



Matemaattisesta fysiikasta lukiossa

Heikki Pokela

Tapiolan lukio

Matematiikka ja fysiikka ovat erillisiä tieteitä. Matematiikkaa pidetään abstraktina määrän ja muodon tieteenä, jolla on vahvasta luonnontiede-kytköksestään huolimatta asema itsenäisenä oppiaineena lähes kaikissa yleissivistävissä kouluissa ympäri maailmaa. Se on osa sivistysperustaamme, vaikka matematiikkaan liitetään yleensä pelkkä välinearvo. Opetuksessa pyritään usein herättämään oppilaan kiinnostus matematiikkaan sellaisenaan, ilman liiallista motivaation hakua ns. sovellusesimerkeistä. Oppilas harjoittelee lukemattoman määrän toistoja polynomien sievennyksessä, integrointitekniikassa, tasogeometriassa kolmion ja ympyrän avulla jne. Harjoittelun mukana lisääntyy kyky nähdä syvemmälle matematiikan lainalaisuuksiin yhdistämällä opittuja asioita, ja oppilaalle kehittyy taito todistaa erilaisia väittämiä.

Myöhemmin yliopisto-opinnoissa matematiikka toimii vahvasti erityisesti fysiikassa. Useimmat fysiikan perusteorioista ovat esitettävissä säilymlakeina, jotka yleisimmässä esitystavassa kirjoitetaan integraalimuotoisina yhtälöinä. Näiden säilymlakien vaikutus yksinkertaistetuissa esimerkeissä fysiikan peruskursseilla tulee esille differentiaaliyhtälöillä. Aiemmillä kouluasteilla harjoitellut rutiinit ja lainalaisuudet pitäisi kytä ottamaan käyttöön fysiikan opinnoissa – ja melko nopealla aikataululla omaksuttuna. Ongelmaksi tulee, että lukiossa erillisinä asioina opiskellut matematiikan osa-alueet, kuten vektorit ja integraalit, nähdään jonnain ylioppilaskirjoituksiin hätäisesti opeteltavana juttuna, jolla ei ole käyttöä lukion jälkeen. Monelle lah-

jakkaallekin oppilaalle matematiikan syvällisempi yhteys fysiikkaan on mysteeri, ja miksipä ei olisi, sillä yhteyttä ei lukiossa opeteta. Kuitenkin sellaisiakin abiturientteja löytyy, joilla olisi kykyä opiskella matemaattista fysiikkaa lukiotasolla.

Differentiaali- ja integraalilaskennan käyttö fysiikassa jo lukiossa olisi mielestäni perusteltua, sillä analyysin ymmärtäminen ja sovellukset ovat käsittääkseni suomalaisen koulumatematiikan punainen lanka. Siis ainakin sovellustekniikka, jos ymmärtäminen jää vähemmälle, koska valitettavan usein analyysi joudutaan opettamaan heikolle pohjalle. Opetus lähtee murtoluviusta, ja polynomialgebran avulla edetään rationaalilausekkeisiin, joiden käsittely sievennystaidoilla eli lähinnä polynomien jaollisuudella avaa tien erotusosamäärään ja lopulta raja-arvon kautta derivaattaan. Derivaatta johdattaa integraalilaskentaan, differentiaaliyhtälöihin ja lopulta (luonnon)ilmiöiden simulointikykyyn yhteiskunnan teknologia- ja sivistystarpeita varten.

Mäntän lukion opetusmonisteesta kirjaksi

Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski ovat julkaisseet Solmun verkkosivulla

<http://solmu.math.helsinki.fi/2009/mf1.pdf>

matemaattisen fysiikan kurssikirjan (lyh. MFL). Esipuheensa mukaan se on syntynyt parinkymmenen vuoden aikana Mäntän lukiossa käytetystä materiaalista matemaattisen fysiikan erikoiskurssiin. Käytin tätä kurssikirjaa syksyinä -09 ja -10 Tapiolan lukion kolmannen vuoden opiskelijoilla ja seurasin Aalto-yliopiston Teknillisen Korkeakoulun (lyh. TKK) tuntiopettajana, kuinka ensimmäisenä syksynä kurssikirjan opiskelleet saivat TKK:n perusopinnot alkuun syksyllä -10.

Jatko-opintojen alussa vektoreista ja kulmista otetaan aikaderivaattoja liikeyhtälöiden muodostamiseksi erilaisissa koordinaatistoissa. MFL:n fysiikan esitys alkaa perinteisesti mekaniikalla ja katsauksella termodynamiikkaan. Tässä tuodaan mukaan historiallinen perspektiivi, sillä Newtonin ja Keplerin liikeyhtälöt ovat alkeistapauksissa yksinkertaisia differentiaaliyhtälöitä, joiden ratkaisu voidaan opettaa myös lukiotasolla separoinnin, integroivan tekijän ja sijoittamisen avulla. Periaatteena MFL:ssä on opettaa differentiaaliyhtälöiden teoriaa riittävästi mutta kuitenkin riittävän vähän. Näin vältetään ongelma, joka on tuttu myös jatko-opintojen opettajille: raskas paketti differentiaaliyhtälöistä kompleksiratkaisuineen uudelle opiskelijalle – jolla yleensä ei ole mitään käsitystä differentiaaliyhtälöistä ennen jatko-opintoja – ei yleensä siirry käyttötutuksi ymmärryksen kanssa mekaniikan perusopintoihin. MFL:n tiivis ja havainnollinen opetusperiaate haastaa myös opettajan: kuinka suunnitella oppitunnille esitys, joka on samankaltainen mutta ei kuitenkaan kopio kirjan teoriasta ja esimerkeistä, jotta lahjakkaalle opiskelijalle jäisi itselleen opiskeltavaksi tunnin jälkeen kotonaan kirjan esitys, ja näin asian sisäistäminen vahvistuisi entisestään.

Toinen käsiteltävä osa-alue fysiikasta on termodynamiikka, jonka matemaattista käsittelyä kirjassa pohjustetaan johdatuksella integrointiin pitkin käyrää. Ennen kuin oppilas kunnolla huomaa, hän on jo soveltanut integraalilaskentaa termodynaamiseen prosessiin. Tarkastellessaan integraalin riippuvuutta polusta oppilas havaitsee, että on olemassa energian differentiaali dQ , joka jaettuna lämpötilalla T mahdollistaa laskemisen ilman riippuvuutta polusta, ja entropian luonne olenaisena suurena fysiikassa alkaa valjeta.

On toki todettava, että kirja edellyttää oppilaalta erinomaiset pohjatiedot. Koulumatematiikka on oltava hallinnassa tappiin saakka. Toisaalta TKK:n slangilla ilmaistuna kirjan esittämä ns. alkeisfuksimekaniikka (ensimmäisen TKK:n opintovuoden mekaniikan peruskurssin alkeet) edellytetään joko osatuksi tai nopeasti omaksutuksi heti opintojen alussa. Jossain oppiminen on siis tapahduttava, ja jos valita saa, mieluiten jo abiturienttina olisi hyvä saada jokin muistijälki aikaiseksi.

Yksittäisen lukiokurssin tuntimäärä on rajattu, minkä vuoksi kirjassa aihealueita voi olla vain muutama. Mekaniikan perusliikeyhtälöiden ja termodynamiikan va-

linta on ilmiselvä; Newtonin liikeyhtälöihin ja termodynamiikan sovellusten kehittymiseen eli höyrykoneisiin perustuu teollinen vallankumous. Aaltoliikeoppi, joka on myös valittu kurssikirjaan, kilpailee mielestäni tästä asemasta RLC-piirin ja yleisestikin sähköopin kanssa.

Koekysymysten laadinta tällaisesta kurssista on aina mielenkiintoista. Laadin kokeesta syksyn -09 kurssilla mielestäni mahdollisimman haastavan. Yllätyksekseni jokaiseen koetehtävään tuli oikea ratkaisu – eri oppilailta. Päätelmäni on, että kurssin sisältö soveltuu hyvin abiturienteille opetettavaksi sillä edellytyksellä, että pohja laskurutiinin muodossa on kunnossa. Ilman sitä tulee vaikeuksia. Jotain tietysti kertoo kyseisen vuoden oppilasryhmästä, että heistä kolme eteni fysiikan lukiokilpailun loppukilpailuun ja yksi heistä saavutti lopulta hopeaa fysiikkaolympialaisissa, ja eräs toinen eteni pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun saakka. Voi vain toivoa, että lukiomme saisi käyntiin matematiikkapainotuksen, jotta joka vuosi olisi mahdollista saada kyvyiltään vastaavantasoinen ryhmä kokoon. Ryhmän merkitystä yksittäiselle oppilaille ei voi aliarvioida.

Lukion tarkoituksesta

Lyhyesti ilmaistuna lukion päätehtävä on valmistaa opiskelija kyvykkääksi aloittamaan jatko-opinnot. Lukio on yleissivistävä ja kaikki lukion aloittavat oppilaat eivät suinkaan ole selvillä tulevaisuuden urasuunnitelmistaan. Kuitenkin sellaisille oppilaille, joilla on kykyä ja kiinnostusta painottaa opinnoissaan matematiikkaa ja luonnontieteitä, tulisi antaa siihen mahdollisuus valtakunnallisen sitovan lainsäädännön kautta. Suurissa lukioissa, joilla on painotus esimerkiksi matematiikkaan, tämä onnistuu järjestämällä eritasoisia ryhmiä pitkän matematiikan sisälle ja resurssien sallimissa puitteissa tarjoamalla myös erikoiskursseja esimerkiksi differentiaaliyhtälöistä, matematiikkakilpailutehtävistä – ja matemaattisesta fysiikasta.

Mielestäni olisi suorastaan kulttuuriteko, jos lukion opetussuunnitelmaan palautettaisiin differentiaaliyhtälöiden perusteet – ja lisättäisiin MFL:n esityksen mukainen matemaattinen fysiikka. Jotta edellä mainittujen asioiden oppiminen sujuisi abiturientilta, analyysin lisäksi myös aiemmin oppilaille esitellyt matematiikan osa-alueet, joitten perusosaaminen on välttämätön esitietovaatimus analyysille, algebra ja geometria tulisi vahvistaa jo yläkoulussa. Pyörää ei toki tarvitse keksiä uudelleen, sillä vilkaisu vanhoihin opetussuunnitelmiin, jotka olivat käytössä oppikoulun aikana, osoittavat, että kyse on enemmän palauttamisesta kuin lisäyksestä opetussuunnitelmaan.

Ensimmäinen opiskeluvuosi Teknillisessä korkeakoulussa: perusopintojen tarkoitus

Suomalaisessa yhteiskunnassa on tarve henkilöille, jotka ovat saaneet vahvan matemaattisen pohjakoulutuksen ammattiinsa. Tätä tarvetta silmällä pitäen TKK:lla on muotoutunut ns. perusopintojen laaja oppimäärä. Matematiikan peruskurssit laajalla oppimäärällä ovat sisällöltään varsin kunnianhimoisia – mutta tarpeellisia, jos halutaan ylläpitää monia tärkeinä pitämiämme asioita. Laajaa oppimäärää kutsutaan suorittamaan jokaisesta koulutusohjelmasta noin kymmenen prosenttia hakijoiden parhaimmistosta TKK:n pääsykoepisteiden perusteella. Teknillisen fysiikan ja matematiikan opiskelijoille laaja oppimäärä kuuluu pakollisena tutkintoon.

Tasoero lukion pitkästä matematiikasta TKK:n laajaan matematiikkaan on monille opiskelijoille liian iso. Turhan moni putoaa kyydistä, vaikka TKK:n puolelta on tehty paljon opintojen alun sujuvuuden suhteen: luentojen ja laskuharjoitusten lisäksi järjestetään nykyisin myös laskutupia, joissa assistentteja on arkisin koko päivän ajan opastamassa peruskurssien tehtävissä. Havaintoni mukaan syksyllä -09 kurssikirjan sisällön Tapiolan lukiossa opiskelleet abiturientit saivat opintonsa keskimääräistä paremmin alkuun TKK:lla syksyllä -10. Erityisesti he kokivat tärkeiksi paikkavektorin aikaderivaatan esityksen napakoordinaatistossa ja yleensäkin kaiken, mikä opetti jonkin muun kuin tutun xyz -koordinaatiston käyttöä.

Matematiikan osalta uusilta TKK:n opiskelijoilta on tullut palautetta lukiokurssin Ma13 raja-arvotarkasteleista. Matematiikan Taito -kirjasarjaa – jonka tekijäryhmään MFL:n kirjoittajat kuuluvat – käyttäneiden lukioiden oppilaat ovat abisyksynään tutustuneet raja-arvojen täsmälliseen esitykseen, epsilon-todistukseen.

Ensiksi suhtauduin hieman epäilevästi asian käsitteelyyn abiturienttien kanssa, mutta tässäkin parin vuoden aikana kertynyt näyttö puhuu puolestaan: epsilon-todistuksia on harjoiteltava lukiossa yksinkertaisimmissa muodoissaan ajan kanssa ennen niiden käyttöä matematiikassa tärkeiden ja monimutkaisempien lauseiden todistuksiin. Jos tämä vaihe jää syvällisesti ymmärtämättä, tie matematiikan pääaineopintojen menestykselliseen läpikäymiseen on melko tukossa – ja uusi vahvan matemaattisen pohjakoulutuksen saanut diplomi-insinööri jää syntymättä palvelemaan yhteiskuntaa.

Laajan oppimäärän lisäksi TKK:lla on jokaisella koulutusohjelmalla omiin ammattiopintoihin painottuvat matematiikan peruskurssit, jotka ovat enemmän ”insinöörimatematiikkaa” ja jotka valtaosa opiskelijoista suorittaa (laajan oppimäärän sijaan). Epsilon-todistusten asema näissä insinöörimatematiikan peruskursseissa herättää aina silloin tällöin keskustelua. Samoin voi kysyä, miten tarpeellista on yrittää epsilon-todistusten alkeita lukiossa abivuonna muille kuin kiitettäviä arvosanoja aiemmista kursseista saaneille oppilaille. Vastaus lienee: ei välttämättä olekaan tarpeellista, mutta niille oppilaille, jotka tarvitsevat matematiikkaa tulevaisuudessa, se on suorastaan välttämätöntä.

Uusien korkeakouluopiskelijoiden matemaattisten valmiuksien lähtötaso herättää paljon keskustelua. Opettajat yliopistoissa pitävät yleensä lähtötasoa keskimäärin liian heikkona, mutta jotkut lukioiden opettajat puolestaan tuskailevat, että matematiikan ylioppilaskokeet ovat oppilaille keskimäärin liian vaikeita ja siksi he haluavat kevennyksiä opetussuunnitelmiin. Kuitenkin jollain tapaa pitäisi turvata lahjakkaiden oppilaiden sujuva siirtyminen lukiosta yliopistoon. Matemaattisen fysiikan kirja toimii parhaimmillaan kuin sillanrakentajana näiden kahden koulutason nivelvaiheessa.