binom{n}{5}, \end{aligned}$$

antamalla peräjälkeen arvot $n = 1, 2, \ldots, 5$, saadaan

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 1^5 = 1, \\ b &= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 2^5 - \binom{6}{1} = 26, \\ c &= \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 3^5 - \binom{6}{1}2^5 + \binom{6}{2} = 66, \\ d &= \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 4^5 - \binom{6}{1}3^5 + \binom{6}{2}2^5 - \binom{6}{3} = 26 \end{aligned}$$

ja

$$e = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5^5 - \binom{6}{1}4^5 + \binom{6}{2}3^5 - \binom{6}{3}2^5 - \binom{6}{4} = 1.$$

Yleisemmin saadaan kaava

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{m+1}{j} (k-j)^m. \tag{E}$$

Siten esimerkiksi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \binom{8}{j} (4-j)^7 = 2416, \\ \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{8}{j} (5-j)^7 = 1191 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{5} (-1)^j \binom{8}{j} (6-j)^7 = 120.$$

Eulerin luvut ja permutaatioiden kasvuindeksit

Tarkastellaan lukujen $1, 2, 3, \ldots, m$ permutaatioita ja permutaation kasvuindeksiä. Kun $m = 5$, niin esimerkiksi 23541, 53142 ja 54321 ovat lukujen $1, 2, 3, 4$ ja 5 permutaatioita (pelkistetysti kirjoitettuna). Mainittujen jonojen kasvuvälien lukumääriksi ja siten jonojen kasvuindekseiksi saadaan $1+1+1+0+0 = 3$, $1+0+0+1+0 = 2$ ja $1+0+0+0+0 = 1$. (Tulkintana on, että jonon alku on kasvuväli, loppu puolestaan ei ole kasvuväli.) Selvästi viiden alkion jonon kasvuindeksi on jokin luvuista $1, 2, 3, 4$ tai 5. Jos nyt kuudes alkio ($= 6$) sijoitetaan viiden alkion jonon kasvuväliin, syntyneen jonon indeksi on sama kuin alkuperäisen jonon indeksi. Jos puolestaan uusi alkio sijoitetaan väliin, joka ei ole kasvuväli, uuden jonon indeksi on yhtä suurempi kuin alkuperäisen jonon. Jos $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$ tarkoittaa niiden m-jonojen lukumäärää, joilla on indeksinä k, saadaan äskeisen harkinnan perusteella palautuskaava

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} m \\ k-1 \end{bmatrix} (m-k+2),$$

joka ilmoittaa, monellako $(m+1)$-jonolla on indeksinä k. Mutta kaavahan on juuri Eulerin lukujen palautuskaava (R). Välitön havainto permutaatioista ja kasvuindekseistä on, että $\sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = m\,!$ Siis Eulerin kolmion vaakarivin alkioiden summa on vastaavan rivinumeron kertoma.

Sovellutuksena potenssisummien kaavat

Koska binomikertoimien summakaava on yksinkertainen, $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$, saadaan edellä esitellyistä potenssien kehitelmistä vastaavat summakaavat. Täten

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1), \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{k+1}{2} + \binom{k}{2} \right\} \\ &= \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{k+2}{3} + 4\binom{k+1}{3} + \binom{k}{3} \right\} \\ &= \binom{n+3}{4} + 4\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4} \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

ja vielä yhtenä esimerkkinä

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \binom{n+5}{6} + 26\binom{n+4}{6} + 66\binom{n+3}{6} + 26\binom{n+2}{6} + \binom{n+1}{6} = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

Potenssisummien ominaisuuksia

Summien binomikerroinkehitelmistä seuraa (yhteisen tekijän erottamisella) tulos, että polynomi $\frac{1}{2}n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k$ on summapolynomin $\sum_{k=1}^{n} k^m$ tekijä, aina kun m on positiivinen kokonaisluku. Lisäksi, kun eksponentti m on parillinen, on $2n+1$ summan $\sum_{k=1}^{n} k^m$ tekijä. Tämä ilmenee siitä, että arvolla $n = -\frac{1}{2}$, summan $\sum_{k=1}^{n} k^m$ binomikerroinkehitelmässä termit ovat pareittain nollia ja siten koko summa tällä muuttujan arvolla on nolla. Esimerkiksi, kun

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \binom{n+4}{5} + 11\binom{n+3}{5} + 11\binom{n+2}{5} + \binom{n+1}{5},$$

sievenevät pareittain lasketut summat

$$\binom{-\frac{1}{2}+4}{5} + \binom{-\frac{1}{2}+1}{5}$$

ja

$$\binom{-\frac{1}{2}+3}{5} + \binom{-\frac{1}{2}+2}{5}$$

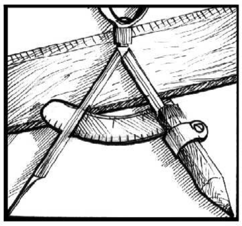
nolliksi ja siten Eulerin lukujen symmetrian takia koko potenssisumma on nolla arvolla $n = -\frac{1}{2}$. Siispä $2n+1$ on summan $\sum_{k=1}^{n} k^4$ tekijä (ja yleisemmin parillisten potenssisummien $\sum_{k=1}^{n} k^m$ tekijä). Siten parillisten potenssisummien polynomeissa $\sum_{k=1}^{n} k^m$ on aina tekijänä $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Esimerkiksi identiteetti

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = (\sum_{k=1}^{n} k^2) \cdot (\frac{3}{7}n^4 + \frac{6}{7}n^3 - \frac{3}{7}n + \frac{1}{7})$$

on voimassa. Summan $\sum_{k=1}^{n} k^m$ tekijänä näyttäisi olevan polynomi $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$, kun eksponentti m on pariton kokonaisluku ja $m \geq 3$. Esimerkiksi pätee

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = (\sum_{k=1}^{n} k^3) \cdot (\frac{2}{3}n^2 + \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}).$$

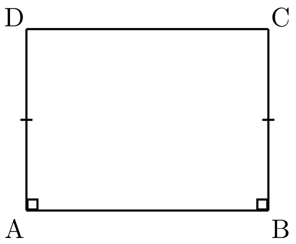
Tämän otaksuman todistaminen on haastavampaa kuin vastaavan parillisia potenssisummia koskevan väittämän todistus. Parillisten potenssisummien tapauksessa riitti näyttää, että $n = 0, n = -1$ ja $n = -\frac{1}{2}$ ovat summapolynomin yksinkertaisia nollakohtia, mutta parittomien potenssisummien tapauksessa tulisi näyttää, että 0 ja -1 ovat summapolynomin kaksinkertaisia nollakohtia.



Saccherin nelikulmio

Petteri Harjulehto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Nelikulmio $\square ABCD$ on Saccherin nelikulmio, jos $\angle A$ ja $\angle B$ ovat suoria kulmia ja $|AD| = |BC|$.



Sanomme suoria kulmia $\angle A$ ja $\angle B$ kantakulmiksi ja kulmia $\angle C$ ja $\angle D$ kattokulmiksi.

Nelikulmio on nimetty italialaisen matematikko ja jesuiittapappi Giovanni Girolamo Saccherin (1667–1733) mukaan, joka julkaisi niistä postuumisti 1733 tutkielman ”Euclides ab Omni Naevo Vindicatys”. Saccheri ei ollut ensimmäinen, joka tutki hänen mukaansa nimettyä nelikulmiota. Tiettävästi ensimmäinen oli persialainen matematikko ja runoilija Omar Khayyám (1048–1131), joka osoitti mm. että Saccherin nelikulmion kattokulmat ovat yhtä suuret. Muita ennen Saccheria asiaa tutkineita matematiikkoja olivat mm. iranilainen Nasir Eddin (1201–1274), saksalainen jesuiitta Christopher Clavius (1538–1612) ja italialainen Giordano Vitale (1633–1711), joka tunnetaan myös nimillä Vitale Giordano ja Vitale Giordano da Bitonto. Saccheri kuitenkin tutki nelikulmion ominaisuuksia paljon edeltäjiään syvällisemmin ja hänen tuloksensa olivat huomattavasti edellä aikaansa.

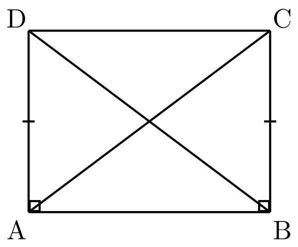
Saccherin tavoite oli osoittaa, että paralleelipostulaatti on johdettavissa muista postulaateista. Hän todisti, että tähän riittää osoittaa, että Saccherin nelikulmion kattokulmat ovat suoria eli että Saccherin nelikulmio on suorakaide. Koska kattokulmat ovat yhtäsuuria, Saccheri yritti osoittaa, että tapaukset $\angle C, \angle D > 90°$ ja $\angle C, \angle D < 90°$ johtavat ristiriitaan. Saccheri osoitti, että kattokulmat eivät voi olla suurempia kuin suorakulma todistamalla, että kolmion kulmien summa on korkeintaan 180°. Hän ei kuitenkaan onnistunut osoittamaan, että oletus $\angle C, \angle D < 90°$ johtaisi ristiriitaan.

Hyperbolisen geometrian löytyminen 1800-luvun puolivälissä osoitti, että paralleelipostulaatti on riippumaton muista postulaateista. Hyperbolinen geometria perustuu absoluuttiseen geometriaan eli paralleelipostulaatista riippumattomaan geometrian osaan sekä paralleelipostulaatin loogiseen negaatioon. Hyperbolisen geometrian merkittävimmät ominaispiirteet ovat, että suorakaiteita ei ole ja että kolmion kulmien summa on alle 180°. Hyperbolisen geometrian löytäminen osoitti, että oletus $\angle C, \angle D < 90°$ ei johda ristiriitaan, kuten Saccheri oli toivonut. Saccherin tutkimukset eivät kuitenkaan menneet hukkaan, vaan tutkiessaan oletusta $\angle C, \angle D < 90°$ hän tuli luoneeksi vahvan pohjan hyperbolisen geometrian tutkimukselle.

Tässä kirjoitelmassa tutkimme, miten oletukset ”kolmion kulmien summa on 180°” ja ”kolmion kulmien summa on alle 180°” näkyvät Saccherin nelikulmiossa. Tavoitteenamme on osoittaa, että Saccherin nelikulmion kattokulmat ovat vastaavasti tasan 90° ja alle 90°.

Propositio 1. *Saccherin nelikulmion kattokulmat* $\angle C$ *ja* $\angle D$ *ovat yhtä suuret.*

Todistus. Piirretään halkaisijat AC ja BD.

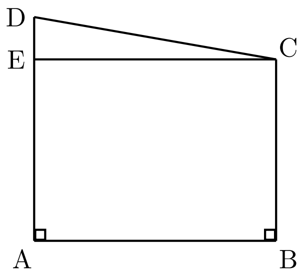


Tällöin lävistäjien alapuoliset kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle BAD$ ovat yhteneviä s-k-s -yhtenevyyslauseen nojalla, sillä $\angle ABC = 90° = \angle BAD$ (oletus), $|BC| = |AD|$ (oletus) ja AB on yhteinen. Saamme, että halkaisijat AC ja BD ovat yhtä pitkät. Nyt halkaisijoiden yläpuoliset kolmiot $\triangle BCD$ ja $\triangle ADC$ ovat yhteneviä s-s-s -yhtenevyyslauseen nojalla, sillä $|BC| = |AD|$ (oletus), $|BD| = |AC|$ (edellinen yhtenevyyslause) ja CD on yhteinen. Saamme $\angle BCD = \angle ADC$, eli nelikulmiossa $\square ABCD$ on $\angle C = \angle D$. □

Ennen kuin siirrymme tutkimaan kattokulmien suuruutta, todistamme Propositiolle 1 käänteisen tuloksen.

Propositio 2. *Olkoon* $\square ABCD$ *nelikulmio. Jos* $\angle A$ *ja* $\angle B$ *ovat suoria kulmia sekä* $\angle C$ *ja* $\angle D$ *ovat yhtäsuuria, niin* $\square ABCD$ *on Saccherin nelikulmio.*

Todistus. Meidän on osoitettava, että $|AD| = |BC|$. Tehdään vastaoletus, että $|AD| \neq |BC|$. Voimme symmetrian perusteella olettaa, että $|AD| > |BC|$.

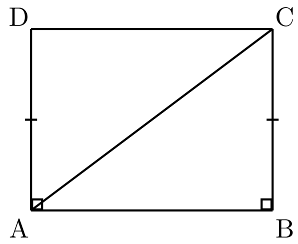


Valitaan sivulta AD piste E, jolle $|AE| = |BC|$. Piirretään jana CE. Tällöin $\square ABCE$ on Saccherin nelikulmio, joten Proposition 1 perusteella on $\angle BCE = \angle AEC$. Koska kulma on aitoja osakulmiansa suurempi, saamme $\angle BCD > \angle BCE$. Toisaalta kolmiossa ulkokulma on suurempi kuin sitä vastaavat sisäkulmat eli kolmiossa $\triangle CED$ pätee $\angle AEC > \angle EDC = \angle ADC$. Edellä olevista epäyhtälöistä saamme $\angle BCD > \angle ADC$, eli nelikulmiossa $\square ABCD$ on $\angle C > \angle D$; ristiriita oletuksen $\angle C = \angle D$ kanssa. □

Propositiossa 1 osoitimme, että Saccherin nelikulmion kattokulmat ovat yhtäsuuret. Meillä on nyt kolme vaihtoehtoa: kattokulmat ovat alle 90°, kattokulmat ovat täsmälleen 90° tai kattokulmat ovat yli 90°. Käytetään aluksi tietoa, että euklidisessa geometriassa kolmion kulmien summa on 180°.

Propositio 3. *Euklidisessa geometriassa Saccherin nelikulmio on suorakaide.*

Todistus. Meidän on osoitettava, että kattokulmat $\angle C$ ja $\angle D$ ovat suorakulmia. Saccherin nelikulmion halkaisija AC jakaa sen kahdeksi kolmioksi eli kolmioiksi $\triangle ACD$ ja $\triangle ABC$. Voimme siis helposti soveltaa tilanteeseen tietoa kolmion kulmien summasta.



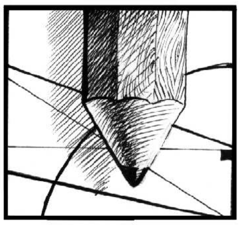
Saccherin nelikulmion kulmien summa $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180° + \angle C + \angle D$ on korkeintaan kolmioiden kulmien summa $(\angle DAC + \angle ADC + \angle D) + (\angle CAB + \angle B + \angle BCA)$. Koska euklidisessa geometriassa kolmion kulmien summa on 180°, saamme $180° + \angle C + \angle D = 2 \cdot 180°$ eli $\angle C + \angle D = 180°$. Koska kattokulmat ovat yhtä suuret, saamme $\angle C = \angle D = 90°$. □

Saccheri osoitti, että absoluuttisessa geometriassa, siis ilman paralleelipostulaattia, kolmion kulmien summa on korkeintaan 180°. Soveltamalla edellistä todistusta saamme seuraavan proposition.

Propositio 4. *Jos kaikille kolmioille pätee, että kulmien summa on korkeintaan* 180°*, niin silloin Saccherin nelikulmion kattokulmat* $\angle C$ *ja* $\angle D$ *ovat korkeintaan* 90°.

Tästä saamme, että kattokulmat eivät voi olla yli 90°. Saccheri osoitti myös, että jos yhden kolmion kulmien summa on 180°, niin silloin kaikilla kolmioilla on tämä sama ominaisuus. Siis erityisesti jos yhden kolmion kulmien summa on alle 180°, niin silloin kaikille kolmioille pätee, että kulmien summa on alle 180° (mutta summan arvo ei siis välttämättä ole sama). Hyperbolisessa geometriassa konstruoidaan ensin yksi kolmio, jonka kulmien summa on alle 180°, ja sitten käyttämällä tätä Saccherin tulosta saadaan vastaava tulos kaikille kolmioille. Käyttämällä Proposition 3 todistusta saamme seuraavan tuloksen.

Propositio 5. *Jos kaikille kolmioille pätee, että kulmien summa on alle* 180°*, niin silloin Saccherin nelikulmion kattokulmat* $\angle C$ *ja* $\angle D$ *ovat alle* 90°.



Uutta Verkko-Solmussa

Verkko-Solmussa on ilmestynyt kevään aikana Matematiikkadiplomi VI:n tehtävät ja diplomi Matematiikkadiplomi-sivulla

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Tältä sivulta löytyy Geometriaa harrastajalle -otsikon alta uusi kirjoitus Geometrisen todistamisen harjoitus

`http://solmu.math.helsinki.fi/2008/diplomi/geomtodharj.pdf`

sekä skannattuna K. Väisälän kirja Geometria

`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/geometria.pdf`

Matti Lehtisen Geometrian perusteita on esitys perinteisestä koulugeometriasta hiukan täsmennetyssä muodossa sekä epäeuklidisen ja projektiivisen geometrian alkeista

`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/geometria2011.pdf`

Lue myös Avoin kirje Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitolle

`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/maol.pdf`

Solmun löydät nyt Facebookista

`http://www.facebook.com/home.php?sk=group_182907755060898`