Tuhtia matematiikkaa Mongolian alakoulunopettajien kilpailussa

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Solmun numerossa 3/2010 kerrottiin alakoulunopettajille ("primary school teachers") Mongolian vuoden 2010 matematiikkaolympialaisten yhteydessä järjestetystä matematiikkakilpailusta. Suomen peruskoulun opettajakunta ei juuri lukene Solmua, koska ratkaisuehdotuksia kirjoituksen yhteydessä julkaistuille tehtäville ei opettajilta ole saapunut, ei kyllä muiltakaan. Seuraavassa esitettävät ratkaisut perustuvat siis pääosin kilpailun järjestäjältä Mongolian Kansalliselta Yliopistolta saatuun aineistoon.

Tällaisia olivat tehtävät, ja näin niitä olisi ehkä voinut ratkaista:

1. *Matematiikkakilpailussa oli 25 osallistujaa ja kolme tehtävää A, B ja C. Jokainen osallistuja ratkaisi ainakin yhden tehtävän. Niissä osallistujissa, jotka eivät ratkaisseet tehtävää A, oli kaksi kertaa niin paljon sellaisia, jotka ratkaisivat B:n kuin sellaisia, jotka ratkaisivat C:n. Osallistujia, jotka ratkaisivat vain tehtävän A, oli yksi enemmän kuin muita tehtävän A ratkaisseita. Niistä osallistujista, jotka ratkaisivat vain yhden tehtävän, puolet ei ratkaissut tehtävää A. Kuinka moni osallistuja ratkaisi vain tehtävän B?*

Ratkaisu. Tämä ratkaisu näyttää suoraviivaiselta yhtälöryhmän ratkaisulta. Tuntemattomia on kuitenkin enemmän kuin sellaisia ehtoja, joista voi yhtälöitä rakentaa. Ratkaisun avaimeksi muodostuu se, että kaikki tuntemattomat, eli eri tehtäväyhdistelmien ratkaisseiden lukumäärät ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja.

Merkitään a:lla vain tehtävän A ratkaisseiden kilpailijoiden lukumäärää, b:llä vain B:n ratkaisseiden lukumäärää ja c:llä vain C:n ratkaisseiden lukumäärää. Mukavuuden vuoksi merkitään vielä $a \odot b$:llä vain A:n ja B:n ratkaisseiden lukumäärää jne. Koska jokainen osallistuja ratkaisi ainakin yhden tehtävän,

$$a + b + c + a \odot b + a \odot c + b \odot c + a \odot b \odot c = 25. \quad (1)$$

Toinen ehto merkitsee yhtälöä $b + b \odot c = 2(c + b \odot c)$ eli

$$b = 2c + b \odot c. \quad (2)$$

Kolmas ehto merkitsee, että

$$a = 1 + a \odot b + a \odot c + a \odot b \odot c. \quad (3)$$

Viimeinen ehto merkitsee, että

$$a = b + c. \quad (4)$$

Kun yhtälöt (1) ja (3) lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$2a + b + c + b \odot c = 26. \quad (5)$$

Kun (5) ja (2) lasketaan yhteen ja otetaan huomioon (4), saadaan

$$c = 26 - 4b. \quad (6)$$

Koska $c \geq 0$, on oltava $b \leq 6$. Kun tämä c yhtälöstä (6) sijoitetaan yhtälöön (2), saadaan

$$b \odot c = 9b - 52. \quad (7)$$

Koska $b \odot c \geq 0$, on oltava $b \geq 6$. Ainoa mahdollisuus on siis $b = 6$. On vielä tarkistettava, että $b = 6$ on mahdollinen. Jos $b = 6$, $c = 2$, $b \odot c = 2$ ja $a = 8$. Ehdot (1) ja (3) täyttyvät, jos $a \odot b + a \odot c + a \odot b \odot c = 9$. Koska yhtälössä olevia suureita eivät sido muut ehdot, ne voi valita vapaasti, esimerkiksi $a \odot b = a \odot c = a \odot b \odot c = 3$. Ratkaisu $b = 6$ on siis paitsi välttämätön, myös mahdollinen.

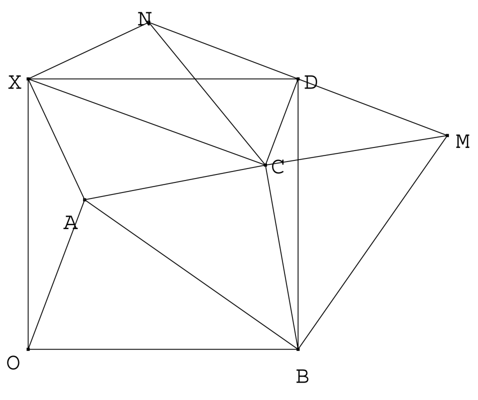
2. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $m^2 < a, b < m^2 + m$ ja $a \neq b$. Määrittäkää kaikki ne luonnolliset luvut c, joille c on luvun ab tekijä ja $m^2 < c < m^2 + m$.*

Ratkaisu. Ilmeisiä ratkaisuja ovat luvut a ja b. Osoittautuu, että muita ratkaisuja ei olekaan. Olkoon nimittäin c luvun ab tekijä ja $m^2 < c < m(m + 1)$. Koska $(a - c)(b - c) = ab - c(a + b - c)$, niin c on myös luvun $(a - c)(b - c)$ tekijä. Nyt $a - c < m^2 + m - m^2 = m$ ja $c - a < m^2 + m - m^2 = m$. Siis $|a - c| < m$. Samoin $|b - c| < m$. Mutta tämä merkitsee, että $|(a - c)(b - c)| < m^2 < c$. Luku on tekijänä itseään pienemmässä positiivisessa kokonaisluvussa vain, jos viimeksi mainittu luku on nolla. Siis $c = a$ tai $c = b$.

3. *Olkoot A ja C neliön $XOBD$ sisäpisteitä niin, että $\angle AXC = \angle ABC = 45°$. Merkitään kolmion PQR alaa symbolilla S_{PQR}. Osoittakaa, että*

$$S_{AXO} + S_{ABC} + S_{CXD} = S_{ACX} + S_{AOB} + S_{CBD}.$$

Ratkaisu. Viehättävä ratkaisu perustuu siihen, että kumpikin kuvio on paloiteltavissa kolmioiksi, joista jokaiselle löytyy yhtenevä pari toisen kuvion paloittelusta. Paloittelua on varsin vaikea hahmottaa alkuperäisestä kuviosta, mutta jos kaksi kolmiota siirretään sopivasti uuteen paikkaan neliön ulkopuolelle, asia helpottuu olennaisesti. Tehtävässä oleva kulmatieto kertoo, että parissa kuvion kolmiossa tulee olemaan yhtä suuria kulmia sen vuoksi, että tietyt janat ovat suoran kulman puolittajilla.



Aletaan siis ratkaisu siirtämällä kolmiot OAX ja OBA neliön ulkopuolelle kiertämällä OAX:ää vastapäivään $90°$ X:n ympäri kolmioksi XDN ja OBA:ta $90°$ myötäpäivään B:n ympäri kolmioksi DBM (kiertosuunnat olettaen, että $XOBD$ on nimetty positiiviseen kiertosuuntaan). On todistettava, että nelikulmion $XCDN$ ja kolmion ABC ala on yhteensä sama kuin nelikulmion $CBMD$ ja kolmion ACX. Tämä nähdään seuraavasti. Koska $\angle AXC = 45°$ ja $\angle AXN = 90°$, niin $\angle AXC = \angle CXN$. Lisäksi $AX = NX$. Täten kolmioilla ACX ja CNX on sama ala. Koska OA kiertyy sekä janaksi DN että janaksi DM, ja kierrot olivat $90°$ kiertoja, niin $DN \| DM$, ja N, D ja M ovat samalla suoralla. Lisäksi $DN = DM$. Siis kolmioilla DCM ja DNC on sama ala. Vielä $\angle ABC = 45°$ ja $\angle ABM = 90°$, sekä $AB = BM$. Kolmioilla ABC ja BMC on siis sama ala. Kumpikin tarkasteltavista nelikulmion ja kolmion yhdisteestä on näin jaettu kolmeksi kolmioksi, jotka ovat pareittain sama-alaisia. Väitös on todistettu.

4. *Määrittäkää kaikki positiiviset kokonaisluvut N, joille on olemassa positiivinen kokonaisluku M seuraavin ominaisuuksin:*

a) M:n ensimmäiset numerot muodostavat luvun N.

b) Jos S on se luku, joka saadaan, kun M:n ne ensimmäiset numerot, jotka muodostavat luvun N, siirretään M:n viimeisiksi numeroiksi, niin $S \cdot N = M$.

(Esimerkiksi kun $N = 46$, luku $M = 4601000217438573602957 16$ toteuttaa ehdon.)

Ratkaisu. Tehtävä on erittäin mielenkiintoinen ja tuntuu kovin haastavalta. Taitaa olla matematiikan osaaminen korkealla tasolla Mongolian opettajien keskuudessa, kun tällaisia selvittävät! Se, että luku 46 ei ole kovin erikoinen, onkin ehkä ratkaisuun viittaava vihje. Osoittautuu nimittäin, että jokaista positiivista kokonaislukua N kohden tehtävässä määritelty M löytyy, ei kuitenkaan kovin helposti.

Olkoon siis N mielivaltainen positiivinen kokonaisluku ja olkoon c sellainen, että $N < 10^c$. N on siis enintään c-numeroinen luku. Määritellään jono ei-negatiivisten kokonaislukujen pareja (a_n, b_n) asettamalla ensiksi $(a_0, b_0) = (N, 0)$. Määritellään jonon muut termit induktiivisesti: jos (a_n, b_n) on määritelty, asetetaan luvuksi a_{n+1} luvun $a_nN + b_n$ jakojäännös 10^c:llä jaettaessa eli luvun $anN + b_n$ viimeisten c:n numeron muodostama luku ja luvuksi b_{n+1} luku $(a_nN + b_n - a_{n+1})10^{-c}$ eli se luku, joka jää, kun $(anN + b_n)$:stä poistetaan c viimeistä numeroa. On selvää, että a_{n+1} ja b_{n+1} ovat kokonaislukuja ja että $a_{n+1} < 10^c$. Osoitetaan induktiolla, että jokainen b_n on $< N$. Selvästi $b_0 < N$, ja jos $b_n < N$, niin

$$b_{n+1} < ((a_n + 1)N - a_{n+1})10^{-c} \leq (a_n + 1)N10^{-c} \leq N.$$

Koska siis sekä $a_n < 10^c$ että $b^n < N$, niin mahdollisia pareja (a_n, b_n) on enintään 10^cN kappaletta. Jokin pari siis toistuu, ja tästä parista alkaen jono on jaksollinen. Mutta jos (a_{n+1}, b_{n+1}) tiedetään, niin on oltava $b_n \equiv 10^c b_{n+1} + a_{n+1} \mod N$. Koska $b_n < N$, b_n määräytyy yksikäsitteisesti a_{n+1}:stä ja b_{n+1}:stä. a_n puolestaan on se luku, joka kerrottuna N:llä ja lisättynä b_n:llä tuottaa luvun $10^c b_{n+1} + a_{n+1}$, joten $a_n = \frac{1}{N}(10^c b_{n+1} + a_{n+1} - b_n)$. Pari (a_{n+1}, b_{n+1}) määrittää siis yksikäsitteisesti parin (a_n, b_n). Jaksoa voidaan siis seurata myös taaksepäin, ja myös pari (a_0, b_0) esiintyy siinä. Jollain t on siis $(a_0, b_0) = (a_t, b_t)$.

Muodostetaan nyt luku M, jossa kirjoitetaan peräkkäin vasemmalta a_t, a_{t-1}, ..., a_2 ja a_1. Koska luvut a_i ovat c-numeroisia,

$$M = a_t 10^{(t-1)c} + a_{t-1} 10^{(t-2)c} + \cdots + a_2 10^c + a_1.$$

Silloin

$$S = a_{t-1} 10^{(t-1)c} + a_{t-2} 10^{(t-2)c} + \cdots + a_1 10^c + a_t.$$

Koska $a_t = a_0 = N$, luku $S \cdot N$ syntyy niin, että S kerrotaan termeittäin N:llä. $N \cdot a_0$ on luku $b_1 10^c + a_1$. $S \cdot N$:n viimeiset c numeroa ovat M:n c viimeistä numeroa. Seuraavaksi $(Na_1 + b_1)10^c = 10^c(10^c b_2 + a_2)$, joten $S \cdot N$:n c seuraavaa numeroa oikealta ovat samat kuin M:n vastaavat numerot. Näin nähdään, että M toteuttaa tehtävän ehdon.

Tehtävässä esimerkkinä oleva $N = 46$, johon liittyy 24-numeroinen M, vaikuttaa aika kesyltä. Luvun M muodostavaa algoritmia on helppo tarkastella esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla. Kun esimerkiksi $N = 13$, niin vasta $(a_{216}, b_{216}) = (a_0, 0)$, ja kun $N = 14$, vasta $(a_{699}, b_{699}) = (a_0, 0)$. Luvussa M on tällöin 1398 numeroa. Ei ole mahdotonta, että muitakin ratkaisuja tehtävälle olisi, ainakin joillakin N:n arvoilla. Mahtaako löytyä?

5. *Todistakaa, että jokainen parillinen kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin $2n(4n+1)$, voidaan kirjoittaa muotoon*

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 4n,$$

missä kunkin $\pm$-merkin kohdalle kirjoitetaan joko $+$ tai $-$.

Ratkaisu. Summaan voi $+$ ja $-$-merkit sijoittaa 2^{4n} tavalla, ja näistä puolet on positiivisia. Parillisia positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat $\leq 2n(4n+1)$, on vain $n(4n+1)$ kappaletta. Valinnanvaraa tuntuisi ainakin olevan, mutta mitään yksikäsitteistä vastaavuutta merkkikombinaatioiden ja lukujen välille ei näyttäisi löytyvän. Toisaalta tehtävän muoto houkuttaa etsimään induktioratkaisua. Sellainen löytyykin.

Kun $n = 1$, $2n(4n+1) = 10$. Nyt $1 - 2 - 3 + 4 = 0$, $-1 + 2 - 3 + 4 = 2$, $1 + 2 - 3 + 4 = 4$, $1 - 2 + 3 + 4 = 6$, $-1 + 2 + 3 + 4 = 8$ ja $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Induktio lähtee siis käyntiin. Otetaan sitten induktioaskel. Oletetaan, että kaikille positiivisille parillisille kokonaisluvuille, jotka ovat $\leq 2n(4n+1)$, löytyy muotoa $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 4n$ oleva esitys. Koska $(4n+1) - (4n+2) - (4n+3) + (4n+4) = 0$, kaikille tällaisille luvuille on myös esitys $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 4n + 4$. Nyt $1 + 2 + 3 + \cdots + (4n+4) = (2n+2)(4n+5)$. Silloin

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + (k-1) - k + (k+1) + \cdots + (4n+4) \\ = (2n+2)(4n+5) - 2k. \end{aligned}$$

Kun k käy luvut 1:stä $(4n+4)$:ään, saadaan halutunmuotoinen esitys kaikille parillisille kokonaisluvuille, jotka ovat enintään $(2n+2)(4n+5) - 2$ ja vähintään $(2n+2)(4n+5) - 8n + 8 = (2n+2)(4n+1)$. Katsotaan sitten lukuja

$$1 + 2 + \cdots + (m-1) - m + (m+1) + \cdots + (4n+3) - (4n+4).$$

Kun l saa kaikki arvot 1:stä $4n$:ään, saadaan halutun kaltainen esitys kaikille parillisille kokonaisluvuille $(2n(4n+1)+2)$:sta $((2n+2)(4n+1)-2)$:een. Näin on saatu haluttu esitys kaikille parillisille kokonaisluvuille, jotka ovat enintään $2(n+1)(4(n+1)+1)$. Induktioaskel on otettu, joten todistus on valmis.

6. *Merkintä (a, b) tarkoittaa lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää. Olkoon m ja n sellaisia luonnollisia lukuja, että $(2m+1, 2n+1) = 1$. Määrittäkää*

$$\left(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right).$$

Ratkaisu. Opiskellaan aluksi hiukan lukuteoriaa. Tarkastellaan ensin kahta lukua $2^n - 1$ ja $2^m - 1$. Jos $d = (m, n)$, niin $n = pd$ ja $m = qd$ joillain sellaisilla positiivisilla kokonaisluvuilla p ja q, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Luvut $(2^d)^p - 1$ ja $(2^d)^q - 1$ ovat jaollisia luvulla $2^d - 1$. Lukujen $2^n - 1$ ja $2^m - 1$ suurin yhteinen tekijä on siis jaollinen tällä luvulla. Mutta itse asiassa onkin $(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^d - 1$. Miksi näin?

Oletetaan, että $n > m$. Koska p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, on olemassa kokonaisluku s, jolle $sq < p < (s+1)q$. Silloin $p - sq < q$. Merkitään lyhyyden vuoksi $2^d = a$. Nyt $2^n - 1 = a^p - 1 = a^p - a^{p-q} + a^{p-q} + a^{p-2q} - \cdots - a^{p-sq} + a^{p-sq} - 1 = (a^{p-q} + a^{p-2q} + \cdots + 1)(a^q - 1) + a^{p-sq} - 1$. Lukujen $a^p - 1$ ja $a^q - 1$ yhteiset tekijät ovat siis luvun $a^{p-sq} - 1$ tekijöitä. Merkitään $r_1 = p - sq$. Jos $r_1 > 1$, luvuilla r_1 ja q ei ole yhteisiä tekijöitä. Näin ollen jollain s_1 on $s_1 r_1 < q < (s_1 + 1)q$. Toistamalla edellinen päättely saadaan $a^q - 1 = n_1(a^{r_1} - 1) + a^{q - s_1 r_1} - 1$, joten jokainen $(a^p - 1)$:n ja $(a^q - 1)$:n yhteinen tekijä on tekijänä myös luvussa $a^{q - s_1 r_1} - 1$. Alkaa näyttää samanlaiselta kuin Eukleideen algoritmi sovellettuna lukuihin p ja q! Prosessia voidaan jatkaa, kunnes tullaan jakojäännökseen $a - 1$. Eukleideen algoritmin päättelyn mukaan jokainen lukujen $2^n - 1 = a^p - 1$ ja $2^m - 1 = a^q - 1$ yhteinen tekijä on luvun $a - 1 = 2^d - 1$ tekijä, ja tulos

$$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m, n)} - 1$$

on tehty uskottavaksi. Itse asiassa luvun 2 ominaisuuksia ei ole käytetty hyväksi, joten on päätelty, että $(k^m - 1, k^n - 1) = k^{(m, n)} - 1$.

Palataan tehtävään. Merkitään

$$c = \left(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right).$$

Muodostetaan tuloja, joiden tekijä c on käyttämällä kahdesti aina hyödyllistä kaavaa $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$. On nimittäin $(2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1)(2^{2a+1} - 2^{a+1} + 1) = (2^{2a+1} + 1)^2 - 2^{2a+2} = 2^{4a+2} + 2^{2a+2} + 1 - 2^{2a+2} = 2^{4a+2} + 1$ ja $(2^{4a+2} + 1)(2^{4a+2} - 1) = 2^{8a+4} - 1$. Kun a:lle annetaan vuoron perään arvot m ja n, nähdään että c on tekijänä sekä luvussa $2^{8m+4} - 1$ että luvussa $2^{8n+4} - 1$. Se on siis tekijänä näiden lukujen suurimmassa yhteisessä tekijässä. Mutta tämän suurimman yhteisen tekijän saamme selville, kun etsimme lukujen $8m + 4$ ja $8n + 4$ suurimman yhteisen tekijän. Koska oletettiin, että $(2m + 1, 2n + 1) = 1$, lukujen $8m + 4$ ja $8n + 4$ suurin yhteinen tekijä on 4. Aiemmin esitetyn perusteella $(2^{8m+4} - 1, 2^{8n+4} - 1) = 2^4 - 1 = 15$. Luku c on siis luvun 15 tekijä. Mutta luvun $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1 = 2 \cdot 4^a + 1 + 2^{a+1} = 2(3 + 1)^a + 1 + 2^{a+1}$ jakojäännös kolmella jaettaessa on sama kuin luvun 2^{a+1}; luku ei siis ole 3:lla jaollinen. Mahdollisuuksiksi jäävät siis vain $c = 1$ ja $c = 5$. Jos a sattuu olemaan 4:llä jaollinen, $a = 4t$, niin $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1 = 2 \cdot 2^{8t} + 2 \cdot 2^{4t} + 1 = 2 \cdot 256^t + 16^t + 1 = 2(255 + 1)^t + 2 \cdot (15 + 1)^t + 1$. Tällainen luku on selvästi jaollinen viidellä. Jos siis sekä m että n ovat neljällä jaollisia, niin $c = 5$. Käymällä läpi tapaukset $a = 4t + 1$, $a = 4t + 2$ ja $a = 4t + 3$ havaitsee, että tällöin $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1$ ei ole jaollinen viidellä. Jos siis ainakin toinen luvuista m ja n ei ole neljällä jaollinen, $c = 1$.

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmaan kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria