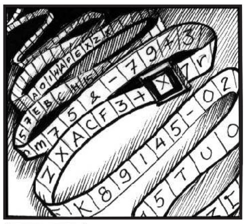


Riittääkö lämmitysöljy

Heikki Apiola
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Ongelma

Vaimoni sisaren *Paulan* mies *Esa Jokinen* lähestyi minua vuoden viimeisinä päivinä ajankohtaisella kirjeellä näin lumisena pakkastalvena:

Pieni pähkinä purtavaksi:

Yrjöllä[1] oli aikoinaan taulukko, jossa kerrottiin sentti kerrallaan, kuinka paljon öljysäiliössämme oli öljyä. Se on kuitenkin jo autuaasti hukattu.
Kyseessä on makuulla oleva lieriö (oletus), jonka tilavuus on 4000 litraa. En tiedä leveyttä, pituutta enkä korkeutta. Öljyn tulo polttimeen loppuu, kun öljyn pinta on 10 sentin korkeudella lieriön pohjasta. Arvelen sen johtuvan siitä, että näin sakkaa ei joudu polttimeen saakka.
Saimme tänään 3000 litraa öljyä. Täytön jälkeen öljyn pinta oli 95 sentin korkeudella säiliön pohjasta mitattuna eli 3000 litraa nosti öljyn pintaa 85 sentillä.
Pystyykö näillä tiedoilla tekemään likimääräistä taulukkoa, joka kertoisi, kuinka paljon öljyä on säiliössä kutakin senttiä kohden eli vaikka 57 senttiä 2000 litraa, 63 senttiä 2078
Huomautan, että tämä tehtävä on täysin vapaaehtoinen eikä siitä luistaminen vaikuta henkilökohtaiseen (Facebook)-kaveruuteemme.

Terv. Esa

Tehtävä on sikäli oikein sopiva koululaisten lehteen, että siinä tarvittava matematiikka on selkeästi koulumatematiikkaa.

Vaikka ongelman matemaattinen perusta on vaatimaton, se johtaa kuitenkin epätriviaaliin yhtälöön, jonka ratkaisu ei onnistu mielekkäästi ilman hyvää laskentavälineistöä. Samalla on tilaisuus pohdiskella ja havainnollistaa joitakin yleisiä periaatteita, jotka liittyvät toisaalta jatkuviin ja toisaalta derivoituviin funktioihin.

Käytän tilaisuutta hyväkseni esitelläkseni ratkaisun apuna symbolilaskentaohjelmaa MAPLE (`http://www.maplesoft.com`). Mainittakoon, että kirjoitin kauan sitten Solmuun laajan artikkelin otsikolla *Matemaattisten symbolien käsittelyä*:

`http://solmu.math.helsinki.fi/1999/5/apiola/`

Siinä johdattelin tietokoneella tapahtuvan symbolisen laskennan perusteisiin niinikään MAPLE:n avulla. Hauska yhteensattuma on, että tuossa kirjoituksessa eräänä esimerkkinä oli makaava lieriö, sillä kertaa selvittelin, miten korkealla lieriö kelluu vedessä.

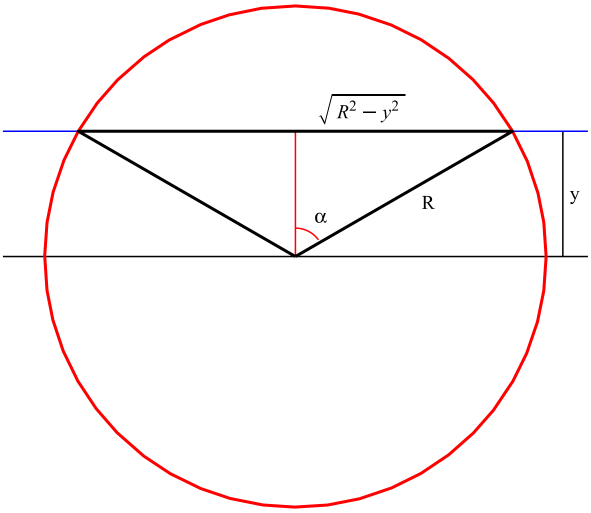
Tehtävän ratkaisussa on hyvästä symbolilaskentaohjelmasta suuri hyöty myös siksi, että sillä voidaan tuottaa dokumentti, joka näyttää laskennan tulokset oikeina matemaattisina kaavoina, grafiikan ja selitykset.

Toisaalta on hyvä mainita, että laskut voidaan kohtuullisella vaivalla, huolellisuudella ja ahkeruudella suorittaa myös käsin, kun apuna on ylioppilaskirjoituksissa hyväksyttävä graafinen laskin, kuten `TI-84`. Asian demonstroi minulle armas vaimoni *Sisko Repo*, lähtien liikkeelle Maple-avusteisesti sieventämästäni yhtälöstä.

[1] Edesmennyt appeni, matematiikan lehtori *Yrjö Repo*

Ratkaisu, kun säiliön mitat tunnetaan

Olkoon lieriön säde R ja pituus L. Tilavuuden laskentaa varten on vain selvitettävä maanpinnasta korkeudella h olevan vaakasuoran rajoittaman ympyrän segmentin ala, joka sitten kerrotaan pituudella L.



Asetetaan säiliön profiiliympyrän keskipiste origoon ja lausutaan ala $A(y)$ kuvaan merkityn $y-$koordinaatin avulla. Siis korkeus makaavan lieriön pohjalta: $h = R + y$.

Yläpuolelle jäävän ympyrän segmentin ala = keskuskulman 2α määräämän sektorin ala − keskuskolmion ala. Lausutaan kulmat radiaaneissa, jolloin kulma= s/R, missä s on vastaavan kaaren pituus. Täyskulma on siten 2π ja kulman 2α määräämän sektorin ala $= \frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2 = \alpha R^2$.

Niinpä yläpuolisen segmentin ala $= \alpha R^2 - y\sqrt{R^2 - y^2}$.

Alapuolisen segmentin ala on siis tämä vähennettynä koko ympyrän alasta.

Kysytty tilavuus voidaan nyt kirjoittaa muotoon:

$$V(y) = ((\pi - \alpha)R^2 + y\sqrt{R^2 - y^2})L. \qquad (1)$$

Kaavassa pitää vielä kulma α lausua y:n ja R:n avulla:

$$\alpha = \arccos\frac{y}{R}, \qquad (2)$$

eli kulma, jonka kosini on $\frac{y}{R}$. Toisin sanoen kyseessä on cos-funktion käänteisfunktio, tarkemmin sanottuna sen ns. *päähaara*. Laskimessa tämän merkkinä on yleensä $\cos^{-1}$.

Herää kysymys, mikä tässä nyt oli vaikeutena, paitsi ”ruumiillinen työ”, jos joudutaan taulukoimaan sentin välein.

Mutta mittojahan ei tunneta

Säiliö on maan sisällä, sitä on vaikea päästä mittaamaan. Ehkäpä säiliön ”manuaali” on hävinnyt samaan paikkaan kuin *Yrjö Revon* laatima mittatikku. No, tämä tekee tehtävästä astetta kiintoisamman. (Sanoisinko ”haastavamman”, mutta en sano.)

Tehtävänannossa on kaksi tietoa:

1. Säiliön tilavuus = 4 m^3
2. ”Täytön jälkeen öljyn pinta oli 95 sentin korkeudella säiliön pohjasta mitattuna eli 3000 litraa nosti öljyn pintaa 85 sentillä.”

Jos merkitään $W(h)$:lla tilavuutta lausuttuna pohjasta mitatun korkeuden h avulla, jolloin $W(h) = V(h - R)$, saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} \pi R^2 L = 4 \\ W(0.95) = W(0.1) + 3 \end{cases}$$

Edellisestä sijoitetaan $L = \frac{4}{\pi R^2}$ jälkimmäiseen, joka V:n avulla ilmaistuna tulee

$$V(0.95 - R) = V(0.1 - R) + 3.$$

Kun tähän otetaan V:n kaava (1) ja vielä (2), saadaankin juhlallisen näköinen yhtälö:

$$\begin{aligned} &-\frac{4}{\pi}\arccos\left(\frac{0.95 - R}{R}\right) \\ &\qquad + \frac{4\,(0.95 - R)}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - (0.95 - R)^2} \\ &= -\frac{4}{\pi}\arccos\left(\frac{0.1 - R}{R}\right) \\ &\qquad + \frac{4\,(0.1 - R)}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - (0.1 - R)^2} + 3 \end{aligned}$$

Tämän yhtälön johtaminen on tarkkuutta ja ahkeruutta edellyttävä harjoitustehtävä lukijalle. Itse käytin hyväkseni koneellista lausekkeen käsittelijää, edellä mainittua MAPLE-ohjelmaa, liitän koko työn sisältävän laskenta-arkin mukaan:
`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/1/apiolaMaplews.pdf`

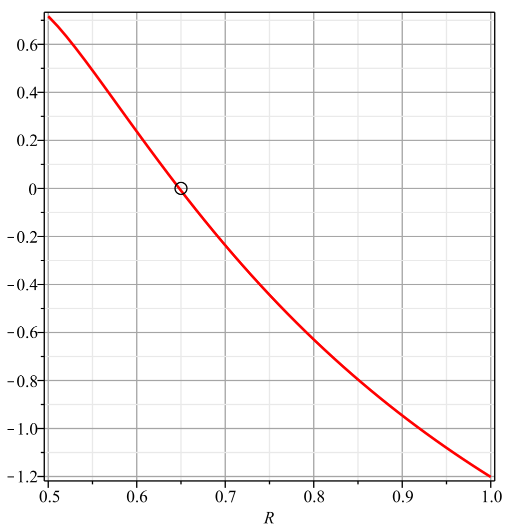
Täytyy sanoa, että työ sujui vain puoliautomaattisesti, osittain tarvittiin käsinlaskua. Vaikka symbolilaskentaohjelmien sievennyskyvyt ovat hämmästyttäviä, niitä ei ole aina helppo komentaa tekemään kaikkia sellaisia sievennyksiä, joilla ihminen haluaisi puuttua peliin. Joskus sieventäjä vie homman liian pitkälle, jolloin lopputulos ei olekaan ihmiselle miellyttävä. Toisaalta, kun jatkokäsittely tehdään ohjelmalla, ei ole aina niin tärkeää, että lauseke on ihmissilmän estetiikkaa parhaiten tyydyttävässä muodossa, johon tässä olen pyrkinyt. Todettakoon, että näin sievään asuun saatettu muoto oli tässä tarpeen vain kirjoituksen luettavuuden kannalta, itse ratkaisu saatiin varsin joutuisasti hiukan pitemmästä, automaattisesti sievennetystä muodosta, kuten liitteenä olevasta työarkista ilmenee.

Yhtälön ratkaiseminen

Jos katsellaan ratkaistavaa yhtälöä, niin epätoivo saattaa hiipiä hiuksiin. Tuntematon R esiintyy arccos-funktion sisällä ja ulkopuolella rationaalilausekkeissa ja lisäksi mukana on neliöjuuria R:n polynomeista. On selvää, että minkään niksien/(taika)temppujen avulla ei ole mahdollista saattaa tehtävää sellaiseen muotoon, josta ratkaisu voitaisiin "lukea", ts. tarkkaa analyyttista ratkaisua ei ole mahdollista johtaa.

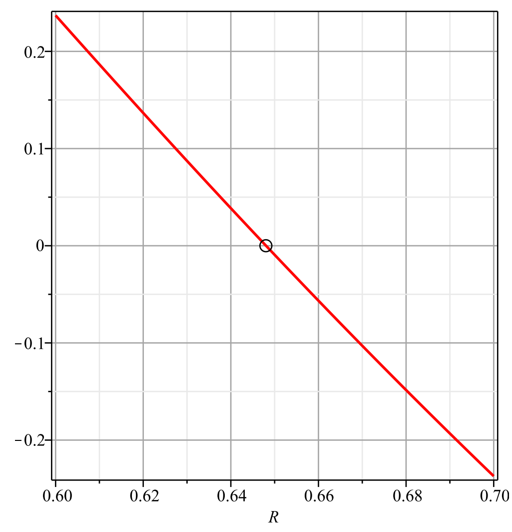
Toisaalta, jos siirretään kaikki samalle puolelle, kyseessä on jatkuvan funktion nollakohdan määräämistehtävä, koska arvo $R = 0$ suljetaan joka tapauksessa tarkastelualueesta pois. Jos löydetään väli, jonka päätepisteissä funktio saa erimerkkiset arvot, tiedetään jatkuvia funktioita koskevan perustuloksen, *Bolzanon lauseen* mukaan, että tällä välillä on nollakohta. Parhaiten ja havainnollisimmin asiaa voidaan tutkia piirtämällä kuvaaja järkevän tuntuisella R-välillä.

Maple-komennot jätän työarkilta luettaviksi, katsotaan tässä kuvat:



Yhtälön ratkaisun haarukointia

Silmämääräisesti arvioiden saadaan $R = 0.65$. Tarkennetaan valitsemalla R-väliksi $[0.6, 0.7]$.



Tarkennetaan haarukointia

Kuvasta voidaan lukea arvio $R = 0.648$. Jos haluttaisiin tarkentaa, voitaisiin jatkaa samalla tavoin. Kyseessä on itse asiassa ns. välin puolitusmenetelmän graafinen versio. Korkeatasoisena ja kattavana matemaattisena ohjelmistona Maple:ssa on myös tehokas epälineaaristen yhtälöiden ratkaisualgoritmi valmiiksi ohjelmoituna. Numeeriset ratkaisijat tarvitsevat syötteekseen ratkaistavan yhtälön lausekkeen lisäksi yleensä alkuarvauksen, jota lähdetään iteratiivisesti (tiettyä sääntöä toistaen) tarkentamaan. Alkuarvaus voidaan hyvin ottaa ensimmäisestä kuvasta (jotta ratkaisijakin pääsisi näyttämään kyntensä). Olkoot yhtälön eri puolet sijoitettu muuttujiin `vasen, oikea`. Kas tällä ratkaisukomennolla homma käy:

```
> fsolve(vasen-oikea,R=0.65);
                                   0.6480360777
```

Kun katsellaan kuvia, huomataan, että lähemmäs zoomatun kuvan käyrä näyttää miltei suoralta. Miksi näin mutkikkaan funktion kuvaaja muuttuu suoraksi? Kyseessä on derivoituvan funktion yleinen ominaisuus. Derivaattahan antaa funktion kuvaajalle lineaarisen approksimaation, joka on sitä tarkempi, mitä pienempi askel laskentapisteestä edetään. Tämä ilmiö on siis tunnusomainen kaikille derivoituville funktioille, kun katsotaan tilannetta tarpeeksi läheltä.

Ja nyt nautiskellaan

Tässä osuudessa näytän lyhyesti, minkälaisin komennoin ja niiden antamin tuloksin voitaisiin Maple-työssä edetä, kun lieriön mitat on saatu tietoon. Liitteenä olevassa Maple-työarkin
`http://solmu.math.helsinki.fi/2011/1/apiolaMaplews.pdf`

pdf-tulosteessa näkyy oikeaoppisempi ja tarkemmin kommentoitu työskentelytapa koko tehtävää ajatellen.

Tässä esiintyvien komentojen vastineet lienee osaavan laskimen käyttäjän kohtuullisen helppo muuttaa laskintyöksi.

```
>tilavuus:=((Pi-alpha)*R^2+y*sqrt(R^2-y^2))*L;
```

$$\texttt{tilavuus} := \left((\pi-\alpha)\,R^2 + y\sqrt{R^2-y^2}\right) L$$

```
> alpha:=arccos(y/R):
> L:=4/(Pi*R^2):
> V:=unapply(tilavuus,y);
```

$$V := y \mapsto \frac{4}{\pi R^2}\left(\left(\pi - \arccos\left(\frac{y}{R}\right)\right) R^2 + y\sqrt{R^2-y^2}\right)$$

```
> askel:=0.1: H:=[seq(k*askel,k=0..13)];
    H := [0., .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7,
          .8, .9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3]
> R:=0.648:
> Y:=[seq(h-R,h=H)]:
> Varvot:=map(evalf@V,Y):
> transpose(matrix([H,Varvot]));
```

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1421293606 \\ 0.2 & 0.3920491354 \\ \vdots & \vdots \\ 1.2 & 3.866182207 \\ 1.3 & 4.0 + 0.001165442695\,i \end{bmatrix}$$

Kuriositeettina mainittakoon, että viimeinen taulukkopiste menee säiliön ulkopuolelle ($2\,R < 1.3$), taulukossa se ilmenee siten, että tilavuuden arvon imaginaariosa on nollasta poikkeava, siis ”kompleksinen tilavuus”.

Epilogi

Date: Sun, 16 Jan 2011 19:45:43 +0200 (EET) Subject: Re: Re: Öljytikku Solmuun

Heikki,
Ohessa kaksi tänään otettua kuvaa mittaustilanteesta. Voit hyvin kuvitella, kuinka keräännymme sunnuntai-iltaisin perheen yhteiseen iltahetkeen öljysäiliön äärelle. Ideana on se, että Pauliina näyttää valoa, Pami mittaa ja Jonttu vertaa mittaa sinun tekemääsi taulukkoon. Öljyn pinta oli 95 senttiä 29.12 nyt sitä on 82 senttiä, mikä lienee sinun taulukollasi noin 2600 litraa - sitä on siis kulunut reilussa kahdessa viikossa ihan mielettömästi - tosin kelitkin ovat olleet välillä todella kylmiä, viime yönä miinus 29. Vaihdamme lämmitysjärjestelmän ensi talveksi.

Terv. Esa

Öljynmittausta Tikkakosken talvi-illassa

Nähtiin taas, miten korvaamattomia työkaluja puhdas matematiikka tarjoaa jopa likaisten öljytehtävien ratkaisuun. Tässä tapauksessa matematiikan soveltaminen johti öljymittaustehtävän ratkaisun ohella myös perheen elämään olennaisesti vaikuttavan päätöksen syntyyn.

Viitteet

[1] `http://solmu.math.helsinki.fi/2011/1/apiolaMaplews.pdf` Kirjoitukseen liittyvä Maple-laskenta-arkki pdf-muodossa

[2] `http://solmu.math.helsinki.fi/2011/1/apiolaMaplews.mw` Kirjoitukseen liittyvä Maple-laskenta-arkki Maple-muodossa (luettavissa ja muokattavissa Maple-ohjelmalla)

[3] `http://solmu.math.helsinki.fi/1999/5/apiola/` Matemaattista symbolien käsittelyä, kirjoitus Solmussa v. 1999

[4] `http://www.maplesoft.com` Maplen kotisivu