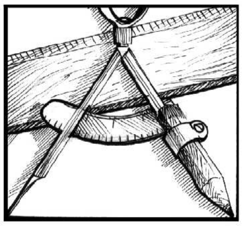
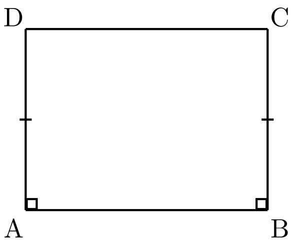


Saccherin nelikulmio

Petteri Harjulehto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Nelikulmio $\square ABCD$ on Saccherin nelikulmio, jos $\angle A$ ja $\angle B$ ovat suoria kulmia ja $|AD| = |BC|$.



Sanomme suoria kulmia $\angle A$ ja $\angle B$ kantakulmiksi ja kulmia $\angle C$ ja $\angle D$ kattokulmiksi.

Nelikulmio on nimetty italialaisen matematikko ja jesuiittapappi Giovanni Girolamo Saccherin (1667–1733) mukaan, joka julkaisi niistä postuumisti 1733 tutkielman "Euclides ab Omni Naevo Vindicatys". Saccheri ei ollut ensimmäinen, joka tutki hänen mukaansa nimettyä nelikulmiota. Tiettävästi ensimmäinen oli persialainen matemaatikko ja runoilija Omar Khayyám (1048–1131), joka osoitti mm. että Saccherin nelikulmion kattokulmat ovat yhtä suuret. Muita ennen Saccheria asiaa tutkineita matemaatikkoja olivat mm. iranilainen Nasir Eddin (1201–1274), saksalainen jesuiitta Christopher Clavius (1538–1612) ja italialainen Giordano Vitale (1633–1711), joka tunnetaan myös nimillä Vitale Giordano ja Vitale Giordano da Bitonto. Saccheri kuitenkin tutki nelikulmion ominaisuuksia paljon edeltäjiään syvällisemmin ja hänen tuloksensa olivat huomattavasti edellä aikaansa.

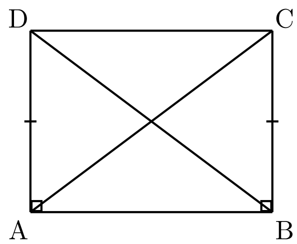
Saccherin tavoite oli osoittaa, että paralleelipostulaatti on johdettavissa muista postulaateista. Hän todisti, että tähän riittää osoittaa, että Saccherin nelikulmion kattokulmat ovat suoria eli että Saccherin nelikulmio on suorakaide. Koska kattokulmat ovat yhtäsuuria, Saccheri yritti osoittaa, että tapaukset $\angle C, \angle D > 90°$ ja $\angle C, \angle D < 90°$ johtavat ristiriitaan. Saccheri osoitti, että kattokulmat eivät voi olla suurempia kuin suorakulma todistamalla, että kolmion kulmien summa on korkeintaan $180°$. Hän ei kuitenkaan onnistunut osoittamaan, että oletus $\angle C, \angle D < 90°$ johtaisi ristiriitaan.

Hyperbolisen geometrian löytyminen 1800-luvun puolivälissä osoitti, että paralleelipostulaatti on riippumaton muista postulaateista. Hyperbolinen geometria perustuu absoluuttiseen geometriaan eli paralleelipostulaatista riippumattomaan geometrian osaan sekä paralleelipostulaatin loogiseen negaatioon. Hyperbolisen geometrian merkittävimmät ominaispiirteet ovat, että suorakaiteita ei ole ja että kolmion kulmien summa on alle $180°$. Hyperbolisen geometrian löytäminen osoitti, että oletus $\angle C, \angle D < 90°$ ei johda ristiriitaan, kuten Saccheri oli toivonut. Saccherin tutkimukset eivät kuitenkaan menneet hukkaan, vaan tutkiessaan oletusta $\angle C, \angle D < 90°$ hän tuli luoneeksi vahvan pohjan hyperbolisen geometrian tutkimukselle.

Tässä kirjoitelmassa tutkimme, miten oletukset "kolmion kulmien summa on 180°” ja ”kolmion kulmien summa on alle 180°” näkyvät Saccherin nelikulmiossa. Tavoitteenamme on osoittaa, että Saccherin nelikulmion kattokulmat ovat vastaavasti tasan 90° ja alle 90°.

Propositio 1. *Saccherin nelikulmion kattokulmat $\angle C$ ja $\angle D$ ovat yhtä suuret.*

Todistus. Piirretään halkaisijat AC ja BD.

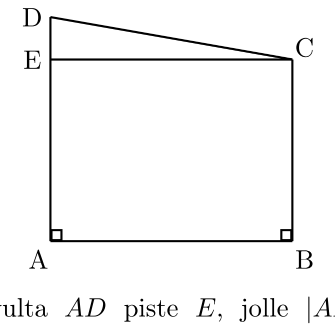


Tällöin lävistäjien alapuoliset kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle BAD$ ovat yhteneviä s-k-s -yhtenevyyslauseen nojalla, sillä $\angle ABC = 90° = \angle BAD$ (oletus), $|BC| = |AD|$ (oletus) ja AB on yhteinen. Saamme, että halkaisijat AC ja BD ovat yhtä pitkät. Nyt halkaisijoiden yläpuoliset kolmiot $\triangle BCD$ ja $\triangle ADC$ ovat yhteneviä s-s-s -yhtenevyyslauseen nojalla, sillä $|BC| = |AD|$ (oletus), $|BD| = |AC|$ (edellinen yhtenevyyslause) ja CD on yhteinen. Saamme $\angle BCD = \angle ADC$, eli nelikulmiossa $\square ABCD$ on $\angle C = \angle D$. □

Ennen kuin siirrymme tutkimaan kattokulmien suuruutta, todistamme Propositiolle 1 käänteisen tuloksen.

Propositio 2. *Olkoon $\square ABCD$ nelikulmio. Jos $\angle A$ ja $\angle B$ ovat suoria kulmia sekä $\angle C$ ja $\angle D$ ovat yhtäsuuria, niin $\square ABCD$ on Saccherin nelikulmio.*

Todistus. Meidän on osoitettava, että $|AD| = |BC|$. Tehdään vastaoletus, että $|AD| \neq |BC|$. Voimme symmetrian perusteella olettaa, että $|AD| > |BC|$.

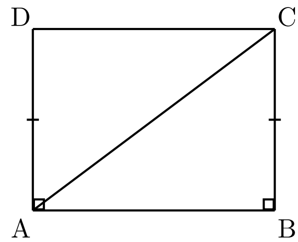


Valitaan sivulta AD piste E, jolle $|AE| = |BC|$. Piirretään jana CE. Tällöin $\square ABCE$ on Saccherin nelikulmio, joten Proposition 1 perusteella on $\angle BCE = \angle AEC$. Koska kulma on aitoja osakulmiansa suurempi, saamme $\angle BCD > \angle BCE$. Toisaalta kolmiossa ulkokulma on suurempi kuin sitä vastaavat sisäkulmat eli kolmiossa $\triangle CED$ pätee $\angle AEC > \angle EDC = \angle ADC$. Edellä olevista epäyhtälöistä saamme $\angle BCD > \angle ADC$, eli nelikulmiossa $\square ABCD$ on $\angle C > \angle D$; ristiriita oletuksen $\angle C = \angle D$ kanssa. □

Propositiossa 1 osoitimme, että Saccherin nelikulmion kattokulmat ovat yhtäsuuret. Meillä on nyt kolme vaihtoehtoa: kattokulmat ovat alle 90°, kattokulmat ovat täsmälleen 90° tai kattokulmat ovat yli 90°. Käytetään aluksi tietoa, että euklidisessa geometriassa kolmion kulmien summa on 180°.

Propositio 3. *Euklidisessa geometriassa Saccherin nelikulmio on suorakaide.*

Todistus. Meidän on osoitettava, että kattokulmat $\angle C$ ja $\angle D$ ovat suorakulmia. Saccherin nelikulmion halkaisija AC jakaa sen kahdeksi kolmioksi eli kolmioiksi $\triangle ACD$ ja $\triangle ABC$. Voimme siis helposti soveltaa tilanteeseen tietoa kolmion kulmien summasta.



Saccherin nelikulmion kulmien summa $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180° + \angle C + \angle D$ on korkeintaan kolmioiden kulmien summa $(\angle DAC + \angle ADC + \angle D) + (\angle CAB + \angle B + \angle BCA)$. Koska euklidisessa geometriassa kolmion kulmien summa on 180°, saamme $180° + \angle C + \angle D = 2 \cdot 180°$ eli $\angle C + \angle D = 180°$. Koska kattokulmat ovat yhtä suuret, saamme $\angle C = \angle D = 90°$. □

Saccheri osoitti, että absoluuttisessa geometriassa, siis ilman paralleelipostulaattia, kolmion kulmien summa on korkeintaan 180°. Soveltamalla edellistä todistusta saamme seuraavan proposition.

Propositio 4. *Jos kaikille kolmioille pätee, että kulmien summa on korkeintaan 180°, niin silloin Saccherin nelikulmion kattokulmat $\angle C$ ja $\angle D$ ovat korkeintaan 90°.*

Tästä saamme, että kattokulmat eivät voi olla yli 90°. Saccheri osoitti myös, että jos yhden kolmion kulmien summa on 180°, niin silloin kaikilla kolmioilla on tämä sama ominaisuus. Siis erityisesti jos yhden kolmion kulmien summa on alle 180°, niin silloin kaikille kolmioille pätee, että kulmien summa on alle 180° (mutta summan arvo ei siis välttämättä ole sama). Hyperbolisessa geometriassa konstruoidaan ensin yksi kolmio, jonka kulmien summa on alle 180°, ja sitten käyttämällä tätä Saccherin tulosta saadaan vastaava tulos kaikille kolmioille. Käyttämällä Proposition 3 todistusta saamme seuraavan tuloksen.

Propositio 5. *Jos kaikille kolmioille pätee, että kulmien summa on alle 180°, niin silloin Saccherin nelikulmion kattokulmat $\angle C$ ja $\angle D$ ovat alle 90°.*