Solmu

Matematiikkalehti
1/2011

http://solmu.math.helsinki.fi/

Solmu 1/2011

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

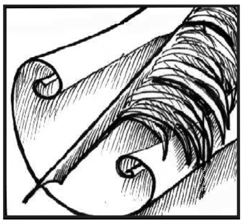
Numeroon 2/2011 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 3.4.2011 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Kansi: Neljän vuoden välein jaettavaan Rolf Nevanlinna -palkintoon kuuluva kultainen mitali.

Sisällys



Korutonta kertomaa

Syksyn 2010 ylioppilaskirjoitusten tulokset olivat jälleen korutonta kertomaa. Pitkän matematiikan kokeen läpäisyraja oli seitsemän (7) pistettä 66 mahdollisesta. Seitsemän on noin 11 % 66:sta. Ylioppilaskirjoitusten vakiintunut tapa on asettaa hyväksymisraja niin, että noin 95 % kokelaista hyväksytään. Nyt tuon perin matalan rajan ylitti alle 90 % yrittäjistä. Koetta en ole huomannut mainitun vaikeaksi.

Olen joskus sanonut, että panos-tuotosmielessä tarkasteltuna matematiikan opetus on valtakunnan onnettomimpia toimialoja. Nuori ihminen osallistuu opetukseen melkein päivittäin 12 vuoden ajan, mutta kovin monen kohdalla jää saavuttamatta edes se yhden yksinkertaisen koetehtävän ratkaisemisen taito.

Abiturientti ei suinkaan joudu ylioppilaskirjoitukseen kylmiltään ja yllätettynä. Oletettavasti hän on suorittanut hyväksytysti säädetyn määrän lukion pakollisia kursseja. Niiden olisi kaiken järjen mukaan pitänyt tuottaa ainakin sellainen minimiosaaminen, jolla lähes maan tasolle asetetun riman yli olisi kevyesti astuttu. Tämä antaa aiheen kysyä opettajien ja koulujen moraalin perään. Miten niin monen oppilaan on mahdollista selvitä kurssikokeesta toisensa jälkeen ilman osaamista? Luokallehan ei luokattomassa lukiossa jää, mutta etenemisesteiden kaltaisin mekanismein on pyritty ehkäisemään oppilaan osaamattomuuden kasautuminen hallitsemattomaksi tilanteeksi. Painostavatko vanhemmat ja rehtorit matematiikan opettajia lipeämään kaikista osaamiskriteereistä? Vai – kauheata sanoa – onko opettajien ja opetushallinnon ammattitaito jotain muuta kuin mitä PISA-Suomen virallinen liturgia ja opettajien järjestöt hehkuttavat?

Osallistuin marraskuussa lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan alkukilpailusuoritusten arviointiin. Pyrkimykset saada laajemmat joukot tietoisiksi matematiikkakilpailusta näyttävät tuottaneen tulosta, sillä kilpailusuorituksia oli arvioitaviksi lähetetty puolentuhatta. Vastausten lukeminen ei kuitenkaan ollut pelkästään iloinen tapahtuma. Tehtävät eivät olleet vaikeita ja kilpailusarjaan osallistujat olivat keskimäärin abiturientteja, joiden matematiikan osaamisen voi olettaa olevan paremmasta päästä. Silti pistejakauman aritmeettinen keskiarvo oli 4,8, kun maksimipisteet (joita toki jaettiin niitäkin, hienoista suorituksista) olivat 24. Jakauman moodi eli useimmin esiintynyt pistemäärä oli 0. Siihen summaan päätyi 16 % osallistujista. Ja vastauksissa aika tavallinen päättelyaskel oli seuraava: $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$!

Pitkän matematiikan osaamisvajeessa on aineksia kansalliseen katastrofiin. On aivan selvää ja hyväksyttävää, että varsinaista matematiikkaa, siis muuta kuin laskentoa, eivät kaikki tarvitse eivätkä kaikki opi. Mutta kun kuitenkin aika moni tarvitsee ja voisi oppia, ja heillä ei oikein muutakaan tietä matematiikkaan ole kuin tämä lukion oppimäärä!

Mitä olisi tehtävä? Ehdotan seuraavaa. Ylioppilastutkinnon matematiikan kokeessa luovutaan suhteellisesta arvostelusta ja siirrytään selviin, mutta toki kohtuullisiin kriteereihin; vain ne täyttävä hyväksytään. Yksinkertaisin selvä kriteeri olisi se vanha ainakin kolmen tehtävän osaamisen vaatimus. Kun tilanne on luisunut

Pääkirjoitus

nykyiselleen, on annettava siirtymäaikaa. Voitaisiin lähteä siitä, että lukio-opiskelunsa ensi elokuussa alkavat tietävät järjestelmän olevan voimassa kolmen vuoden kuluttua.

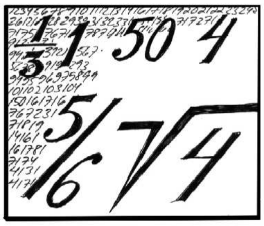
Minulle vastataan, että näin ei voi tehdä, koska seurauksena olisi oppilaskato pitkässä matematiikassa. Asetetut määrälliset tavoitteet jäisivät saavuttamatta ja opettajien työllisyyskin voisi vaarantua. Oppilasmäärät voisivat todellakin pienentyä. Mutta eikö laatu korvaisi määrää? Mitä ihmettä oikeastaan teemme sillä lumeopilla, jota nyt näytään jaettavan kovin monelle?

* * *

Kolme Jyväskylän yliopistossa matematiikan opettajaksi opiskelevaa, Sami Hirvonen, Saku Koskinen ja Matti Koivuluoma, kirjoittivat Helsingin Sanomissa 18.10.2010 opinnoistaan. Heidän pääsanomansa oli, että matematiikan opettajan opintojen ei tulisi koostua niin pääpainoisesti samoista aineksista kuin varsinaisiksi matemaatikoiksi opiskelevien kuin mitä he kokevat tapahtuvan. Sen sijaan matematiikan opettajiksi koulutettavien pedagogisten tietojen ja taitojen kasvattamiseen opintojen kuluessa ei panosteta riittävästi. Kirjoittajat haluaisivat tutustua koulumatematiikan ja koulun ilmiöihin koko opiskeluaikansa ajan. Hyviä tavoitteita kaikki.

Jyväskyläläisopiskelijat eivät varmaankaan ajattele, niin kuin monet matematiikkaa koulussa opiskelevat luonnostaan tekevät, että matematiikka olisi sama asia kuin se kokonaisuus, joka muodostuu koulukursseista. Mutta pitkä kokemukseni matematiikan opettajista on, että aika moni opettaja tuntuu näin ajattelevan. Tunneista selviää melkein kuka vain, ovathan oppikirjan tehtävien vastaukset kustantajan verkkosivuilta kopioitavissa. Totuus on kuitenkin toinen. Matematiikan opettajan – ja vain hänen – keskeistä ammattitaitoa on ymmärtää ja välittää tietoa siitä, että matematiikkaa riittää joka suuntaan koulukurssien rajaaman piirin ulkopuolella, että myös tämän tiedon välittäminen. Hän kykenee siihen vain, jos hän pystyy näkemään koulumatematiikan laajemmasta perspektiivistä. Sitä näkökulmaa tuskin löytää opiskelematta ja oppimatta matematiikkaa, erityisesti sitä matematiikkaan kuuluvaa tarkkaa, täsmällistä ja omaa ajattelua. Oikean matematiikanopettajan työ ja elämä ei ole oppikirjan vastausliitteen ja taulukkokirjan varassa. Ja mitä muita taitoja matematiikan opettajalta voikaan odottaa, niillä ei voi korvata itse matematiikan osaamista.

Matti Lehtinen



Täydellisyyttä etsimässä

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Kungliga Tekniska Högskolan, Tukholma

Johdanto

Jatketaanpa Solmussa 2/2010 aloitettuja tekijäfunktioon liittyviä harjoituksia. Tällä kertaa keskitytään hieman toisenlaiseen tekijäfunktioon kuin aikaisemmin, nimittäin luvun n kaikkien positiivisten tekijöiden summaan

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Tästä eteenpäin tämän tekstin aikana oletetaan sanan *tekijä* viittaavan vain positiivisiin tekijöihin. Jos luvun n alkutekijähajotelma on $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, niin

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= (1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k}) \\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.\end{aligned}$$

Tämän todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Tavallisen tekijäfunktion $d(n) = \sum_{d|n} 1$ yläraja on varsin pieni: $d(n) \ll n^{\varepsilon}$ millä tahansa positiivisella ε, mutta samaa ei funktiosta σ voi sanoa, sillä

$$\sigma(n) = n + \sum_{d|n,\ d<n} d.$$

Voimmekin nyt keskittyä aivan toiseen ongelmaan: Milloin luvun n sitä itseään pienempien positiivisten tekijöiden summa on sama kuin luku itse, eli milloin pätee $\sigma(n) = 2n$? Tällaisia lukuja kutsutaan *täydellisiksi luvuiksi*. Esimerkiksi luku 28 on täydellinen luku: Sen positiiviset tekijät ovat 1, 2, 4, 7, 14 ja 28, ja

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28.$$

Selvästi siis täydellisiä lukuja on olemassa (ainakin yksi kappale). Seuraavat kysymykset ovatkin: Onko näitä enemmän? Onko näitä peräti paljon? Pilataan heti jännitys kertomalla loppuratkaisu:

1. Parillisia täydellisiä lukuja on olemassa, ja niiden muoto tunnetaan täysin. Sen sijaan ei tiedetä, onko niitä äärettömän vai äärellisen paljon.
2. Parittomia täydellisiä lukuja ei oleteta olevan olemassa. Valitettavasti tätä ei ole vielä todistettu (useista yrityksistä huolimatta ja vaikka jotkut itse uskovatkin tämän todistaneensa).

Parilliset täydelliset luvut

Kuten edellä todettiin, parillisten täydellisten lukujen tilanne on varsin selkeä. Selvennetään ensin parillisten täydellisten lukujen muoto ja jutustellaan sen jälkeen enemmän niiden etsimisestä.

Lause 1. *Jos $2^p - 1$ on alkuluku, niin $2^{p-1}(2^p - 1)$ on parillinen täydellinen luku.*

Todistus. Tämän väitteen todistus on hyvin helppo lasku. Alkuluvun ainoat tekijät ovat luku 1 ja luku itse. Siispä

$$\sigma\left(2^{p-1}(2^p - 1)\right) = \sigma\left(2^{p-1}\right)\sigma\left(2^p - 1\right) = (2^p - 1) \cdot 2^p,$$

mikä todistaa väitteen. □

Toinen suunta on aavistuksen hankalampi kuin edellinen, mutta kuitenkin vielä varsin helppo:

Lause 2. *Kaikki parilliset täydelliset luvut ovat muotoa $2^{p-1}(2^p-1)$, jossa 2^p-1 on alkuluku.*

Todistus. Olkoon $2^h d$ parillinen täydellinen luku, ja olkoon d pariton. Nyt

$$\sigma(2^h d) = \sigma(2^h)\sigma(d) = (2^{h+1}-1)\sigma(d).$$

Jotta kyseinen luku voi olla täydellinen, on pädettävä

$$2^{h+1}d = (2^{h+1}-1)\sigma(d).$$

Siispä $2^{h+1}-1 \mid d$. Kirjoitetaan $d = \left(2^{h+1}-1\right)k$. Nyt $\sigma(d) \geq 2^{h+1}k$, missä yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $k=1$ ja $2^{h+1}-1$ on alkuluku, eli

$$\begin{aligned} 2^{h+1}\left(2^{h+1}-1\right)k = 2^{h+1}d &= (2^{h+1}-1)\sigma(d) \\ &\geq (2^{h+1}-1)2^{h+1}k, \end{aligned}$$

missä yhtäsuuruus vallitsee vain edellä mainituilla ehdoilla. Koska puolet kuitenkin ovat yhtäsuuret (helppo sievennys), niin yhtäsuuruuden on vallittava. Tämä todistaa väitteen. □

Nyt siis tiedämme millaisia parilliset täydelliset luvut ovat. Esimerkiksi aiemmin esimerkkinä käytetty luku 28 on tätä muotoa:

$$28 = 4 \cdot 7 = 2^{3-1} \cdot (2^3-1).$$

Koska jokainen parillinen täydellinen luku vaatii ihan ikioman alkuluvun muotoa 2^p-1, seuraava luonnollinen kysymys on, miten paljon tällaisia alkulukuja, eli niin kutsuttuja Mersennen alkulukuja, on olemassa. Ensimmäiseksi todettakoon, että jotta tällainen luku voi olla alkuluku, on luvun p oltava alkuluku (helppo harjoitustehtävä). Aikoinaan jopa uskottiin tämän olevan riittävä kriteeri, mutta valitettavasti M_{11}, eli luvun p arvolla 11 saatava Mersennen luku ei ole alkuluku:

$$M_{11} = 2047 = 23 \times 89.$$

Lopulta Mersennen alkuluvut ovat varsin harvassa, eli läheskään kaikilla alkuluvuilla p ei luku M_p ole alkuluku. Toisaalta ei kuitenkaan tiedetä, onko tällaisia alkulukuja äärettömän paljon vai ei. Yleinen otaksuma tuntuu olevan, että niitä on äärettömästi, mutta varsin harvassa.

Parittomat täydelliset luvut

Parittomille täydellisille luvuille voi todistaa kaikenlaisia lystikkäitä ominaisuuksia varsin alkeellisesti. Kyseenalaista tietenkin on, onko näillä ominaisuuksilla mitään todellista merkitystä, mutta kertovat ne ainakin siitä, että jos pariton täydellinen luku on olemassa, niin sen on oltava varsin jännittävän muotoinen. Aloitetaan hyvin yksinkertaisella väitteellä:

Lause 3. *Neliö ei voi olla pariton täydellinen luku.*

Todistus. Todistuskin on hyvin yksinkertainen. Jotta n voisi olla täydellinen luku, olisi kaikkien sen tekijöiden summan oltava parillinen (jotta $\sigma(n)=2n$). Kuitenkin tekijöiden summa voidaan laskea esimerkiksi seuraavasti:

$$\sigma(n) = \sqrt{n} + \sum_{d<\sqrt{n}} \left(d + \frac{n}{d}\right) \equiv \sqrt{n} \equiv 1 \pmod 2.$$

Väite onkin nyt selvä. □

Osoitetaan nyt, että jossain mielessä luku ei kuitenkaan voi kovin paljon poiketa neliöstä:

Lause 4. *Jos pariton täydellinen luku on olemassa, niin se on muotoa qd^2, missä q on alkuluku (joka jakaa tai ei jaa lukua d).*

Todistus. Olkoon luvun n alkutekijähajotelma

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Nyt

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k}).$$

Huomaamme, että jos α_i on pariton, niin $(1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i})$ on parillinen. Kuitenkin $2n$ on vain kerran jaollinen luvulla 2 (eli se ei ole millään suuremmalla kakkosen potenssilla jaollinen), jolloin myös $\sigma(n)$ saa olla vain kerran jaollinen luvulla 2. Täten vain yksi tekijöistä $(1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i})$ voi olla parillinen. Väite on todistettu. □

Tarkennetaanpa nyt edellistä tulosta:

Lause 5. *Jos $n = qd^2$ on pariton täydellinen luku, niin $q \equiv 1 \pmod 4$.*

Todistus. Olkoon luvun n alkutekijähajotelma

$$q^\beta p_1^{2\alpha_1} \cdots p_k^{2\alpha_k}.$$

Nyt

$$\sigma(n) = \sigma\left(q^\beta\right)\sigma\left(p_1^{2\alpha_1} \cdots p_k^{2\alpha_k}\right).$$

Muistetaan nyt, että $q^2 \equiv 1 \pmod 4$. Jos olisi $q \equiv 3 \pmod 4$, niin olisi $\sigma\left(q^\beta\right) = 1 + q + \cdots q^\beta \equiv 0 \pmod 4$, mikä ei ole mahdollista. Tämä todistaa väitteen. □

Todistetaan ihan lopuksi vielä pieni tulos alkutekijöiden lukumäärään liittyen, eli että niitä on oltava paljon:

Lause 6. *Parittomalla täydellisellä luvulla on oltava vähintään pienimmän alkutekijän verran erisuuria alkutekijöitä.*

Todistus. Olkoon luvun n alkutekijähajotelma $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Jos pätee

$$2p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1},$$

niin arvioimalla ylöspäin oikeaa puolta saadaan

$$2p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} < \frac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1-1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1}}{p_k-1},$$

eli

$$2 < \frac{p_1}{p_1-1} \cdots \frac{p_k}{p_k-1}.$$

Huomatkaamme nyt, että funktio

$$g(x) = \frac{x}{x-1}$$

on laskeva, kun $x > 1$ (epäileväiset lukijat voivat derivoida ja päätyä samaan johtopäätökseen). Voimme myös päättää, että

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_k.$$

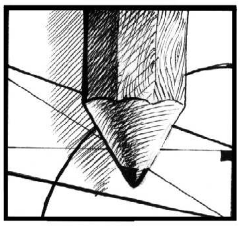
Siispä

$$\begin{aligned} 2 &< \frac{p_1}{p_1-1} \cdots \frac{p_k}{p_k-1} \\ &< \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_1+1}{p_1} \cdots \frac{p_1+k-1}{p_1+k-2} = \frac{p_1+k-1}{p_1-1}. \end{aligned}$$

Loppu onkin varsin helppo lasku:

$$2(p_1-1) < p_1+k-1,$$

joten $p_1 - 1 < k$, mikä todistaakin väitteen. □



Vaikeita, jopa mahdottomia yhtälöitä

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Kielen aineksiin kuuluvat paitsi yksiselitteisesti tarkoitettaan vastaavat sanat, myös kielikuvat ja vertaukset. Kuvia ei kovin usein löydetä matematiikan käsitteistöstä. Joskus kuitenkin näkee kirjoitettavan *yhteisestä nimittäjästä*, toisinaan *reunaehdosta*. Yksi matematiikkalähtöinen sana tuntuu nykyään päässeen varsinaiseksi suosikiksi. Se on *yhtälö*, joka monen kirjoittajan tekstissä edustaa milloin minkäkinlaista *yhdistelmää*. Taannoinen suomen kielen normien perusteos, puolen vuosisadan takainen Nykysuomen Sanakirja, pitää sanaa yksiselitteisen matemaattisena: ”**yhtälö** s. *mat.* kahden yhtä suureksi merkityn lausekkeen kokonaisuus, ekvaatio; vrt. kaava 4.a. | Identtinen, ehdollinen y. Ensimmäisen, toisen asteen y. Y:n vasen ja oikea puoli. Y:n juuri. Ratkaista y.”

Vuoden 2010 tiedotusvälineissä yhtälö on kuitenkin aivan muuta. Katsotaanpa jokunen esimerkki.

Aamulehden pääkirjoituksen otsikko 29.7.2010 on ”Venäläinen yhtälö”. Lihan Venäjän-vientiä käsittelevän kirjoituksen mukaan ”Tähän yhtälöön on nyt alkanut ilmestyä konkreettisia lukuja. Venäläisten kerrotaan esimerkiksi löytäneen Atrian sianlihasta aknelääkettä ja muita antibiootteja.” Olavi Uusivirta pohti Helsingin Sanomissa 21.5.2010 kulttuurin ilmaisjakelua verkossa ajatuksin ”Lienee suhteellisen loogista, että jos tästä yhtälöstä poistetaan ostaja, joudutaan kojuihin laittamaan laput luukulle, kuten Atso Almila jo ehdottikin.” Ilta-Sanomien Plus-liite teoretisoi sukupuolirooleista kesänvietossa 17.7.2010: ”Mökillä ollaan tilanteessa, jossa tervettä tekemistä molemmille sukupuolille riittää, ja yhtälöstä on karsittu lasikatosta jaarittelevat naisdosentit.” Kimmo Siira ihmetteli yleisurheilun MM-kisojen keihäskarsinnan tuloksia Kalevassa 31.7.2010: ”Andreas Thorkildsen ja perjantaiaamun keihäskarsinnan tulos 78,82 eivät sovi samaan yhtälöön, vaikka kuinka pyörittelisi.” Pekka Vahvanen pohtii Sudanin poliittista tilannetta Kalevassa 19.8.2010: ”Tämän argumentin mukaan al-Bashrin poistaminen yhtälöstä veisi maan yhä pahempaan anarkiaan.”

Tiedotusvälineiden yhtälöön liittyy tavallisesti lisämääreitä, yleensä jotenkin kielteisiä. Yhtälö voi olla *mahdoton*: ”Islam ja uskonnonvapaus, mahdoton yhtälö” (Tiede-lehden keskustelupalstan aiheotsikko), *yllättävän vaikea*: ”Hirvenmetsästys on yllättävän vaikea yhtälö” (Timo Myllykoski, Kaleva 29.9.2010), *toimimaton*: ”Kyseessä on toimimaton yhtälö, jossa valtio siirtää hätäkeskusuudistusten riskit kuntien ja kansalaisten harteille” (Petri Lindh, Helsingin Sanomat 20.5.2010), *päätön*: ”Mielestäni tämä on päätön yhtälö: teet itse työt, talletuksille maksetaan onnetonta korkoa, ja siitä hyvästä maksat yhä kalliimpia palvelumaksuja” (Mari Niemi-Saari, Helsingin Sanomat 9.9.2010), *onneton ja absurdi*: ”Yhtälö on siis onneton ja absurdi: otamme kuluttamalla ekologista velkaa tulevilta sukupolvilta ilman että se edes lisää onnellisuuttamme” (Katri Merikallio, Suomen Kuvalehti 18/2010), *kaupallinen* ja *mahdoton*: ”Suosittua ulkomaista tv-draamaa voi saada 1000–10000 eurolla tunti. Vastaava suomalainen saattaa maksaa 200000–300000 euroa tunti. Kaupallinen yhtälö on mahdoton.” (Mikael Jungner, Kanava 5/2010) tai *hengenvaarallinen*: "– kotihitsaaja parsii tee-se-itse perävaunun ja laittaa paksun maalikerroksen päälle. Tuloksena on hengenvaarallinen yhtälö muille tielläliikkujille." (Eero Saarikylä, Helsingin Sanomat 20.5.2010).

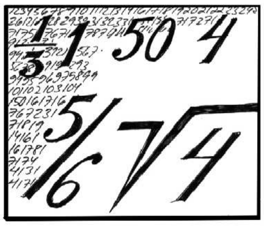
Negatiivinen yhtälö- ja matematiikkakokemus yleensäkin lienee myös Jonnalla Anna-lehdessä 17.6.2010: "Ihan samat ongelmat kuin edellisessä avioliitossani. Eipä ole monta yhteistä nimittäjää tässä yhtälössäni." Sen sijaan Jorma Styngillä Kalevassa 27.9.2010 on myönteisempi näkemys: "Tieteen ja taiteen yhtälö on ihan mielenkiintoinen".

Eihän kielikuvan käytössä mitään pahaa ole. Jotenkin vain tuntuu, että yhtälö-sanaa tarjotaan yleensä yhdistelmä-sanan tilalle nimenomaan sellaisiin kohteisiin, joissa yhdistelmä on epätoivottava tai hankala. Samalla heijastellaan ehkä matematiikkaan kohdistuvaa varmaan yleensä tiedostamatonta negatiivista perusasennetta. Äärimmäisyyteen tämän taitaa viedä Markku Jokisipilä Helsingin Sanomissa 15.10.2010, kun holokaustista syntyy yhtälö: "Hän pohtii vakuuttavasti teollisen joukkomurhan mahdollistaneiden tekijöiden kokonaisuutta. Hitlerin ja muiden natsijohtajien antisemitismi ja rotuajattelu olivat yhtälössä tärkeitä, mutta toteutus vaati tuhansien uratietoisten keskitason virkamiesten oma-aloitteisuutta ja kymmenien tuhansien kuuliaisten rivimiesten (ja -naisten) panosta."

Yhtälökielikuvaa voi toki käyttää matemaattisesti epäilyttävällä tavalla myös positiivisessa hengessä. Voittamisvalmentaja Cristina Anderssonin blogikirjoitus 4.2.2010 hehkuttaa "Olen aikaisemmin käyttänyt yhtälöä win+win(+win) kuvatessani todellisen voittamisen olemusta. Yhtälössä molemmat osapuolet voittavat win+win ja tuottavat voittavia vaikutuksia myös kolmansille osapuolille, jotka eivät välttämättä ole mukana prosessissa (+win)." ja Pentti Harinen kommentoi kirjoitusta kaksi päivää myöhemmin "Nyt tarvitaan uusia, luovia yhtälöitä!" Dekkaristi Ari Paulow filosofoi sukupuolisen häirinnän epätasa-arvoisuutta kirjassaan Itämaista rakkautta (2009): "Kuinka moni miespuolinen baarimikko ja portsari oli työaikana joutunut naisasiakkaiden ehdotusten ja takapuolesta nipistelyjen kohteeksi ja kuinka moni heistä oli siitä valittanut? Edellä mainittu yhtälö oli naurettavan helppo ratkaista: ääretön x nolla = nolla."

Rikastuisikohan kielenkäyttö edelleen, jos laajempaan tietoisuuteen leviäisi matematiikan käsite *epäyhtälö*?

"Neuvoni nykypäivän kaksikymppiselle on lyhyt: mitään ei tarvita tulevaisuudessa yhtä paljon kuin ihmisiä, jotka osaavat matemaattis-loogisin työkaluin analysoida suuria aineistoja. Se pätee alasta riippumatta." Näin kertoo Samuli Ripatti Ajassa-lehdessä 3/2010. Ripatti väitteli Tukholmassa tohtoriksi 2001 lääketieteellisiä ongelmia selvitettäessä syntyneistä tilastotieteellisistä haasteista ja on nykyisin geenitutkija.



Erehtyikö Douglas Adams?

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Osmo Pekonen luo artikkelissaan [1] mielenkiintoiselta näyttävän yleiskatsauksen uusimman matemaattisen fysiikan erääseen tutkimuskohteeseen ja sen edellyttämään matematiikkaan. Maallikko ei tosin ymmärrä kummastakaan juuri muuta kuin sen, että kokonaisluku 26 näyttää sukeutuvan esiin mitä yllättävimmistä yhteyksistä. Moni asia näyttäisi viittaavan siihen, että maailmankaikkeus on 26–ulotteinen, mutta meille tuntemattomat ulottuvuudet ovat käpertyneet Planckin mittakaavaan pienemmiksi kuin 10^{-35} m. Pekonen lisää loistavalla tyylillään lukua 26 puoltavaan todistetaakkaan myös matemaattisen vitsin, joka on käsillä olevan kirjoituksen varsinainen aihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26.$$

Tällä summalla ei tietenkään ole mitään tunnettua yhteyttä korkeampaan fysiikkaan, mutta se on omana itsenään kiinnostava. Miten se voidaan todistaa? Miksi se ylimalkaan on kokonaisluku? Ovatko mahdollisesti kaikki summat

$$\mathcal{S}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

kokonaislukuja? Riittääkö koulumatematiikka näiden asioiden selvittämiseen?

Vastaus löytyy hieman epätodennäköisestä suunnasta, nimittäin todennäköisyyslaskennasta. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka todennäköisyysjakauma on

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	$x_\imath$	$\dots$
p	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$p_\imath$	$\dots$

Todennäköisyyslaskennan perusteiden mukaan jakauman kaikkien todennäköisyyksien summa on

$$\sum_{\imath} \mathrm{P}\left(X = x_\imath\right) = \sum_{\imath} p_\imath = 1.$$

Sovelletaan tätä eräiden kolikonheittoon liittyvien satunnaisilmiöiden yhteydessä. Heitetään aluksi kolikkoa, kunnes saadaan klaava. Olkoon satunnaismuuttuja X_0 tähän tarvittavien heittojen lukumäärä. Selvästi X_0:n arvojoukko on $\mathbb{Z}_+$, ja koska heitot ovat toisistaan riippumattomia, on

$$\mathrm{P}(X_0 = n) = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \tfrac{1}{2}\right)}_{(n-1)\ \mathrm{kpl}} \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Kaikkien todennäköisyyksien summa on

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_0 = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Siis

$$\mathcal{S}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^0}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Tämä on tietenkin tavallinen geometrinen sarja. (Summia, joissa on ääretön määrä yhteenlaskettavia, kutsutaan sarjoiksi.) Sen suppeneminen ja summa on nyt todistettu todennäköisyyslaskennan kautta. Aktiivinen lukija voi pohtia, voisiko jotakin vinkuraista kolikkoa heittämällä laskea yleisemmän summan

$$\mathcal{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in]0,1[.$$

Uusitaan koe heittämällä kolikkoa, kunnes saadaan toinen klaava. Olkoon satunnaismuuttuja X_1 tarvittavien heittojen lukumäärä. Tämä muuttuja saa arvon n, jos $(n-1)$:llä heitolla saadaan tasan yksi klaava ja viimeisellä heitolla toinen klaava. Klaavojen määrä tietyssä heittosarjassa on binomijakautunut, joten

$$\mathrm{P}\left(X_1 = n\right) = \binom{n-1}{1} \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \tfrac{1}{2} = \binom{n-1}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Kahden klaavan saamiseen tarvitaan vähintään kaksi heittoa. Merkitsemällä todennäköisyyksien summa ykköseksi saadaan

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n-1}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left(\tfrac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Tästä seuraa (soveltamalla raja-arvon laskusääntöjä äärellisiin osasummiin)

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0,$$

ja edelleen

$$\mathcal{S}_1 = 1 + \mathcal{S}_0 = 1 + 1 = 2.$$

Jatketaan samalla tavalla. Heitetään kolikkoa, kunnes saadaan kolmas klaava. Satunnaismuuttuja X_2 on tähän tarvittavien heittojen lukumäärä. Vähintään kolme heittoa tarvitaan, ja todennäköisyys, että X_2 saa arvon n, on

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_2 = n\right) &= \binom{n-1}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= \binom{n-1}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Kuten edellisessäkin tapauksessa

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{n=3}^{\infty} \binom{n-1}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - 3n + 2\right) \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \mathcal{S}_2 - 3\mathcal{S}_1 + 2\mathcal{S}_0,$$

ja edelleen

$$\mathcal{S}_2 = 2 + 3\mathcal{S}_1 - 2\mathcal{S}_0 = 2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6.$$

Tämä maistuu varmaan jo puulta, mutta heitetään edelleen kolikkoa, kunnes saadaan neljäs klaava. Satunnaismuuttuja X_3 olkoon tähän tarvittavien heittojen lukumäärä. Vähintään neljä heittoa tarvitaan. Kuten edellä

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_3 = n\right) &= \binom{n-1}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-4} \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= \binom{n-1}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=4}^{\infty} \binom{n-1}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Summaus voidaan aloittaa arvosta $n = 1$ alkaen, sillä kolme ensimmäistä termiä ovat nollia. Siis

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned} 6 &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3) \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \mathcal{S}_3 - 6\mathcal{S}_2 + 11\mathcal{S}_1 - 6\mathcal{S}_0, \end{aligned}$$

ja lopulta

$$\mathcal{S}_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26.$$

Summan $\mathcal{S}_k$ laskemiseksi saadaan samantapainen yhtälö kuin yllä nähdyt. Jos edeltävät summat ovat kokonaislukuja, niin myös $\mathcal{S}_k$ on kokonaisluku. Koska alkupään summat ovat kokonaislukuja, seuraa induktioperiaatteesta, että kaikki nämä summat ovat kokonaislukuja.

Aktiivinen lukija voi siis täydentää taulukkoa

$\mathcal{S}_0$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	...
1	2	6	26	...

kokonaisluvuilla kuinka pitkälle tahansa, tai ainakin vastata Mensa-tyyppiseen kysymykseen: *Mikä on lukujonon 1, 2, 6, 26, ... seuraava termi?*

Miten tämä kaikki liittyy Douglas Adamsiin? Hänen mainio teoksensa [2] huipentuu lukuun 42 tavalla, jota ei tässä ole tarpeen lähemmin selittää, jotta lukukokemus olisi täydellinen niille, jotka eivät vielä ole tätä kirjaa lukeneet. Luku 42 edustaa monille humoristista pakotietä ahdistuksesta, jota kaatuvat tietokoneet ja päättömästi toimivat ohjelmistot aiheuttavat. Jos Adams olisi sattumoisin valinnut maagiseksi luvukseen 26, niin hän olisi saanut satiiriinsa ripauksen maailmankaikkeuden syvimmästä olemuksesta. Mutta onnistuiko hän tässä sittenkin? Jos korostetaan lukujen esittämisen paikkamerkintää hakasuluilla, esimerkiksi $35 = [3][5]$, niin lukujen 26 ja 42 välille löytyy yhteys:

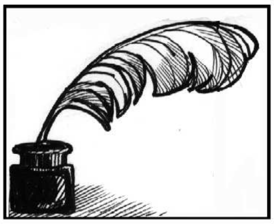
$$26 = [2][6] = [4-2][4+2].$$

Kiitos dosentti Osmo Pekoselle artikkelin [1] erillispainoksesta.

Viitteet

[1] Osmo Pekonen, *Miksi maailmankaikkeutta on väitetty 26–ulotteiseksi?*, Arkhimedes 1, 1992.

[2] Douglas Adams, *Linnunradan käsikirja liftareille*, WSOY 1989.



Suomen matematiikan tähtinimet[1]

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Kaikenlaisen toiminnan tuloksellisuuden arviointia pidetään aina vain tärkeämpänä. Ja suomalaiset ovat aina kovin kiinnostuneita tietämään, mikä on meidän rankingimme erilaisilla listoilla. Suomen matematiikanopetuksen kärkimaaksi tehnyt ”PISA-tutkimus” on antanut ilonaiheita poliitikoille ja opetushallinnolle.

Suomen matematiikan tutkimuksen nykytilaakin ovat asiantuntevat kansainväliset arvosteluraadit käyneet tarkastelemassa. Otetaan nyt vielä rohkeampi tavoite ja yritetään selvittää suomalaisten matemaatikkojen panosta maailman matematiikalle historiallisestakin perspektiivistä. Jotta arvio ei olisi aivan subjektiivinen, olisi hyödynnettävä jonkinlaista kansainvälistä arvosteluraatia. Mistä sellainen? Yksi huokea tapa poimia kansainvälistä arvostusta nauttivat suomalaismatemaatikot on katsella arvostettujen matematiikan historian monografioiden ja matemaattisten hakuteosten henkilöhakemistoja. Keitä ovat tällaisen ”kansainvälisen raadin” tunnustamat suomalaismatemaatikot ja millä ansioilla he ovat listoille päässeet?

Matematiikan yleishistorioiden osalta tulos on laiha. Tavallisimmissa matematiikan historian oppikirjoissa ei esiinny suomalaisnimiä juuri ollenkaan.

Muutama poikkeus toki on. *Florian Cajorin* **History of Mathematics** mainitsee 1919 ilmestyneessä toisessa painoksessaan *Lorenz Lindelöfin* ja *Jarl Lindebergin*, ja *Leonhard Euleria* käsittelevät teokset tuntevat yleensä *Anders Lexellin.* Vuonna 1921 ilmestynyt *Sir Thomas Heathin* monumentaalinen **A History of Greek Mathematics** tietää kertoa, että toisin kuin yleensä uskotaan, suomalainen, Turun Akatemian matematiikan professori *Martin Johan Wallenius* (1731–73) saattoi vuonna 1766 päätökseen erään matematiikan historian tärkeimpiin kehityslinjoihin kuuluneen ongelman selvittelyn. Kyseessä on ongelma euklidisin keinoin neliöitävistä ympyräkaksikulmiokuvioista. 400-luvulla eKr. elänyt *Hippokrates Khioslainen* osoitti, että se kahta kuunsirppiä muistuttava kuvio, jota rajoittavat ne puoliympyrät, joiden halkaisijat ovat suorakulmaisen kolmion hypotenuusa ja kateetit, on pinta-alaltaan sama kuin sen pohjana oleva suorakulmainen kolmio. Juuri tämä tieto kannusti tutkimaan ympyrän neliöimisen mahdollisuutta, kysymystä, joka oli avoin aina 1870-luvulle asti. Wallenius osoitti, että Hippokrateen kuunsirpeille analogisia olennaisesti erilaisia neliöitäviä sirppikuvioita on kaikkiaan viisi erilaista.

Anders Lexell (1740–84) on ensimmäinen kansainväliseen maineeseen noussut matematiikan suomalainen. Varsinaissuomalainen Lexell opiskeli ensin Turun Akatemiassa mutta siirtyi pian Pietariin, jonka tiedeakatemian jättihahmo oli sokeutuva *Leonhard Euler.* Euler tarvitsi huikean laajan tuotantonsa kirjuriksi assistentteja, joista yksi oli Lexell. Lexell ei kuitenkaan ollut vain puhtaaksikirjoittaja, vaan hänen omat ansionsa sekä differentiaaliyhtälöiden tutkimuksessa et-

[1]Muokattu vuonna 2001 ilmestyneeseen SMFL:n 40-vuotisjulkaisuun *Työvälineitä tietoyhteiskuntaan* kirjoitetusta artikkelista.

tä tähtitieteellisten laskujen suorittamisessa olivat niin suuret, että hän peri Eulerin aseman Pietarin tiedeakatemian matemaatikkona tämän kuoltua. Lexellillä oli oma sivuroolinsa eräässä tärkeässä luonnontieteen maailmankuvaa muovanneessa tapahtumaketjussa. Hän oli ensimmäinen, joka osoitti laskelmillaan, että William Herschelin taivaalta löytämä himmeä liikkuva kohde ei ollut komeetta vaan planeetta, Uranus. Antiikin ajoista vallinnut käsitys maata kiertävistä seitsemästä taivaankappaleesta kumoutui.

Lorenz Leonard Lindelöf (1827–1908) oli monipuolinen mies. Matematiikassa hänen alansa oli *variaatiolaskenta*, yksi matemaattisen analyysin päätutkimuskohteita 1700-luvulla ja 1800-luvun alkupuolella. Lindelöfin tieteellisistä tuloksista muistettavin on saksalaisen Jakob Steinerin tietyn tilavuuksisista monitahokkaista pinta-alaltaan pienintä koskeneen olettaman todistus. Lindelöf julkaisi Pariisissa ranskankielisen variaatiolaskennan oppikirjan, joka oli pitkään käytössä monissa Euroopan yliopistoissa. Lindelöf siirtyi Helsingin yliopiston matematiikan professuurista Kouluylihallituksen, nykyisen Opetushallituksen edeltäjän, johtajaksi. Hän ehti olla edustajana säätyvaltiopäivillä kolmessa eri säädyssä: yliopiston edustajan pappissäädyssä, sitten porvaristossa ja viimein aateloituna[2] aatelissäädyssä, vieläpä säädyn puheenjohtajana eli maamarsalkkana.

Pysyvän aseman matematiikan nimistössä on saanut monipuolinen *Jarl Lindeberg* (1876–1932). Cajori mainitsee Lindebergin variaatiolaskennan yhteydessä, mutta varsinaisen maineensa Lindeberg on saanut toisaalta. Helsingin yliopiston matematiikan apulaisena[3] toimineen Lindebergin tehtäväksi tuli 1920-luvun alussa opettaa todennäköisyyslaskennan kurssia. Perusteellisena henkilönä hän ei luottanut lähteisiinsä, vaan pyrki selvittämään asiat itsenäisesti. Tämä perusteellisuus tuotti tulosta todennäköisyyslaskennan keskeisen raja-arvolauseen kohdalla. Kauan on ollut yleisesti tunnettu ja hyväksytty käsitys, jonka mukaan usean satunnaismuuttujan summa on likimain normaalijakautunut. Lindeberg todisti tämän täsmällisesti hyvin yleisin oletuksin. Tulos julkaistiin Mathematische Zeitschriftissä. – Eräs 1900-luvun nerokkaimpia ja kuuluisimpia matemaatikkoja, englantilainen *Alan Turing* (1912–54), oli 1930-luvulla Cambridgessä saanut opinnäytetyökseen todennäköisyyslaskennan keskeisen raja-arvolauseen. Turing, joka ei myöskään juuri harrastanut lähdetutkimusta, löysi itsekseen Lindebergin todistuksen ja laati työnsä. Vasta ollessaan jättämässä sitä professori *Abram Besicovitchille* hän sai kuulla, että todistuksen on jo julkaissut "joku Lindeberg", niin kuin Turingin suomennetunkin elämäkerran kirjoittaja *Andrew Hodges* mainitsee. Turingin työ kelpuutettiin kuitenkin.

Hakuteosten nimistöä

Kun historiankirjoista ei ole apua Suomen matematiikan arviointiin, voi lähteä tarkastelemaan tietoverkkoa ja hakuteoksia.

Internetin merkittävin matematiikan historian aineistokooste, ainakin mitä matematiikan henkilöihin tulee, on skotlantilaisen St. Andrews -yliopiston sivusto `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`. Sivustolta voi katsoa suoraan sinne kirjatut matemaatikot syntymäpaikan mukaan. Sivustolta löytyy (joulukuussa 2010) seitsemän sellaista matemaatikkoa, jonka syntymämaaksi on merkitty Suomi: Anders Lexellin lisäksi Ernst Lindelöf, Lars Ahlfors, Hjalmar Mellin, Rolf Nevanlinna, Karl Sundman ja Juha Heinonen. Vertailun vuoksi: sivustolla on 15 norjalaisen, 17 ruotsalaisen ja 23 tanskalaisen matemaatikon elämäkerrat.

Vuonna 1987 Reidel-kustantamon julkaiseman alunperin neuvostoliittolaisen moniosaisen ja arvostetun **Encyclopedia of Mathematicsin** henkilöluettelo tuntee seuraavat suomalaiset: Lars Ahlfors, Felix Iversen, Kustaa Inkeri, Jarl Lindeberg, Ernst Lindelöf, Lorenz Lindelöf, Hjalmar Mellin, E. J. Nyström, Rolf Nevanlinna ja P. J. Myrberg. (Hakusanojen tarkastelu osoittaa kuitenkin, että viittaus Lorenz Lindelöfiin tarkoittaa itse asiassa Ernst Lindelöfiä). MIT Pressin ja American Mathematical Societyn kaksiosaisen, alkuaan japanilaisen **Encyclopedic Dictionary of Mathematicsin** (1977) hakemisto puolestaan mainitsee nimet Lars Ahlfors, Felix Iversen, Matti Jutilla, Olli Lehto, Y. W. Lindeberg[4], Ernst Lindelöf, Hjalmar Mellin, Rolf Nevanlinna, Leo Sario, Aimo Tietäväinen ja K. I. Virtanen.

Integraalimuunnokset ovat tärkeä analyysin työkalu. Fourierin ja Laplacen transformaatioiden ohella tunnetuimpia integraalimuunnoksia on Mellinin muunnos. Sen esitti *Hjalmar Mellin* (1854–1933). Mellinin uran funktioteoreetikkona käynnisti Helsingissä Lorenz Lindelöfin jälkeen nelisen vuotta professorina toiminut ruotsalainen *Gösta Mittag-Leffler*, sittemmin – osin suomalaisen vaimonsa kautta hankkimansa varallisuuden turvin – merkittävän uran matematiikan kansainvälisenä organisaattorina luonut ruotsalainen. Mellin itse teki virkauransa teknillisen opetuksen parissa, *Polyteknillisestä opistosta Teknilliseksi korkeakouluksi* muuttuneen oppilaitoksen matematiikan opettajana ja professorina.

[2] Olli Lehto on kirjoittanut Lorenz ja Ernst Lindelöfistä kaksoiselämäkerran *Tieteen aatelia* (Otava 2008).

[3] Virkanimike *apulainen* muuttui aikanaan *apulaisprofessoriksi* ja sitten *professoriksi.*

[4] Tekstin siirtyminen japanin kielen kautta selittänee Jarl Lindebergin oudon etunimen alkukirjaimen ja Matti Jutilan nimen italialaisvaikutteisuuden. Samalla nähdään, että herrat eivät ole olleet kääntäjille ja toimittajille tuttuja.

Ajallisesti seuraava kansainvälisiltä listoilta löytyvä suomalaismatemaatikko on *Ernst Lindelöf* (1870–1946). Ernst oli Lorenzin poika ja tämän tavoin haki kansainväliset oppinsa Pariisista. Ernstkin julkaisi Pariisissa ranskankielisen oppikirjan, jonka aiheena oli residylaskenta, kompleksifunktioiden teorian tarjoama keino reaalisten integraalien määrittämiseksi. Mittag-Lefflerin Suomeen lanseeraama funktioteoria oli Lindelöfin merkittävimpien tieteellisten saavutusten alue. Lindelöfin tutkimukset kohdistuivat mm. analyyttisten funktioiden kasvuun. Erityisen usein mainitaan Lindelöfin yhdessä ruotsalaisen *Lars Edvard Phragménin* (1863–1937) kanssa todistamaa lausetta analyyttisen funktion kasvusta sektorinmuotoisessa alueessa. Lindelöfin nimi on saanut pysyvän sijan myös pistejoukkojen topologiassa: ns. avoimen peitteen numeroituvaa osapeitettä koskeva tulos on antanut aiheen kutsua tietynlaisia topologisia avaruuksia Lindelöf-avaruuksiksi. Jotkut topologit ovat alkaneet pitää käsitettä siinä määrin tuttuna, että kirjoittavat sanan Lindelöf pienellä alkukirjaimella.

Funktioteoria – suomalaista matematiikkaa

Suomen matematiikan kansainvälisenä tavaramerkkinä oli pitkään *funktioteoria*. "Arviointipaneelimme" nimistä funktioteoreetikkoja on epäilemättä *Felix Iversen* (1887–1973), jonka tieteellinen tuotanto ei ole kovin laaja, mutta jonka analyyttisten funktioiden asymptoottisia arvoja koskeva tulos omaa pysyvää arvoa. Iversen oli vakaumuksellinen pasifisti, ja hänen toimintansa tämä puoli tuotti harvinaislaatuisen tunnustuksen. 1950-luvun alussa Iversen sai vastaanottaa ns. Stalinin palkinnon.

Suomen funktioteorian suurmies on *Rolf Nevanlinna*[5] (1895–1980), Ernst Lindelöfin oppilas. Rolf Nevanlinna kehitti – paljolti yhdessä veljensä *Frithiofin* (1894–1977) kanssa – analyyttisten funktioiden kasvua koskevan teorian olennaisesti yleisemmäksi ja tarkemmaksi meromorfifunktioiden arvojenjakautumisopiksi. Nevanlinnan keskeiset työt ilmestyivät 1920-luvun puolivälissä. Nevanlinnan ideoita on sittemmin yleistetty eri tavoin, ja funktioteorian kansainvälisissä jaotteluissa arvojenjakautumisoppi tai sille lähes synonyyminen *Nevanlinnan teoria* on edelleen tärkeä ja aktiivinen tutkimuskohde.

Nevanlinnan aikalaisen *Pekka Myrbergin* (1892–1976) maininnat kansainvälisillä listoilla eivät niinkään perustu hänen sinänsä ansiokkaisiin töihinsä vuosisadan vaihteen molemmin puolin ajankohtaisen automorfifunktioiden teorian alalla, vaan hänen itsensä hiukan sivutuotteina pitämiinsä toisen asteen polynomien iterointia koskeviin töihinsä, joita hän julkaisi 1950-luvulla ollessaan vahvasti hallintotehtävien kuormittamana. Myrbergin työt ennakoivat parina viime vuosikymmenenä kovasti muodissa ollutta fraktaalien teoriaa. – Myrberg oli nopea: hän sai tiedon saksalaisen Jablonowski-seuran julistamasta nelivuotisesta kilpailusta viimeisen kilpailuvuoden aikana vuonna 1922 ja voitti kilpailun. Göttingenissä vieraillessaan hän kuului järjestäneen matematiikoille 100 m juoksukilpailun, jonka hän myös itse voitti.

Matematiikka ei välttämättä periydy isältä pojalle, kuten Lindelöfien tapauksessa, mutta kylläkin opettajalta oppilaalle. Rolf Nevanlinna oli Ernst Lindelöfin tohtorioppilas, ja Rolf Nevanlinnan ensimmäinen ja merkittävin tohtorioppilas oli *Lars Ahlfors* (1907–1996). Ahlfors löi itsensä läpi varsin nuorena ratkaistuaan hämmästyttävän lyhyessä ajassa ranskalaisen *Arnaud Denjoyn* (1884–1974) esittämän pitkään avoinna olleen ongelman. Ahlfors kilpailee Nevanlinnan kanssa kansainvälisesti tunnetuimman suomalaismatemaatikon asemasta. Hän oli vuodesta 1946 Harvardin yliopiston matematiikan professori – seikka joka tuntui unohtuneen vuoden 2000 keväällä Harvardia päivänkohtaisten syiden vuoksi esitelleiltä journalisteilta[6]. Ahlfors tullaan muistamaan monia funktioteorian puolia käsitelleiden tutkimusten ja suositun funktioteorian oppikirjan lisäksi ensimmäisenä *Fieldsin mitalin* saajana. Tätä matematiikkojen piirissä Nobelin palkinnon tavoin arvostettavaa tunnustusta on jaettu vuodesta 1936 alkaen joka neljäs vuosi yleensä kahdelle alle 40-vuotiaalle matemaatikolle. Lars Ahlfors on ainoa palkinnon saanut suomalainen.

Funktioteorian piiriin liittyy myös *Leo Sarion* (1916–2009), *Olli Lehdon* (s. 1925), *K. I. Virtasen* (1921–2006) ja huomattavasti nuorempaan ikäpolveen kuuluvan *Juha Heinosen* (1960–2007) työ. Pitkään Kalifornian yliopistossa vaikuttaneen Sarion tutkimusten pääkohteena olivat Riemannin pinnat. Lehdon ja Virtasen vuonna 1965 saksankielisenä ilmestynyt kvasikonformikuvauksia käsitellyt monografia oli pitkään tämän funktioteorian osa-alueen perusteos. Olli Lehto on myös ollut merkittävä hallintomies, Helsingin yliopiston rehtori ja kansleri, ja näkyvä vaikuttaja matemaatikkojen kansainvälisissä organisaatioissa. Helsingissä vuonna 1978 pidetty Kansainvälinen matemaatikkokongressi, aikanaan suurin Suomessa pidetty kansainvälinen tieteellinen tapahtuma, oli olennaisesti Olli Lehdon aikaansaannosta.

[5] Myös Nevanlinnasta löytyy Olli Lehdon kirjoittama elämäkerta *Korkeat maailmat* (Otava 2001).

[6] Tuolloin tasavallan presidentin vaalissa toiselle sijalle tullut *Esko Aho* poistui Suomesta opiskelemaan Harvardiin ja esimerkiksi Suomen Kuvalehti kirjoitti laajan artikkelin suomalaisista Harvardissa. Lars Ahlforsia ei mainittu ollenkaan.

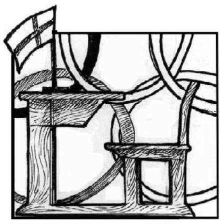
Soveltajia ja lukuteoreetikkoja

Kaikki listoillemme päässeet suomalaiset eivät toki ole funktioteoreetikkoja. Ahlforsin tapaan myös *Karl V. Sundman* (1873–1949) saavutti myös kansainvälisen maineensa kuuluisaan ongelmaan liittyvillä töillä. Kyse oli tähtitieteestä, taivaanmekaniikasta. Newtonin lakien perusteella ei ole kovin vaikeaa laskea täsmällisesti kahden toisiinsa painovoimalla vaikuttavan taivaankappaleen radat, mutta asia mutkistuu olennaisesti heti, kun mukaan otetaan kolmas kappale. Sundman pystyi esittämään tälle *kolmen kappaleen ongelmalle*, jota mm. 1900-luvun taitteen etevimpiin matemaatikkoihin kuulunut *Henri Poincaré* (1854–1912) oli suuremmatta menestyksettä yrittänyt ratkaista, suppeneviin sarjoihin pohjautuvan ratkaisun. Sundman esitti myös jo 1910-luvulla suunnitelmia tähtitieteellisiä laskuja suorittavasta analogisesta tietokoneesta.

E. J. Nyström (1895–1960) oli Teknillisen korkeakoulun professori, jonka monet insinööripolvet muistavat deskriptiivisen geometrian opetuksesta ja lempinimestä Tonttu. Nyströmin maininta kansainvälisillä listoillamme perustuu kuitenkin hänen oivallukseensa numeerisen analyysin piirissä. Nyströmin algoritmi differentiaaliyhtälön numeeriseksi ratkaisemiseksi on hämmästyttävän yksinkertainen ja silti tarkka – sen ainoa puute on approksimaatioratkaisun ensimmäinen askel, joka on laskettava muusta algoritmista poikkeavalla tavalla.

Turkulainen *Kustaa Inkeri* (1908–1996) oli lukuteoreetikko. Hän on listoilla töiden vuoksi, jotka liittyvät hiljattain lopullisen ratkaisun saaneeseen kuuluisaan Fermat'n hypoteesiin. Inkeri laajensi aikanaan olennaisesti sitä aluetta, josta ainakaan Fermat'n hypoteesin yhtälön ratkaisuja ei voi löytää. Turun yliopistossa ovat työskennelleet myös listoillemme nousseet lukuteoreetikko *Matti Jutila* (s. 1943) ja koodausteorian tutkija *Aimo Tietäväinen* (s. 1937).

Suomi on ollut maantieteellisesti ja henkisesti syrjäinen. On varsin ymmärrettävää, että suomalaisten osuus tämän kirjoituksen pohjana olleissa hakemistoissa on varsin vähäinen. Tilastollisesti on odotettavissa, että aivan ensimmäisen suuruusluokan matemaattisia tähtiä ei ole Suomessa syttynyt. Norjalaisilla on *Niels Henrik Abel*, ruotsalaisilla ehkä muutama korkeammalle arvostuva tutkija, mutta Suomen matematiikkakin on hyvin puolustanut paikkaansa, kuten Ernst Lindelöf kuului sanoneen hyvää työtä kiittäessään.



Matematiikan valitsemisen vaikeudesta

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Professori Maija Aksela analysoi kirjoituksessaan [1] matematiikan ja luonnontieteiden asemaa peruskoulussa ja lukiossa. Hän esittää huolensa näiden oppiaineiden asemasta tulevissa tuntijakoratkaisuissa, ja erityisesti matematiikan osaajien vähäisestä määrästä. Lukion pitkän matematiikan yo-kokeeseen osallistuvien lukumäärä onkin jäänyt kauas tavoitteista. Vuosittain sen kirjoittaa noin 12000 kokelasta, ja näistä kolmisen tuhatta ymmärtää jotakin kirjoittamastaan. Yksin Aalto-yliopisto ottaa tuon määrän opiskelijoita. Todellisista osaajista on siis huutava puute kaikissa yliopistoissa ja korkeakouluissa. Miten tähän tilanteeseen on tultu? Eikö kansainvälistä arvonantoa nauttiva yleissivistävä koululaitoksemme olekaan tehtäviensä tasalla? Tuleeko asiaan parannusta uusien tuntijakojen ja opetussuunnitelmien myötä? Tiedostavatko päättäjät ongelman todellisen syvyyden?

Aksela ei puutu ongelman varsinaiseen ytimeen, eli siihen, että matematiikan kouluopiskelu on keskittynyt kokonaan lukioon. Peruskoulussa opiskellaan matematiikan nimellä pelkkää laskentoa. Esimerkiksi Pythagoraan lause annetaan ilman perustelua laskukaavana, jota sovelletaan vain numeerisilla arvoilla laskinta käyttäen. Matemaattisen ajattelun oppimisen kannalta tärkeintä olisi kuitenkin pohtia, miksi tämä kaava toimii. Vastaavia esimerkkejä on lukemattomia. Yläkoulussa oppilaat saavat vääristyneen kuvan matematiikasta, kun lähes mitään ei yritetäkään perustella. Tällainen epä-älyllisyys ei voi herättää lahjakkaan oppilaan kiinnostusta alaa kohtaan, ja näin jää kolme vuotta parasta oppimisaikaa käyttämättä. Seuraus on, että lukion pitkän matematiikan opiskelun aloittaa yläkoulusta kiitettävin arvosanoin tulevia oppilaita, joille kaikki osoita-sanalla alkavat tehtävät ovat käsittämättömiä, ja joille jopa perusalgebra laskutoimitusten suoritusjärjestyksestä alkaen on tuntematonta. On selvää, että tavallinen yleislahjakaskaan oppilas ei lukiossa 2,5 vuoden aikana kykene paikkaamaan tällaista osaamisvajetta ja opiskelemaan samalla vielä laajempaa oppimäärää kuin mihin vanhan oppikoulun aikana pääsykokein valittu ikäluokan parhaimmisto sai käyttää 5,5 vuotta.

Matematiikan oppiminen on älytauluista ja muista teknisistä vimpaimista huolimatta edelleen henkilökohtaista vaivannäköä vaativaa kovaa työtä. Mitään oikotietä siihen ei ole. Varsinkaan ei ole varaa pitää kolmea välivuotta yläkouluiässä. Koko ikäluokka ei luonnollisestikaan pysty oppimaan algebran alkeita ja deduktiivista geometriaa. Siksi opetus on eriytettävä niin, että keskittymishäiriöiset ja muut oppimaan kykenemättömät opiskelevat ehkä vielä nykyisestäkin kevennettyä kansalaistaito-pisa-matematiikkaa ja muut algebraa ja geometriaa samaan tyyliin kuin entisessä keskikoulussa ja peruskoulussakin vielä tasokurssien aikaan. Eriyttämisen voisi suorittaa seiskaluokalla syyslukukauden aikana toteutettavan valtakunnallisten koesarjan perusteella.

Peruskoulun alkuperäinen tehtävä oli taata kaikille taloudellisesta asemasta riippumatta mahdollisuus koulutukseen. Tämä tavoite on toteutunut hyvin, mutta todellinen koulutuksellinen tasa-arvo saavutetaan vasta sitten, kun kaikille taataan edellytyksiensä mukainen koulutus. Viimeksi mainitun voi sisällyttää osaksi sivistysvaltion määritelmää.

Viitteet

[1] Maija Aksela, *Liian harva valitsee matematiikan*, Suomen Kuvalehti 50/2010.

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmaan kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

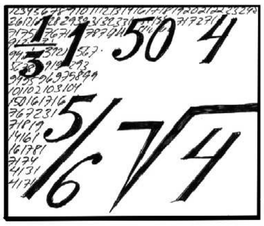
Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra



Kahdeksan tehtävää peruskoululaisille

Matemaattisten aineiden opettajien liiton Peruskoulun matematiikkakilpailun ensimmäinen kierros

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Matemaattisten aineiden opettajien liitto MAOLin vuotuiset koululaiskilpailut ovat kaksikierroksisia. Lukuvuoden 2010–11 alkukilpailut pidettiin kouluissa marraskuun alussa. Kilpailuja on kaksi, peruskoulun ja lukion, ja lukion kilpailu käydään kolmessa sarjassa. Sarjat perustuvat kilpailijoiden ikään, mutta halutessaan voi kilpailla omaa ikää vanhempienkin sarjassa. Peruskoulukilpailun osallistujat ovat yleensä yhdeksäsluokkalaisia. Tässä kirjoituksessa esitellään Peruskoulun matematiikkakilpailun alkukierroksen tehtävät ja yritetään myös ratkaista niitä. Kirjoittaja ei ole itse ollut tekemisissä tehtävien laadinnan tai tulosten arvioinnin kanssa, joten esitetyt ratkaisuehdotukset ovat luonteeltaan epävirallisia.

Peruskoulukilpailussa oli kahdeksan tehtävää. Ratkaisemiseen oli aikaa vain 50 minuuttia. Kilpailuun osallistui noin 13000 oppilasta. Pisteitä oli jaossa 48. Parhaat pisteet, 45, sai Urjalan Huhdin koulun *Jenna Koivu*. Sadan parhaan joukkoon pääsi pistemäärällä 29 eli noin viiden tehtävän ratkaisemisella.

Kilpailu alkoi perinteisellä kellon osoittimien välistä kulmaa koskevalla tehtävällä.

1. *Kuinka suuri on kellon viisarien välinen kulma, kun kello on a) 8.00, b) 12.45?*

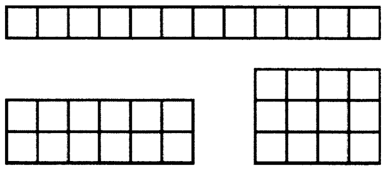
Kun tuntiosoitin kiertää kellotaulun 360° 12 tunnissa, niin yhdessä tunnissa se kiertyy 30°. Kello 8.00 minuuttiosoitin osoittaa kohti 12:ta ja tuntiosoittimella olisi neljä 30° jaksoa minuuttiosoittimen luo: a-kohdassa vastaus on siis 120°. Kello 12.45 minuuttiosoitin osoittaa kohti yhdeksää, joten sen ja kello 12:n suunnan välinen kulma on 90°. Tuntiosoitin on kuitenkin siirtynyt 3/4 12:n ja yhden välisestä kulmasta eli $\frac{3}{4}\cdot 30^\circ = 22{,}5^\circ$. Osoittimien välissä on siis kulmaa $112{,}5^\circ = 112^\circ\, 30'$.

Toisessa kilpailutehtävässä oli pääteltävä kahden joukon yhteisen osan eli leikkausjoukon koko, kun osajoukkojen ja joukkojen yhdisteen komplementtijoukon koot tunnettiin.

2. *Koululaisten harrastuksia tutkittiin. Viidenkymmenen koululaisen joukosta 33 koululaista harrasti jääkiekkoa, 24 koululaista harrasti sählyä ja 8 koululaista ei harrastanut jääkiekkoa eikä sählyä. Kuinka moni koululainen harrasti sekä jääkiekkoa että sählyä?*

Vastaus selviää, kun ensin huomataan, että vähintään jommankumman lajin harrastajia oli $50 - 8 = 42$. Kun tästä vähennetään 24, saadaan pelkän jääkiekon harrastajien lukumäärä 18. Kun jääkiekkoilijoita oli kaikkiaan 33, on sekä jääkiekkoa että sählyä harrastavia $33 - 18 = 15$. Varmuuden vuoksi voi vielä laskea vain sählyä harrastavien määräksi $42 - 33 = 9$ ja sählyn ohella jääkiekkoakin pelaavien määrän $24 - 9 = 15$.

Kolmanteen tehtävään liittyi kuvio. Kysymys oli kuitenkin oikeastaan kokonaislukujen ominaisuuksista. Sama idea oli taustalla, kun vuonna 1974 ryhdyttiin lähettämään avaruuteen ns. *Arecibo*-radiosignaalia, joka koostui 1679:stä eli $73 \cdot 23$ merkistä, jotka signaalin oletetun vastaajan toivottiin ymmärtävän suorakulmioksi.

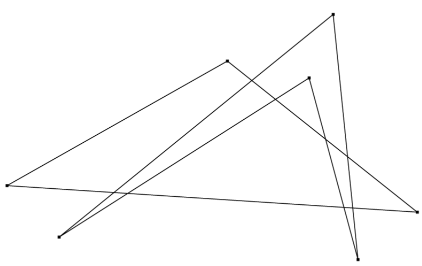


3. *Kahdestatoista pienestä neliöstä voidaan muodostaa kolme suorakulmiota. Kuinka monta suorakulmiota voidaan muodostaa 196 pienestä neliöstä? Ilmoita suorakulmioiden mitat.*

Jos neliöt ovat p:ssä rivissä ja q:ssa sarakkeessa, niin pq on neliöiden lukumäärä. Se, että 12 neliöstä saadaan kolme erilaista suorakaidetta johtuu siitä, että $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$; muita tapoja lausua 12 muodossa pq, $p \leq q$, ei ole. Nyt $196 = 4 \cdot 49 = 2^2 \cdot 7^2$. Jos $196 = pq$, $p \leq q$ ja p ja q ovat positiivisia kokonaislukuja, niin seuraavat viisi paria (p, q) ovat mahdollisia: $(1, 196)$, $(2, 98)$, $(4, 49)$, $(7, 28)$, $(14, 14)$. Suorakulmion korkeus on kunkin parin edellinen luku ja leveys jälkimmäinen (jos suorakaiteet ajatellaan asetetuksi samalla tavoin kuin mallikuvassa).

Seuraava tehtävä vaati jonkin verran oivallusta. Voi olettaa, etä nopealta vastaajalta saattaisi jäädä muutama tapaus huomaamatta.

4. *Kuinka monta yhteistä pistettä kolmion ja nelikulmion reunaviivoilla voi olla? Piirrä mallikuva jokaisesta tapauksesta.*



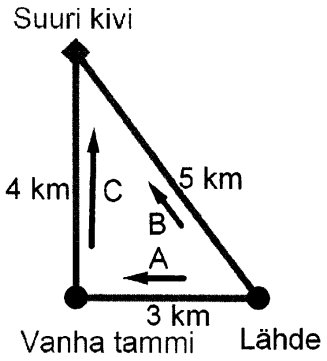
Jos hyvin käy, kolmion ja neliön jokin sivu sattuvat ainakin osaksi päällekkäin. Tällöin yhteisiä pisteitä on äärettömän monta: niinhän janalla aina on (jos janalla olisi vain äärellinen määrä pisteitä, niin jotkin kaksi olisivat vierekkäin ja muodostaisivat janan päätepisteet; tällä janalla olisi sitten uusia pisteitä). Jos nelikulmion ja kolmion mitkään sivut eivät ole samalla suoralla, niin jokaisella neliön sivulla on enintään kaksi yhteistä pistettä kolmion sivujen kanssa. Suorahan ei pysty kolmion kaikkia kolmea sivua leikkaamaan. Niinpä neliön ja kolmion piireillä voi tässä tilanteessa olla enintään kahdeksan yhteistä pistettä. Sopivanmuotoisen, ei kuitenkaan kuperan nelikulmion avulla voi osoittaa, että kahdeksaan pisteeseen todella pääsee. Kun tästä tilanteesta lähtee ja nelikulmiota sopivasti liikuttaa, ensin niin, että yksi nelikulmion kärki osuu kolmion sivuun jne., näkee helposti, että yhteisiä pisteitä voi olla n kappaletta, missä n saa kaikki arvot 0:sta 8:aan. Erilaisia mallikuvioita saa siis piirtää kaikkiaan 10 kappaletta.

Kilpailun viides tehtävä käsitteli suuria lukuja ja laatumuunnoksia. Tehtävän aihe oli saatu edellisen kevään uutistapahtumasta, Eyjafjallajökull-jäätikön tulivuorenpurkauksen seurauksista, ja a- ja b-kohtien vastausten erihenkisyyden voi ajatella osoittavan kauniisti yksi- ja kaksiulotteisuuden eroa.

5. *Viime keväänä islantilainen tulivuori sekoitti Euroopan lentoliikenteen. Tuhkaa nousi ilmaan noin sata miljoonaa kuutiometriä. a) Kuvitellaan tuhka 2 metriä paksuksi kerrokseksi moottoritielle. Tien leveys on 50 metriä. Kuinka monta kilometriä pitkälle matkalle tuhkaa riittäisi? b) Euroopan maa-ala on noin 10 miljoonaa neliökilometriä. Kuinka paksu tuhkakerros olisi, jos tuhka olisi levinnyt tasaisesti tälle alueelle? c) Maailman suurimmat konttialukset kuljettavat noin* 10 000 *konttia kerrallaan. Kolmeen konttiin mahtuu yhteensä 100 kuutiometriä tavaraa. Kuinka monta tällaista laivaa olisi tarvittu tuhkamäärän kuljettamiseksi Islannista?*

a-kohdan luvut ovat mukavia. Metrillä moottoritietä olisi juuri 100 m^2 tuhkaa, joten koko tilavuus 10^8 m^3 vaatisi 10^6 metriä eli 1000 km tietä. Suomessa on vähän alle 800 km moottoriteitä. b-kohdassa on otettava huomioon, että kilometri on 1000 metriä, joten neliökilometri koostuu miljoonasta neliömetristä. Euroopan alan approksimaatio on siis $10^7 \cdot 10^6 = 10^{13}$ neliömetriä. Tasan Euroopan yli levitettynä 10^8 m^3 olisi siis $10^{8-13} = 10^{-5}$ m paksu. Kun millimetri on 10^{-3} metriä, niin millimetreissä paksuus olisi $10^{-2} =$ 0,01. c-kohdan konttialus kuljettaisi $100 \cdot 10000/3 = 10^6/3$ kuutiometriä. Tarvittavien alusten määrä olisi siis $10^8/(10^6/3) = 300$. – Tuhkakuutiometrin massaa ei ilmoiteta. Jos tuhka on kiviaineksen tapaan selvästi vettä raskaampaa, niin voi olla epäselvää, pysyykö tuhkaa täyteen lastattu alus kunnolla pinnalla.

Seuraava tehtävä on melko tavanomainen nopeus- ja matkalasku. Fysiikan opetukseen piintynyt pedanttisuus lienee tuonut tehtävän konkreettisuuteen jotenkin huonosti istuvan vauhti-sanan.

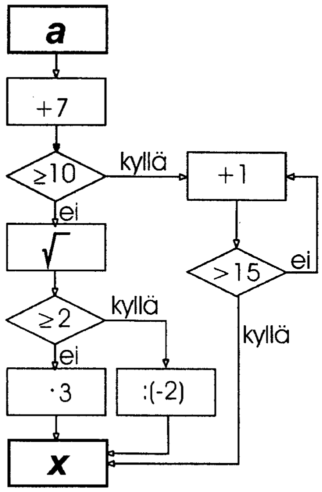


6. *Kolme vaeltajaa kulkee samaa kolmionmuotoista reittiä. Anna ja Bella kävelevät samalla vauhdilla, mutta Claran vauhti on kaksi kertaa niin suuri kuin heidän. Anna ja Bella lähtevät lähteen luota kello 10 vastakkaisiin suuntiin. Clara lähtee vanhan tammen luota kello 11 samalla hetkellä, kun Anna ohittaa tammen ensimmäistä kertaa. Milloin Clara ja Bella kohtaavat ensi kerran?*

Kuvion mukaan Bellalla on kello 11 matkaa vanhalle tammelle 6 km. Koska Claran nopeus on kaksi kertaa Bellan nopeus, he kohtaavat, kun Clara on kävellyt 4 km ja Bella 2 km, eli juuri suuren kiven luona. Kun Bellan nopeus on 3 km/t, niin aikaa kello 11:stä oli kulunut 2/3 tuntia eli 40 min. Kello oli siis 11.40.

Toiseksi viimeisessä tehtävässä oli kulkukaavio, joka kuvasi aika erikoista algoritmia. Vastauskaan ei ole kovin yksinkertainen.

7. *Lähde kohdasta* **a**. *Kulje nuolten suuntaan. Tee merkitty laskutoimitus tai jatka ehdon määräämään suuntaan. a) Mikä luku on* **x**. *jos* $\mathbf{a} = -6$*? b) Mikä luku on* **x**, *jos* $\mathbf{a} = \frac{1}{9}$*? c) Mitkä positiiviset luvut* **a** *antavat kaikki saman tuloksen* **x**?



a- ja b-kohdissa voi tehdä laskut kulkukaavion mukaan. Siis $-6 \to -6+7 = 1 \to \sqrt{1} \to 3 \cdot 1 = 3$ ja $\frac{1}{9} \to \frac{1}{9} + 7 = \frac{64}{9} \to \frac{8}{3} \to -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$. c-kohdan kysymys on jossain määrin epämääräinen. Kilpailun järjestäjien julkaisemista ratkaisuista päätellen tarkoitus oli etsiä sellaisia eri lukuja $\mathbf{a} = a$, joihin sovellettuna algoritmi tuottaa saman luvun $\mathbf{x} = x$. Kun tehtävässä kuitenkin esiintyy parametri x ja tuntematon a, niin tehtävän normaali ensisijainen lukutapa voisi pelkistettynä olla "mitkä luvut $a > 0$ ovat sellaisia, että algoritmi tuottaa tulokseksi luvun $= x$?", siis x annettu suure ja a x:stä riippuva, ei välttämättä yksikäsitteinen ratkaisu. Jos $0 < a < 3$, algoritmin ensimmäinen haarautumiskohta johtaa vasemmanpuoleiseen tiehen, ja koska $a + 7 > 2$, toinen haarautumiskohta johtaa oikealle. Lopputuloksena on siis $x = -\frac{1}{2}\sqrt{a+7}$. Tämä merkitsee sitä, että $a = 4x^2 - 7$ ja koska $0 < a < 3$, ratkaisuja saadaan vain, kun $7 < 4x^2 < 10$ eli kun $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < -\frac{1}{2}\sqrt{7}$. Jos taas $a \geq 3$, ensimmäinen ehto johtaa oikeanpuoleiselle reitille. Oikeanpuoleisen reitin tuottama x on aina > 15. Kun $x \leq 15$, ratkaisua a ei ole. Algoritmin oikeassa haarassa oleva silmukka aktivoituu vain, jos ehdossa testattava luku on ≤ 15. Jos $x > 16$, silmukkaa ei ole kierretty, ja siis $x = a + 8$ eli $a = x - 8$. Jos $15 < x < 16$, niin silmukkaa on kierretty 0, 1, 2, 3 tai 4 kertaa, eli $x = a + 8, a + 9, a + 10, a + 11$ tai $a + 12$. Jos viimein $x = 16$, silmukka on voitu kiertää viisikin kertaa, ja mahdolliset a:n arvot ovat 3, 4, 5, 6, 7 ja 8. – Edellä sanottu sisältää ratkaisun myös tehtävän toiseen tulkintaan. Koska kaikkiin ehdon $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < -\frac{1}{2}\sqrt{7}$ ja kaikkiin ehdon $x > 16$ toteuttaviin lukuihin x liittyy tasan yksi a, edellisiin $a < 3$, jälkimmäisiin $a > 8$, ja kun ehdon $15 < x \leq 16$ toteuttaviin lukuihin liittyy ehdon $3 \leq a \leq 8$ toteuttava a, niin tilanne, jossa useampi kuin yksi a johtaa samaan x:ään, esiintyy silloin, kun joko a on jokin luvuista 3, 4, 5, 6, 7, 8 tai a on jokin luvuista a', $a' + 1$, $a' + 2$, $a' + 3$ ja $a' + 4$, missä a' on jokin ehdon $3 < a' < 4$ toteuttava luku.

Kilpailun viimeisen tehtävän innoittajana oli ollut verohallinnon nettisivuilta löytynyt kömmähdys. Verottajalle on itse kukin varmaan mielellään vahingoniloinen. Tehtävään lainattua jaksoa ei kuitenkaan enää 31.12.2010 löytynyt verohallinnon ohjeistuksesta, mutta googletus osoitti, että sangen monet tilitoimistot olivat sen kritiikittä kopioineet ja yhä pitivät sitä esillä asiakkaidensa tarpeita palvelemassa.

8. *Verohallinnon verkkosivulla oli 13.7.2010 seuraava ohje arvonlisäveron laskemiseksi tuotteen verollisesta hinnasta: "Tuotteen hintaan sisältyvä arvonlisäveron määrä selviää käyttämällä laskukaavaa:* **verollinen hinta x sovellettava verokanta/100 + sovellettava verokanta.** *Esimerkki: Tuotteen verollinen hinta on 5 000 euroa ja siihen sovelletaan nor-*

maalia 22 %:n verokantaa. Vero saadaan laskemalla $5\,000 \times 22/122 = 901{,}64$ *euroa. Tuotteen veroton hinta on* $5\,000 - 901{,}64 = 4\,098{,}36$ *euroa."*

a) Kirjoita lihavoitu ohje yhtälönmuotoisena laskukaavana käyttäen seuraavia muuttujannimiä: a = arvonlisävero, v = verollinen hinta, k = sovellettava verokanta. b) Mikä on veron suuruus täsmälleen ohjeen mukaan laskettuna? c) Kirjoita edellä kirjoittamasi kaava sillä tavalla korjattuna, että siitä saadaan arvonlisäverolle esimerkissä ilmoitettu oikea tulos.

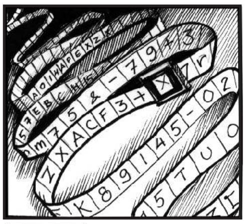
Lihavoitu laskukaava annetuin symbolein on $a = \frac{vk}{100} + k$. Kaavahan on mieletön, koska siinä yritetään laskea yhteen laadullista suuretta v, euroja, ja laadutonta verokantaa k. b-kohtaan ei siis voi antaa vastausta, veron suuruutta ei voi kaavan perusteella laskea ollenkaan (ellei jollain tavalla päätä prosenttien ja eurojen vaihtosuhdetta). Kaavan oikea asu perustuu siihen, että verokantaa sovelletaan tuotteen tai palvelun verottomaan hintaan v'; vero on $a = \frac{k}{100}v'$. Toisaalta $v = v' + a = \left(1 + \frac{k}{100}\right)v' = \left(\frac{100+k}{100}\right)v'$. Tästä seuraa, että $v' = \frac{100}{100+k}v$ ja viimein $a = \frac{kv}{100+k} = vk/(100+k)$. Verohallinnon tekstinlaatijalta olivat siis unohtuneet sulkeet; olisi pitänyt kirjoittaa "verollinen hinta x sovellettava verokanta/(100 + sovellettava verokanta)" tai olisi pitänyt käyttää vaakasuoraa jakoviivaa.

Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I – V tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Katso myös kirjoitus lehdestä Solmu 3/2010.



Riittääkö lämmitysöljy

Heikki Apiola
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Ongelma

Vaimoni sisaren *Paulan* mies *Esa Jokinen* lähestyi minua vuoden viimeisinä päivinä ajankohtaisella kirjeellä näin lumisena pakkastalvena:

Pieni pähkinä purtavaksi:

Yrjöllä[1] oli aikoinaan taulukko, jossa kerrottiin sentti kerrallaan, kuinka paljon öljysäiliössämme oli öljyä. Se on kuitenkin jo autuaasti hukattu.
Kyseessä on makuulla oleva lieriö (oletus), jonka tilavuus on 4000 litraa. En tiedä leveyttä, pituutta enkä korkeutta. Öljyn tulo polttimeen loppuu, kun öljyn pinta on 10 sentin korkeudella lieriön pohjasta. Arvelen sen johtuvan siitä, että näin sakkaa ei joudu polttimeen saakka.
Saimme tänään 3000 litraa öljyä. Täytön jälkeen öljyn pinta oli 95 sentin korkeudella säiliön pohjasta mitattuna eli 3000 litraa nosti öljyn pintaa 85 sentillä.
Pystyykö näillä tiedoilla tekemään likimääräistä taulukkoa, joka kertoisi, kuinka paljon öljyä on säiliössä kutakin senttiä kohden eli vaikka 57 senttiä 2000 litraa, 63 senttiä 2078
Huomautan, että tämä tehtävä on täysin vapaaehtoinen eikä siitä luistaminen vaikuta henkilökohtaiseen (Facebook)-kaveruuteemme.

Terv. Esa

Tehtävä on sikäli oikein sopiva koululaisten lehteen, että siinä tarvittava matematiikka on selkeästi koulumatematiikkaa.

[1] Edesmennyt appeni, matematiikan lehtori *Yrjö Repo*

Vaikka ongelman matemaattinen perusta on vaatimaton, se johtaa kuitenkin epätriviaaliin yhtälöön, jonka ratkaisu ei onnistu mielekkäästi ilman hyvää laskentavälineistöä. Samalla on tilaisuus pohdiskella ja havainnollistaa joitakin yleisiä periaatteita, jotka liittyvät toisaalta jatkuviin ja toisaalta derivoituviin funktioihin.

Käytän tilaisuutta hyväkseni esitelläkseni ratkaisun apuna symbolilaskentaohjelmaa MAPLE (`http://www.maplesoft.com`). Mainittakoon, että kirjoitin kauan sitten Solmuun laajan artikkelin otsikolla *Matemaattisten symbolien käsittelyä*:

`http://solmu.math.helsinki.fi/1999/5/apiola/`

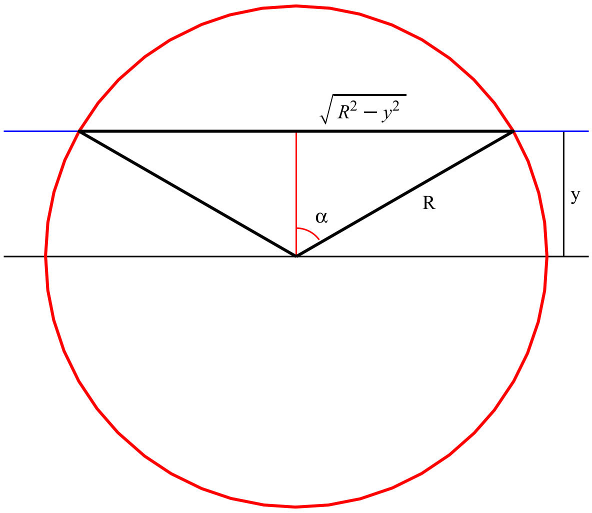
Siinä johdattelin tietokoneella tapahtuvan symbolisen laskennan perusteisiin niinikään MAPLE:n avulla. Hauska yhteensattuma on, että tuossa kirjoituksessa eräänä esimerkkinä oli makaava lieriö, sillä kertaa selvittelin, miten korkealla lieriö kelluu vedessä.

Tehtävän ratkaisussa on hyvästä symbolilaskentaohjelmasta suuri hyöty myös siksi, että sillä voidaan tuottaa dokumentti, joka näyttää laskennan tulokset oikeina matemaattisina kaavoina, grafiikan ja selitykset.

Toisaalta on hyvä mainita, että laskut voidaan kohtuullisella vaivalla, huolellisuudella ja ahkeruudella suorittaa myös käsin, kun apuna on ylioppilaskirjoituksissa hyväksyttävä graafinen laskin, kuten `TI-84`. Asian demonstroi minulle armas vaimoni *Sisko Repo*, lähtien liikkeelle Maple-avusteisesti sieventämästäni yhtälöstä.

Ratkaisu, kun säiliön mitat tunnetaan

Olkoon lieriön säde R ja pituus L. Tilavuuden laskentaa varten on vain selvitettävä maanpinnasta korkeudella h olevan vaakasuoran rajoittaman ympyrän segmentin ala, joka sitten kerrotaan pituudella L.



Asetetaan säiliön profiiliympyrän keskipiste origoon ja lausutaan ala $A(y)$ kuvaan merkityn $y-$koordinaatin avulla. Siis korkeus makaavan lieriön pohjalta: $h = R + y$.

Yläpuolelle jäävän ympyrän segmentin ala = keskuskulman 2α määräämän sektorin ala − keskuskolmion ala. Lausutaan kulmat radiaaneissa, jolloin kulma$=s/R$, missä s on vastaavan kaaren pituus. Täyskulma on siten 2π ja kulman 2α määräämän sektorin ala $= \frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2 = \alpha R^2$.

Niinpä yläpuolisen segmentin ala $= \alpha R^2 - y\sqrt{R^2 - y^2}$.

Alapuolisen segmentin ala on siis tämä vähennettynä koko ympyrän alasta.

Kysytty tilavuus voidaan nyt kirjoittaa muotoon:

$$V(y) = ((\pi - \alpha)R^2 + y\sqrt{R^2 - y^2})L. \tag{1}$$

Kaavassa pitää vielä kulma α lausua y:n ja R:n avulla:

$$\alpha = \arccos \frac{y}{R}, \tag{2}$$

eli kulma, jonka kosini on $\frac{y}{R}$. Toisin sanoen kyseessä on cos-funktion käänteisfunktio, tarkemmin sanottuna sen ns. *päähaara*. Laskimessa tämän merkkinä on yleensä $\cos^{-1}$.

Herää kysymys, mikä tässä nyt oli vaikeutena, paitsi ”ruumiillinen työ”, jos joudutaan taulukoimaan sentin välein.

Mutta mittojahan ei tunneta

Säiliö on maan sisällä, sitä on vaikea päästä mittaamaan. Ehkäpä säiliön ”manuaali” on hävinnyt samaan paikkaan kuin *Yrjö Revon* laatima mittatikku. No, tämä tekee tehtävästä astetta kiintoisamman. (Sanoisinko ”haastavamman”, mutta en sano.)

Tehtävänannossa on kaksi tietoa:

1. Säiliön tilavuus $= 4\ m^3$
2. ”Täytön jälkeen öljyn pinta oli 95 sentin korkeudella säiliön pohjasta mitattuna eli 3000 litraa nosti öljyn pintaa 85 sentillä.”

Jos merkitään $W(h)$:lla tilavuutta lausuttuna pohjasta mitatun korkeuden h avulla, jolloin $W(h) = V(h - R)$, saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} \pi R^2 L = 4 \\ W(0.95) = W(0.1) + 3 \end{cases}$$

Edellisestä sijoitetaan $L = \frac{4}{\pi R^2}$ jälkimmäiseen, joka V:n avulla ilmaistuna tulee

$$V(0.95 - R) = V(0.1 - R) + 3.$$

Kun tähän otetaan V:n kaava (1) ja vielä (2), saadaankin juhlallisen näköinen yhtälö:

$$\begin{aligned} &-\frac{4}{\pi}\arccos\left(\frac{0.95 - R}{R}\right) \\ &\quad + \frac{4\,(0.95 - R)}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - (0.95 - R)^2} \\ &= -\frac{4}{\pi}\arccos\left(\frac{0.1 - R}{R}\right) \\ &\quad + \frac{4\,(0.1 - R)}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - (0.1 - R)^2} + 3 \end{aligned}$$

Tämän yhtälön johtaminen on tarkkuutta ja ahkeruutta edellyttävä harjoitustehtävä lukijalle. Itse käytin hyväkseni koneellista lausekkeen käsittelijää, edellä mainittua MAPLE-ohjelmaa, liitän koko työn sisältävän laskenta-arkin mukaan:
`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/1/apiolaMaplews.pdf`

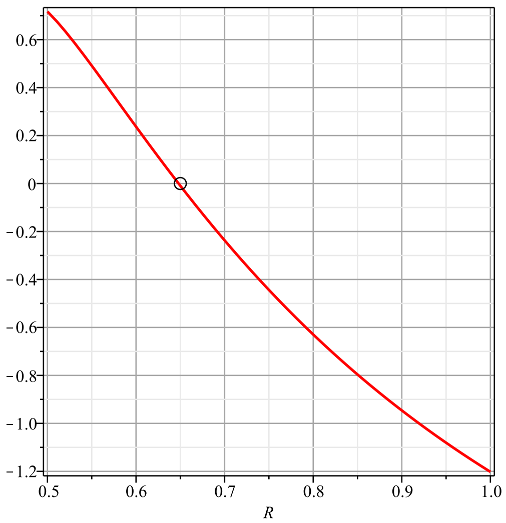
Täytyy sanoa, että työ sujui vain puoliautomaattisesti, osittain tarvittiin käsinlaskua. Vaikka symbolilaskentaohjelmien sievennyskyvyt ovat hämmästyttäviä, niitä ei ole aina helppo komentaa tekemään kaikkia sellaisia sievennyksiä, joilla ihminen haluaisi puuttua peliin. Joskus sieventäjä vie homman liian pitkälle, jolloin lopputulos ei olekaan ihmiselle miellyttävä. Toisaalta, kun jatkokäsittely tehdään ohjelmalla, ei ole aina niin tärkeää, että lauseke on ihmissilmän estetiikkaa parhaiten tyydyttävässä muodossa, johon tässä olen pyrkinyt. Todettakoon, että näin sievään asuun saatettu muoto oli tässä tarpeen vain kirjoituksen luettavuuden kannalta, itse ratkaisu saatiin varsin joutuisasti hiukan pitemmästä, automaattisesti sievennetystä muodosta, kuten liitteenä olevasta työarkista ilmenee.

Yhtälön ratkaiseminen

Jos katsellaan ratkaistavaa yhtälöä, niin epätoivo saattaa hiipiä hiuksiin. Tuntematon R esiintyy arccos-funktion sisällä ja ulkopuolella rationaalilausekkeissa ja lisäksi mukana on neliöjuuria R:n polynomeista. On selvää, että minkään niksien/(taika)temppujen avulla ei ole mahdollista saattaa tehtävää sellaiseen muotoon, josta ratkaisu voitaisiin "lukea", ts. tarkkaa analyyttista ratkaisua ei ole mahdollista johtaa.

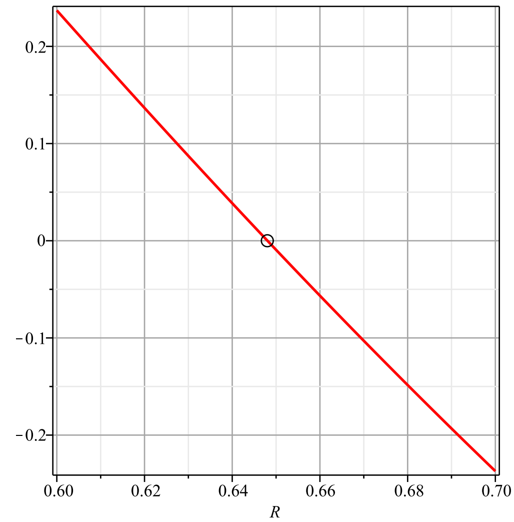
Toisaalta, jos siirretään kaikki samalle puolelle, kyseessä on jatkuvan funktion nollakohdan määräämistehtävä, koska arvo $R = 0$ suljetaan joka tapauksessa tarkastelualueesta pois. Jos löydetään väli, jonka päätepisteissä funktio saa erimerkkiset arvot, tiedetään jatkuvia funktioita koskevan perustuloksen, *Bolzanon lauseen* mukaan, että tällä välillä on nollakohta. Parhaiten ja havainnollisimmin asiaa voidaan tutkia piirtämällä kuvaaja järkevän tuntuisella R-välillä.

Maple-komennot jätän työarkilta luettaviksi, katsotaan tässä kuvat:



Yhtälön ratkaisun haarukointia

Silmämääräisesti arvioiden saadaan $R = 0.65$. Tarkennetaan valitsemalla R-väliksi [0.6,0.7].



Tarkennetaan haarukointia

Kuvasta voidaan lukea arvio $R = 0.648$. Jos haluttaisiin tarkentaa, voitaisiin jatkaa samalla tavoin. Kyseessä on itse asiassa ns. välin puolitusmenetelmän graafinen versio. Korkeatasoisena ja kattavana matemaattisena ohjelmistona Maple:ssa on myös tehokas epälineaaristen yhtälöiden ratkaisualgoritmi valmiiksi ohjelmoituna. Numeeriset ratkaisijat tarvitsevat syötteekseen ratkaistavan yhtälön lausekkeen lisäksi yleensä alkuarvauksen, jota lähdetään iteratiivisesti (tiettyä sääntöä toistaen) tarkentamaan. Alkuarvaus voidaan hyvin ottaa ensimmäisestä kuvasta (jotta ratkaisijakin pääsisi näyttämään kyntensä). Olkoot yhtälön eri puolet sijoitettu muuttujiin `vasen, oikea`. Kas tällä ratkaisukomennolla homma käy:

```
> fsolve(vasen-oikea,R=0.65);
                                    0.6480360777
```

Kun katsellaan kuvia, huomataan, että lähemmäs zoomatun kuvan käyrä näyttää miltei suoralta. Miksi näin mutkikkaan funktion kuvaaja muuttuu suoraksi? Kyseessä on derivoituvan funktion yleinen ominaisuus. Derivaattahan antaa funktion kuvaajalle lineaarisen approksimaation, joka on sitä tarkempi, mitä pienempi askel laskentapisteestä edetään. Tämä ilmiö on siis tunnusomainen kaikille derivoituville funktioille, kun katsotaan tilannetta tarpeeksi läheltä.

Ja nyt nautiskellaan

Tässä osuudessa näytän lyhyesti, minkälaisin komennoin ja niiden antamin tuloksin voitaisiin Maple-työssä edetä, kun lieriön mitat on saatu tietoon. Liitteenä olevassa Maple-työarkin

`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/1/apiolaMaplews.pdf`

pdf-tulosteessa näkyy oikeaoppisempi ja tarkemmin kommentoitu työskentelytapa koko tehtävää ajatellen.

Tässä esiintyvien komentojen vastineet lienee osaavan laskimen käyttäjän kohtuullisen helppo muuttaa laskintyöksi.

```
>tilavuus:=((Pi-alpha)*R^2+y*sqrt(R^2-y^2))*L;
```

$$\texttt{tilavuus} := \left((\pi - \alpha)\,R^2 + y\sqrt{R^2 - y^2}\right) L$$

```
> alpha:=arccos(y/R):
> L:=4/(Pi*R^2):
> V:=unapply(tilavuus,y);
```

$$V := y \mapsto \frac{4}{\pi\,R^2}\left(\left(\pi - \arccos\left(\frac{y}{R}\right)\right) R^2 + y\sqrt{R^2 - y^2}\right)$$

```
> askel:=0.1: H:=[seq(k*askel,k=0..13)];
    H := [0., .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7,
          .8, .9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3]
> R:=0.648:
> Y:=[seq(h-R,h=H)]:
> Varvot:=map(evalf@V,Y):
> transpose(matrix([H,Varvot]));
```

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1421293606 \\ 0.2 & 0.3920491354 \\ \vdots & \vdots \\ 1.2 & 3.866182207 \\ 1.3 & 4.0 + 0.001165442695\,i \end{bmatrix}$$

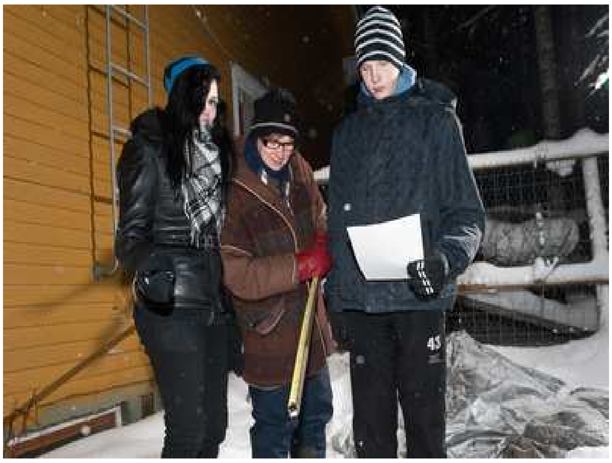
Kuriositeettina mainittakoon, että viimeinen taulukkopiste menee säiliön ulkopuolelle ($2\,R < 1.3$), taulukossa se ilmenee siten, että tilavuuden arvon imaginaariosa on nollasta poikkeava, siis "kompleksinen tilavuus".

Epilogi

Date: Sun, 16 Jan 2011 19:45:43 +0200 (EET) Subject: Re: Re: Öljytikku Solmuun

Heikki,
Ohessa kaksi tänään otettua kuvaa mittaustilanteesta. Voit hyvin kuvitella, kuinka keräännymme sunnuntai-iltaisin perheen yhteiseen iltahetkeen öljysäiliön äärelle. Ideana on se, että Pauliina näyttää valoa, Pami mittaa ja Jonttu vertaa mittaa sinun tekemääsi taulukkoon. Öljyn pinta oli 95 senttiä 29.12 nyt sitä on 82 senttiä, mikä lienee sinun taulukollasi noin 2600 litraa - sitä on siis kulunut reilussa kahdessa viikossa ihan mielettömästi - tosin kelitkin ovat olleet välillä todella kylmiä, viime yönä miinus 29. Vaihdamme lämmitysjärjestelmän ensi talveksi.

Terv. Esa



Öljynmittausta Tikkakosken talvi-illassa

Nähtiin taas, miten korvaamattomia työkaluja puhdas matematiikka tarjoaa jopa likaisten öljytehtävien ratkaisuun. Tässä tapauksessa matematiikan soveltaminen johti öljymittaustehtävän ratkaisun ohella myös perheen elämään olennaisesti vaikuttavan päätöksen syntyyn.

Viitteet

[1] http://solmu.math.helsinki.fi/2011/1/apiolaMaplews.pdf Kirjoitukseen liittyvä Maple-laskenta-arkki pdf-muodossa

[2] http://solmu.math.helsinki.fi/2011/1/apiolaMaplews.mw Kirjoitukseen liittyvä Maple-laskenta-arkki Maple-muodossa (luettavissa ja muokattavissa Maple-ohjelmalla)

[3] http://solmu.math.helsinki.fi/1999/5/apiola/ Matemaattista symbolien käsittelyä, kirjoitus Solmussa v. 1999

[4] http://www.maplesoft.com Maplen kotisivu

Matematiikkakilpailuvuosi 2010

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Matematiikkakilpailuvuoden päätapahtuman muodostavat kesällä pidettävät Kansainväliset matematiikkaolympialaiset. Ennen kuin olympialaisiin päästään, on kuitenkin joukkue valittava ja sitä on valmennettava.

Yksi valintaprosessin porras on Suomen kansallinen matematiikkakilpailu. Sitä pyörittää Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL. Kilpailuja on oikeastaan kaksi, toinen peruskoululaisille ja toinen lukiolaisille. Molemmat ovat kaksiportaisia ja lukion kilpailu vielä alkukierroksen osalta kolmisarjainen. Kun lukiossa ei varsinaisesti ole luokka-asteita, alkukilpailun sarjajako perustuu kilpailijan ikään. Oman iän edellyttämää sarjaa ylempään sarjaan toki voi osallistua. Kaikista sarjoista voi edetä loppukilpailuun.

Kouluvuoden ja kalenterivuoden eritahtisuuden vuoksi alkukierros ja loppukilpailu sattuvat eri vuosille. Vuoden 2010 loppukilpailut pidettiin Helsingissä Munkkiniemen yhteiskoulussa 29.1. Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto on lanseerannut käsitteen *Neljän tieteen kisat*. Fysiikan ja kemian lukiokilpailut pidetään samalla kertaa matematiikan loppukilpailujen kanssa ja palkinnot jaetaan yhteisessä tilaisuudessa. Neljäs tiede on tietojenkäsittelytiede. Se kulkee omia polkujaan.

Tammikuisten matematiikkakilpailujen tehtäviä on esitelty Solmussa 2/2010. Lukion kilpailuun oli alkukilpailun kolmesta sarjasta valittu yhteensä 21 kilpailijaa. Kolmituntisen ja viisitehtäväisen kilpailun voittajaksi tuli Päivölän Opiston matematiikkalinjan oppilas **Kai Lindholm**. Toisen sijan jakoivat Meri-Porin lukion **Ilmari Kangasniemi** ja Helsingin matematiikkalukion **Aleksis Koski**. Helsingin matematiikkalukiossa kilpailumatematiikkaan tehdyt panostukset eivät ole menneet hukkaan: seuraavat kolme sijaa menivät kaikki koulun oppilaille **Topi Talvitielle**, **Olli Hirviniemelle** ja **Markus Puumalaiselle**. Kilpailun arvosteluraadin muodostivat Helsingin Ressun lukion lehtori **Hilkka Taavitsainen** ja Helsingin yliopiston dosentit **Kerkko Luosto** ja **Matti Lehtinen**.

Suomen matematiikkaolympiajoukkueen valinnassa toinen tärkeä askelma on *Pohjoismainen matematiikkakilpailu*. Pohjoismainen matematiikkakilpailu luotiin vuonna 1986. Ajatus oli tuolloin hiukan loiventaa Pohjoismaita matematiikkaolympialaisissa edustamaan pääsevien kohtaamaa shokkia, jonka aiheuttivat tehtävät, joiden vaikeustaso huimasti ylitti sen, mihin tässä maailmankolkassa muuten oli totuttu. Pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun kutsutaan jokaisesta viidestä Pohjoismaasta enintään 20 osallistujaa. Kun kilpailu liittyy kiinteästi Kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin valmistautumiseen, osallistujien valinta kussakin maassa on olympiavalmennusta järjestävän tahon käsissä. Suomessa tämä valmennusorganisaatio on Suomen Matemaattisen Yhdistyksen Valmennusjaosto. Sen ympärivuotinen valmennustoiminta nostaa esiin potentiaalisia olympiaedustajia, jotka eivät aina onnistu kunnostautumaan Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton kilpailussa – eihän mahdollisuutta osallistua kilpailuun edes kaikissa kouluissa tarjotakaan.

Pohjoismaiseen kilpailuun tuli lopulta 19 suomalaisosallistujaa, joista 13 oli myös osallistunut MAOLin lukion matematiikkakilpailun loppukilpailuun. Loput kuusi olivat tulleet valitsijoiden tietoon kunnostautumalla Valmennusjaoston Päivölän Opistossa järjestämissä viikonloppuvalmennustilaisuuksissa tai ratkaisemalla heille lähetettyjä kirjevalmennustehtäviä. Ja niin sitten kävi, että Pohjoismaiden parhaaksi 13. huhtikuuta kotiratakilpailuna eli osallistujien kouluissa pidetyssä nelituntisessa kokeessa selvisi Päivölän Opistossa opiskelut **Aleksi Korpinen**, joka ei ollut mukana MAOLin kilpailun loppukilpailussa. Korpinen sai ainoana kilpailijana täydet 20 pistettä ja voitti siten niukasti, yhdellä pisteellä, Tanskan **Mathias Knudsenin**. Korpisen ja Knudsenin jälkeen seuraavat kilpailijat jäivät jo 15 pisteeseen. Heitä oli neljä, kaikki eri maista. Yksi oli Suomen Aleksis Koski. Kilpailijoita oli kaikkiaan 82. Parempaan puolikkaaseen (joka tasapisteiden vuoksi ei ole ihan tarkka käsite) selvisi suomalaisista peräti 15. Tämä ei mitenkään johtunut siitä, että kilpailun kiertävä järjestelyvastuu oli vuonna 2010 Suomella. Tehtävät valitsi neljästä muusta osallistujamaasta saatujen ehdotuksien perusteella Kerkko Luoston ja Matti Lehtisen kahden hengen komitea. Se myös toimitti lopullisen arvostelun joka maassa tehdyn esiarvioinnin jälkeen. Kilpailun tulokset, tehtävät ja niiden ratkaisut löytyvät osoitteesta `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/PM/`.

Matematiikkaolympialaisjoukkue valitaan niin kuin muutkin urheilujoukkueet näyttöjen perusteella. Pohjoismaisen kilpailun, MAOLin kilpailun ja aikaisemman kilpailumenestyksen perusteella viimeisiä näyttöjä antamaan ja valmennusta olympialaisia varten saapuivat kutsuttuina Päivölän Opistoon toukokuun viimeiseksi viikoksi Helsingin matematiikkalukion Olli Hirviniemi, **Niko Ilomäki**, Aleksis Koski ja Topi Talvitie, Helsingin Ressun lukion **Jesse Jääsaari**, Meri-Porin lukion **Ilmari Kangasniemi**, Helsingin Saksalaisen koulun **Dimitri Kirichenko**, Päivölän Opiston Aleksi Korpinen ja Kai Lindholm, Paraisten lukion **Felix Sjöblom** ja Tapiolan Lukion **Arttu Voutilainen**. Heitä hiillostivat viikon aikana Valmennusjaoston aktiivit **Miika Nikula**, Kerkko Luosto, **Esa Vesalainen, Lauri Hallila** ja Matti Lehtinen sekä jaoston ulkomaalaisvahvistus **Alexey Kirichenko**. Aikanaan Leningradin Matematiikkaolympialaisten piirissä työskennellyt mutta nyt Suomessa toimiva Kirichenko toi mukanaan arvokkaita kokemuksiaan todella huipputason matematiikkakilpailun ja valmennuksen piiristä.

Valmennusviikon aikana järjestettiin neljä harjoituskokeen nimellä kulkenutta valintaan vaikuttavaa koetta. Niiden tulokset eivät tietenkään olleet kovin yhdensuuntaisia, joten joukkueen valinta tuotti melkoisesti päänvaivaa. Valmentajat pääsivät kuitenkin yksimielisyyteen siitä, että Suomea edustaisivat kesän Kansainvälisissä Matematiikkaolympialaisissa Olli Hirviniemi, Ilmari Kangasniemi, Dimitri Kirichenko, Aleksis Koski, Aleksi Korpinen ja Topi Talvitie.

Matematiikkaolympialaisten pitopaikka oli Suomesta katsoen jokseenkin eksoottinen, nimittäin Kazakstanin pääkaupunki Astana tai oikeastaan sen lähettyvillä oleva Baldauren-niminen kurssikeskus.

Joukkueen matka Kazakstaniin kulki mutkan kautta. Tanskassa oli syntynyt ajatus jatkaa Pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun liittyvää ajatusta valmistaa kaikkien Pohjoismaiden kilpailijoita tulevaan. Tanskan Sorøssä lähellä Kööpenhaminaa sijaitsee uusi, Tanskan elinkeinoelämän rahoittama *Mærsk Mc-Kinney Møller Videncenter* -niminen lahjakkaiden nuorten luonnontieteellis-matemaattiseen kurssitukseen tarkoitettu keskus, ja siellä järjestettiin 29.6–4.7. Tanskan, Ruotsin, Norjan ja Suomen olympiajoukkueiden viimeistelyharjoitus, ensimmäinen laatuaan. Suomen osuuden valmentajapuolella hoiti Esa Vesalainen, joka myös matkusti Kazakstaniin olympiajoukkueen varajohtajana. Matti Lehtinen oli joukkueen nimellinen johtaja, mutta matematiikkaolympialaisten käytäntöjen mukaan joukkueen johtaja toimii tuomariston jäsenenä tehtäväsarjaa laadittaessa eikä varsinaisesti ole tekemisissä johtamansa joukkueen kanssa.

Kazakstanilaisten järjestelyjä kohtaan saattoi maata etukäteen tuntematon tuntea ennakkoluuloja, mutta ne osoittautuivat pääosin turhiksi. Uusi ja monin tavoin huippumoderni öljyvaroin rakennettu Astana kaikkialla esillä olevien presidentti Nursultan Nazarbajevin (joka ei kuitenkaan omassa persoonassaan ehtinyt olympialaisten juhlatilaisuuksiin) lempeäilmeisten kuvien alla oli omalla tavallaan häkellyttävä. Lentoyhteyksiä Kazakstaniin on melko niukasti. Lentojen peruutukset hankaloittivat melko lailla joukkueen paluumatkaa.

Olympialaiset olivat koonneet yhteen 97 maan joukkueet ja 523 kilpailijaa. Niin kuin aina, muutkin kuin Suomen joukkue olivat poikavaltaisia. Tyttöjä kilpailijoista oli kuitenkin 47 eli tasan 9 %. Tuomaristo koosti kokouksissaan Almatyssä Kazakstanin etelälaidalla kilpailua edeltävinä päivinä tehtäväsarjan, jossa oli tavan mukaan kaksi geometrian tehtävää, kaksi algebraksi luokiteltavaa ja yksi lukuteoreettinen ja yksi kombinatorinen tehtävä. Varsinaiset kilpailupäivät olivat 7. ja 8.7. Kumpanakin päivänä kilpailijoilla oli neljä ja puoli tuntia aikaa kolmen tehtävän ratkaisemiseen. Molempina päivinä sarjan ensimmäinen tehtävä oli olennaisesti muita helpompi. Täysiin pisteisiin pääsi lopulta vain yksi kilpailija, Kiinan **Zipei Nie**. Kiinan kuusikko keräsi kaikkiaankin eniten pisteitä. Maiden paremmuuslistassa seuraavina olivat Venäjä, USA, Etelä-Korea, Kazakstan, Thaimaa, Japani, Turkki, Saksa ja Serbia. – Olympialaisten tehtävät ja ratkaisut voi lukea Valmennusjaoston sivuilta osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/IMO/`.

Yhteinenkään valmentautuminen ei nostanut pohjoismaisia joukkueita kovin korkealle. Paras näistä maista, Tanska, pääsi sijoituksella 45 juuri parempaan puolikkaaseen. Islanti oli sijalla 71, Suomi ja Ruotsi jakoivat sijan 72 ja Norja joutui tyytymään sijaan 75.

Matematiikkaolympialaisten suoritukset palkitaan kolmentasoisilla mitaleilla. Mitalit jaetaan sijoituksen perusteella niin, että suunnilleen 1/12 kilpailijoista saa kultamitalin, seuraava kuudesosa hopeamitalin ja seuraava kolmasosa pronssimitalin. Näin mitaleita saa suunnilleen puolet osallistujista. Pohjoismaisessa matematiikkakilpailussa toiseksi sijoittunut Tanskan Mathias Knudsen ylsi kultamitalijoukkoon. Hän oli kaikkiaan sijalla 13. Knudsenin kultamitali oli Tanskalle kaikkien aikojen ensimmäinen. Norjan, Ruotsin ja Islannin joukkueet jäivät kokonaan mitaleitta, mutta Suomen Aleksis Kosken suoritus riitti pronssimitaliin. – Suomeen on kaikkiaan 37 osallistumiskerran aikana osunut vain yksi kultamitali. Sen sai **Taneli Huuskonen** vuoden 1981 olympialaisissa Washingtonissa.

Matematiikan kansainvälisessä kilpailukalenterissa vuoden viimeinen kohde on *Baltian Tie -joukkuematematiikkakilpailu*. Se pidetään marraskuun alkupäivinä. Vuonna 2010 kilpailu pidettiin Reykjavikissa 4.–8.11. – Baltia ymmärretään tämän kilpailun yhteydessä avarasti. Mukana ovat Norja ja Islanti, vaikka näistä maista ei Itämerta näekään.

Kun Suomen matematiikkakilpailujen ajoitus on sovitettu lähinnä kesälomanaikaisiin Kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin, niin loppusyksyn joukkuevalinta on ongelmallisempi. Kokeneimmat kilpailijat ovat usein siirtyneet edellisenä keväänä koulusta jatko-opintoihin, eivätkä enää täytä osallistumiskriteeriä, enintään lukiotasoisen oppilaitoksen opiskelijana olemista. Joukkue joudutaan valitsemaan niistä matematiikkakilpailuvalmennukseen osallistuneista, jotka vielä ovat lukiossa. Toisaalta tällaiset henkilöt ovat kilpailukelpoisia vielä seuraavankin kesän matematiikkaolympialaisissa. Valmennusjaoston kilpailuvalmennuksen rytmiin ovat kuuluneet valmennustapaamiset syyskuun alussa ja lokakuun puolivälissä. Vuoden 2010 Baltian Tie -joukkue valittiin käytännössä vasta viikonvaihteessa 22.–24.10. Joukkueeseen tulivat jo matematiikkaolympialaisissa käyneet Olli Hirviniemi, Ilmari Kangasniemi ja Dimitri Kirichenko ja heidän lisäkseen Felix Sjöblom ja Tampereen klassillisen lukion **Markus Pajarre**. Joukkuetta johtivat Kerkko Luosto ja Lauri Hallila.

Baltian Tie -kilpailussa kukin joukkue saa ratkaistavakseen peräti 20 tehtävän sarjan, jossa tasalukumäärä kunkin kilpailumatematiikan kiteytyneen osa-alueen, algebran, geometrian, lukuteorian ja kombinatoriikan tehtäviä. Aikaa on neljä ja puoli tuntia, mutta yhteistyö ja työnjako ovat sallittuja. Tehtävät arvostellaan asteikolla 0 – 5, joten maksimipistemäärä on 100. Baltian Tie -kilpailun tehtäviin ja tuloksiin voi tutustua osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/Baltian_tie/`.

Parhaaksi Baltian Tie -joukkueeksi osoittautui nyt niin kuin monesti ennenkin Puola, joka keräsi peräti 89 pistettä. Suomen pistemäärä 45 oikeutti vasta toiseksi viimeiseen, yhdeksänteen sijaan. Suhteellisen alhaisen pistemäärän taustana oli epäonnistuminen osa-alueen kombinatoriikka tehtävissä.

Juuri ennen Baltian Tie -kilpailua pidettiin taas uuden kilpailukierroksen aloittava MAOLin matematiikkakilpailujen alkukierros. Tähtäimessä ovat nyt seuraavat Kansainväliset matematiikkaolympialaiset heinäkuussa 2011 Amsterdamissa.