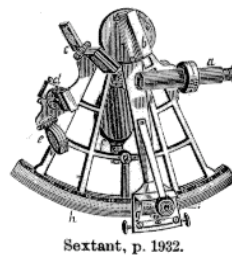


3. Trigonometria

3.1. Johdanto

Trigonometria on vanha matematiikan osa-alue, joka varsinkin kehityskaarensa alkuvaiheessa, muokkautui jatkuvassa vuorovaikutussuhteessa tähtitieteen kanssa. Trigonometria itse asiassa luettiin pitkään osaksi tähtitiedettä ja sitä käytettiin pääasiassa apuneuvona taivaankappaleiden sijaintien määrittämisessä. Tähtitiede tarjosi toisaalta hedelmällisen kasvupohjan luomalla tarpeen kehittää ja laajentaa trigonometrian teoriaa yhä pidemmälle, kunnes trigonometria erosi tähtitieteen alta omaksi matematiikan alakseen.



Sekstantti on navigoinnissa käytettävä optinen laite, jolla määritetään paikka suhteessa tähtiin, aurinkoon tai kuu-
hun. Sekstantilla saavutetaan noin 0,1 asteen tarkkuus.

Sanan trigonometria sepitti saksalainen matemaatikko Bartholomeo Pitiscus 1500-luvulla. Sanan kielelliset juuret ovat kuitenkin kehittäjänsä kansalaisuudesta huolimatta kreikassa. Sanasta voidaan erottaa alkuosa *trigon*¹, joka merkitsee kolmiota sekä loppuosa *metron*, joka voidaan kääntää sanalla mittausta. Trigonometria merkitseekin vapaasti suomennettuna "kolmion mittausta",² mitä sillä perinteisesti tarkoitetaan: geometrinen sovellusten ratkaisemista kolmioiden avulla.



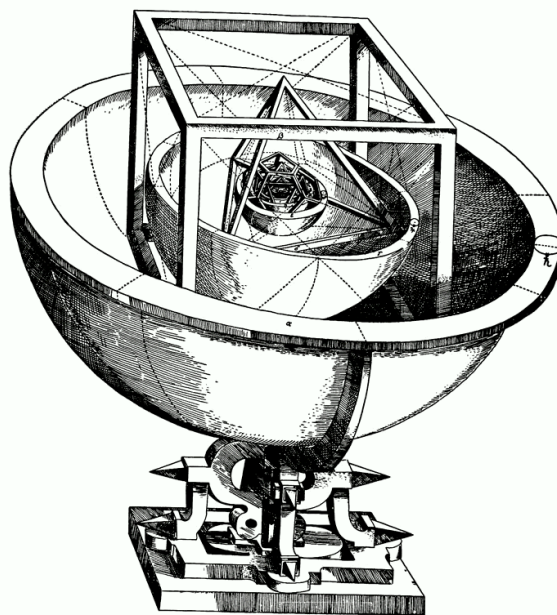
Teodoliitti on 1500-luvulla kehitetty kulmanmittauslaite. Modernilla teodoliitilla saavutetaan jopa 0,002 asteen tarkkuus.

(<http://www.warrenind.com/WKTheodolites.html>,
<http://www.asiuk.net/hwww10.jpg>)

¹ Sana *trigon* on myös kaksiosainen: *tri*- kolme ja *gonia* kulma. Alkuosalla on indoeurooppalainen juuri ja loppuosa on kreikkalaista perua. Schwartzman, s. 227.

² Schwartzman, s. 227

Trigonometrian kehitys voidaan jakaa karkeasti kolmeen vaiheeseen. Ensimmäinen vaihe ulottuu 100-luvulta keskiajalle, aina arabien saavutuksiin asti. Tämän pisimmän ajanjakson aikana trigonometria saa alkunsa Hipparkhoksen jännetaulukoiden kautta, leviää Intiaan ja sieltä arabien tietoon. Toisessa vaiheessa, keskiajan lopulta 1600-luvun puoliväliin, trigonometrian käsitteet tarkentuivat. Tänä ajanjaksona mm. syntyivät kaikki kuusi trigonometrinen funktio ja kolmion ratkaiseminen systematisoitui. Myös pallotrigonometria teoria kehittyi ja täsmentyi, pääasiassa arabimatematiikkojen käsissä³. Trigonometrinen laskelmien tarkkuuskin oli jo huomattavan suuri. Tältä ajalta voidaan mainita Regiomontanus (1436-1476) joka laati ensimmäisen pelkästään trigonometriaan liittyvän teoksen. Viimeinen vaihe kehityksessä oli trigonometrian muuttuminen analyyttiseksi ja sulautuminen osaksi analyysiä. Tämän kehityksen alkuunpanijoina toimivat Sir Isaac Newton (1643-1727) ja Gottfried Leibniz (1646-1716), joiden 1600-luvun jälkimmäisellä puoliskolla tekemät kaksi tärkeää keksintöä, sinin sarjakehitelmä ja differentiaalilaskenta⁴, johtivat trigonometrian jo 1700-luvun puoliväliin mennessä sille tasolle ja ylikin kuin millä sitä lukioissa nykyisin opetetaan. Tämän viimeisen kehitysvaiheen kolmas ja ehkä tärkein matemaatikko oli Euler, joka laati systemaattisen esityksen trigonometrialle sekä trigonometrinen funktioiden differentiaali- ja integraalilaskennalle.



Kuvitusta Johannes Keplerin (1571-1630) teoksesta *Mysterium Cosmographicum* (1596).

³ Pallotrigonometriaa ei käsitellä tässä kirjassa.

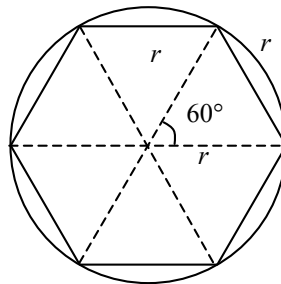
⁴ Newton ja Leibniz kehittivät differentiaali- ja integraalilaskentana tuntemamme matematiikan alan toisistaan riippumattomasti. Leibniz julkaisi ensimmäisenä tuloksensa, mutta Newtonin on osoitettu löytäneet tulokset ennen Leibnizia. erkki.luoma-aho@jkl.fi

3.2. Historia ja kehittyminen

3.2.1. Kulman mittaaminen

Babylonia

Kulmaa mitataan tavallisesti asteina. Tapa on erittäin vanha ja on saanut alkunsa ensimmäisistä astronomisista havainnoista, joiden mukaan aurinko ”kiertää” Maan noin 360 vuorokauden aikana. Babyloniasta on löydetty aikaisimmat merkinnät tällaiseen ajatteluun perustuvasta kalenterista ajalta 5700 eKr. Varhaisten kalenterien laatijoita mukaillen yksi aste kuvaa auringon kuviteltua päivamatkaa vuotuisella kiertoradallaan. Ympyrän kehä jaetaan siis 360 yhtä suureen osaan yhden osan ollessa mittauksen perusyksikkö. Luku 360 on kiinnostava myös siksi, että säteen avulla ympyrän kehä voidaan jakaa täsmälleen kuuteen osaan, jolloin säteen mitausta matkaa vastaa 60 astetta. Varhaiset babylonialaiset tähtitieteilijät tarvitsivat myös yhtä astetta pienempiä yksiköitä, jolloin he jakoivat asteen joko 60 tai 3600 osaan,⁵ teknisissä laskelmissa käytössä olleen 60-järjestelmän mukaan.



Kuva 29. Ympyrän kehä voidaan jakaa säteen avulla kuuteen yhtä pitkään osaan eli kaareen. Tällöin ympyrän sisälle muodostuu säännöllinen kuusikulmio, joka jakaantuu kuuteen yhtä suureen tasasivuiseen kolmioon. Tasasivuisen kolmion jokainen kulma on 60° , kuten myös jännettä ($= r$) vastaavan kaaren asteluku. Onko tässä yksi lisäperuste luvun 360 valinnalle?

Kreikka

pars minuta prima:

$$1' = \frac{1}{60}^\circ$$

pars minuta secunda:

$$1'' = \frac{1}{60}' = \frac{1}{3600}^\circ$$

Kreikkalaiset matemaatikot omaksuivat babylonialaisilta asteet ja tätä pienemmät yksiköt. He ryhtyivät kutsumaan asteen kuudeskymmenesosaa nimityksellä ”ensimmäinen kuudeskymmenesosa” ja asteen 3600-osaa ”toinen kuudeskymmenesosa”. Kun keskiajalla kreikkalaisten matemaattisia tekstejä käännettiin latinan kielelle asteen murto-osat saivat muodon *pars minuta prima* eli ”ensimmäinen pieni osa” sekä *pars minuta secunda* eli ”toinen pieni osa”. Näihin käännöksiin pohjautuvat sanat **minuutti** ja **sekunti**. Minuuttien ja sekuntien käyttö kulman mittaamisessa on vähentynyt, mutta niitä käytetään edelleen sijainnin ilmoittamiseen kartoissa. Esimerkiksi Jyväskylän keskustan puolivirallisen keskipisteen, kompassin, sijainti on n. $62^\circ 14' 34'' \text{N}$, $25^\circ 44' 50'' \text{E}$.

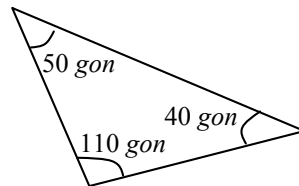
Myöhemmin minuutti ja sekunti siirtyivät kulman mittauksesta myös ajan mittauksen yksiköiksi, jossa ne ovat säilyneet trigonometriaa paremmin.

⁵ Huomaa, että $60 \cdot 60 = 3600$, joten yksi 3600-osa on kuudeskymmenesosan kuudeskymmenesosa.

Gooni

Ranskan vallankumouksen yhteydessä otettiin käyttöön merkittävä uusi kymmenjärjestelmään perustuva mittajärjestelmä. Tärkeimmät mitat olivat metri ja gramma. Uudistustyössä luotiin myös kulman mittaukselle kymmenkantainen mittayksikkö gooni eli uusaste. Nimi gooni on peräisin kreikan sanasta gonia, kulma.

Yksi gooni on suoran kulman sadasosa eli suorakulma on 100 goonia. Gooni ei yleistynyt geometriassa, johon mm siitä, että tärkeät asteluvut 30° ja 60° ovat gooneina ilmaistaessa murtolukuja. Kuitenkin useimmat taskulaskimet tunnistavat tämän yksikön ja sitä käytetään mm. maanmittauksessa. Laskimissa goonin tunnus on GRAD.



Kolmion kulmien
summa on 200!



3.2.2. Kreikkalaisten astronomia ja trigonometrian alku

Koska kulman mittaamisen yksikön lisäksi koko trigonometria on saanut alkunsa tähtitieteen parista, on syytä vielä tutustua aluksi hieman tarkemmin kreikkalaiseen tähtitieteeseen ennen paneutumista trigonometriaan.

Kreikkalaiset hahmottivat maailmankaikkeuden lähtien oletuksesta, että Maa on pallomainen, kiinteä ja pyörimätön maailmankaikkeuden keskus. Maan pallomuotoisuuden eräs perustelu on näköhavainto horisontin taakse etääntyvästä laivasta, jonka runko häviää ensin ja maston huippu viimeisenä. Lisäksi, koska kreikkalaiset pitivät palloa täydellisempänä muotona, oli luonnollista ajatella, että myös Maa on nimenomaan pallo. Maan lisäksi taivaankannen oletettiin olevan pallon muotoinen ja taivaankappaleiden eli tähtien, planeettojen, kuun ja auringon ajateltiin kiinnittyneen tähän Maan ympäri pyörivään pallokuoreen. Viiden silmin havaitun planeetan eli Merkuriuksen, Venuksen, Marsin, Jupiterin ja Saturnuksen ajateltiin tosin olevan kiinni taivaankannessa vain löyhästi, koska Maasta katsottuna ne näyttävät olevan liikkeessä kiintotähtiin verrattuna. Näiden kulkureiden liikkeiden mallintaminen ja ennustaminen olikin kreikkalaisten tähtitieteilijöiden suurin haaste.

Eudoksos n. 350 eKr.

Ensimmäisen tarkan teorian taivaankappaleiden liikkeille esitti Eudoksos (n. 395 - 340 eKr.). Hänen teoriansa mukaan taivaankappaleiden liikkeet voidaan selittää 27 Maata kiertävän samankeskisen pallokuoren avulla, joista uloimmalla sijaitsevat kiintotähdet. Erillisten pallokuorten liikkeiden avulla Eudoksos pystyi esittämään myös Auringon, Kuun ja viiden tunnetun planeetan liikkeet. Pallokuoret eivätkä kuitenkaan Eudoksoksella olleet todellisia, vaan kyse oli laskennallisesta apukeinosta. Kuitenkin Aristoteles omaksui Eudoksoksen teorian fyysisessä mielessä version olettaen todelliset pallokuoret taivaalle. Tästä syystä samankeskisten pallokuorien teoria säilytti kiinnostuksensa aina keskiajalle saakka.

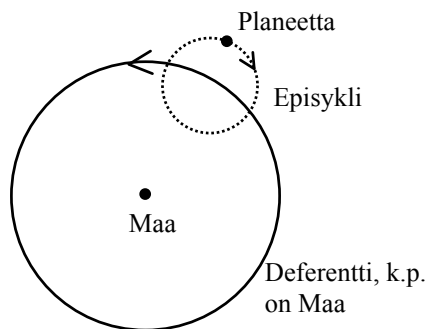
Samankeskisten pallokuorien järjestelmä kohtasi myös kritiikkiä. Pallokuorimallissa planeetat pysyvät vakioetäisyydellä, mutta havainnoitsijat huomasivat kuitenkin planeetoilla kirkkausvaihteluja, minkä täytyi tarkoittaa etäisyyden muutoksia. Kriitikot antoivat myös toisen haasteen: tähtitieteelliset vuodenaajat, tasausten ja seisausten välisinä aikoina mitattuna, eivät olleet täsmälleen yhtä pitkät, vaan kevät ja

kesä ovat pidempiä kuin syksy ja talvi⁶. Pallokuorten teorialla ei voinut selittää näitä ilmiöitä.

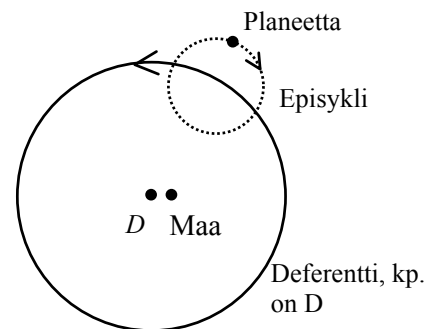
Apollonius n. 200 eKr.

Eudoksoksen mallin puutteisiin vastasi Apollonios Pergeläinen (262 –190 eKr.) episykliteorian ja eksentristen ympyrätojen avulla. Episykliteorian mukaan planeetta on tasaisessa ympyräliikkeessä pitkin episykliä, jonka keskipiste kiertää Maata pitkin toista ympyrärataa, jota kutsutaan deferentiksi. Pyörimisnopeudet sopivasti valiten episykliä pitkin liikkuvan planeetan rata muodostuu silmukkamaiseksi ja planeetta näyttää ensin kulkevan eteenpäin, pysähtyvän, liikkuvan taaksepäin pysähtyvän ja liikkuvan taas eteenpäin – juuri niin kuin tietyt planeetat näyttävät Maasta katsottuna liikkuvankin.

Eksentrisyys tarkoittaa sitä, että deferentin keskipiste ei sijaitsekaan Maan keskipisteessä, vaan hieman sivussa siitä. Yhdistämällä nämä kaksi teoriaa eli sijoittamalla deferentin keskipisteen D hieman Maasta sivuun pystyi Apollonios selittämään sekä vuodenaikojen pituuseron että planeettojen näennäisen paluuliikkeen.



Kuva 30. Episykliteorian yksinkertainen malli.



Kuva 31. Episykliteoria yhdistettynä kiertoradan eksentrisyyteen.

Jotta Apollonios olisi voinut saattaa kosmologisen mallinsa loppuun hänen olisi tullut osata laskea deferenttiympyrän keskipisteen D paikka ja sijainti. Siihen hän ei kuitenkaan pystynyt, vaan tähän tarvittiin Hipparkhos, Apolloniuksen jälkeen elänyt astronomi.

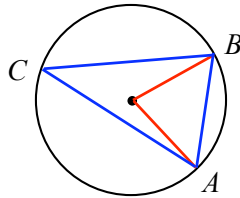
Hipparkhos 150 eKr.

Antiikin ajan etevimmälle tähtitieteilijälle Hipparkhos Nikealaiselle (n. 190-120 eKr.) voidaan antaa arvonimi trigonometrian isä, sillä laskeakseen Apolloniuksen teorian puuttuvat parametrin hän laati ensimmäisen trigonometriaksi luokiteltavan matemaattisen käsitteen eli ns. jännetaulukon.

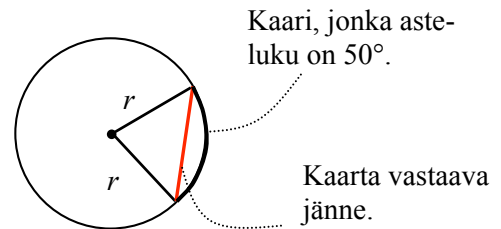
Hipparkhoksen trigonometriaan liittyvä oivallus oli, että jokainen kolmio voidaan piirtää jonkin ympyrän sisälle, jolloin kaikki kolmion sivut ovat ympyrän jäniteitä (kuva 32). Voidakseen laskea mielivaltaisen kolmion osia hän tarvitsi taulukon, jo-

⁶ kevät: 92,76 vrk; kesä 93,65 vrk, syksy 89,84 vrk ja talvi 88,99 vrk. (Oja, s.114-115)

hon olisi laskettu riittävästi jonkin sopivan ”verrokkiympyrän” sisälle piirrettyjen jänneiden pituuksia. Hän päätyi laatimaan taulukon, jossa jänneet oli laskettu $7,5^\circ$ asteen välein eli taulukko oli hyvin karkeajakoinen, ja siinä oli kaikkiaan vain noin kaksikymmentä eri jänneen pituutta. Lisätietoa jännetaulukon käytöstä on sivulla nn olevassa liitteessä.



Kuva 32. Jokainen kolmio ABC voidaan piirtää jonkin ympyrän sisälle, jolloin kolmion sivut ovat ympyrän jänneitä.



Kuva 33. Hipparkhos taulukoi kaarta vastaavien jänneiden pituuksia.

Hipparkhos Nikealainen (n. 190– 120 eKr.)



Hipparkhos Nikealaista pidetään antiikin Kreikan huomattavimpana tähtitieteilijänä. Hän teki tärkeimmät havaintonsa Rodoksen saarella 140-luvulla eKr. Hipparkhoksen saavutuksia tähtitieteen alalta pidetään perustavaa ja laatua olevina, hänen tiedetään mm. laatineen ensimmäisen systemaattisen n. 850 tähteä sisältäneen tähti-luettelon, huomanneen prekession eli tähtitaivaan hitaan kiertymisen sekä laske-neen kuun kiertoajan oikein sekunnin tarkkuudella ja vuoden pituuden oikein 7 mi-nuutin tarkkuudella. Trigonometrian osalta hänen tärkein saavutuksensa, tutkielma jännetaulukoista, on alkuperäisessä muodossaan kadonnut. Hipparkhos oli ensim-mäinen kreikkalainen, jonka tiedetään käyttäneen kulman mittaamiseen asteita, mi-nuutteja ja sekunteja.

Ptolemaios n. 150 jKr.

Ptolemaios Klaudios (100–170 jKr.) jatkoi Hipparkhoksen viitoittamalla tiellä. Ptolemaios oli ennen kaikkea astronomi, joka kokosi kaiken siihenastisen tähtitie-teellisen tiedon valtavan laajaan teokseen *Mathematike Syntaxis* (i). Jo hänen aika-laisensa ymmärsivät työn arvon ja ryhtyivät kutsumaan sitä nimellä *Megiste Synta-xis* ("Suurin kokoelma"). Muitakin vastaavia kokoomateoksia (syntakseja) oli il-mestynyt jo aiemmin ja niitä kreikkalaiset ryhtyivät kutsumaan ”pienemmiksi”.

Megiste Syntaxis käännettiin vuoden 830 tienoilla kreikasta arabiaksi, jolloin arabi-kääntäjät säilyttivät ainoastaan teosta kuvanneen superlatiivin. Tällöin teoksen ni-meksi tuli tuli *Almagest*, missä etuliite "Al" on arabian kielen määräinen artikkeli. Kun *Almagest* käännettiin arabiaista latinan kielelle vuonna 1175, teoksen arabia-lainen nimi translitteroitiin sellaisenaan, joten Ptolemaioksen suurtyö on tunnettu 1100-luvulta lähtien tällä arabien antamalla nimellä.

Almagest tarjosi huipennuksen kaikesta siihenastisesta kreikkalaisesta astronomi-sesta tiedosta. Kirjan välittämä kosmologinen teoria, ns. ptolemaiolainen maakes-keinen maailmankäsitys säilyi vallitsevana aina 1500-luvulle saakka, jolloin Niko-laus Kopernikus osoitti Maan kiertävän Aurinkoa.

Trigonometrian kannalta Almagestin tärkein anti oli Hipparkhoksen jännetaulukoiden tarkennettu versio. Ptolemaios laati jännetaulukon puolen asteen välein alkaen $0,5^\circ$ kulmasta ja päätyen puoliympyrän kaareen eli 180° kaareen. Ympyrän säde Ptolemaioksen laatimassa taulukossa on 60, joten 180° kaarta vastaavan janteen (eli ympyrän halkaisijan) pituus on 120.



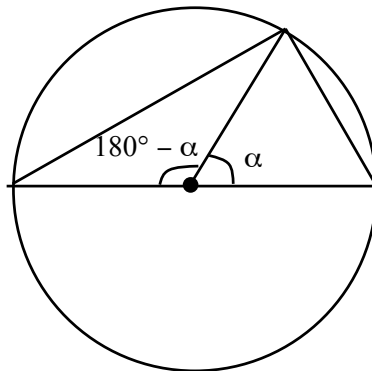
Ptolemy's map of the world; printed at Ulm, Germany, 1482.
Encyclopædia Britannica.

Ptolemaioksen menetelmä Ptolemaios muodosti taulukon käyttämällä kolmea trigonometristä muunnoskaavaa, Pythagoraan lausetta sekä interpolaatiota. Hän aloitti laskut määrittämällä säännöllisen viisikulmion sivun pituuden eli 72° kulmaa vastaavan janteen. Tälle hän sai tulokseksi $70;32\ 3^7$. Lisäksi 60° kaarta vastaava jänne on säde 60.

Seuraavaksi hän käytti Pythagoraan lausetta. Jos nimittäin kulmaa α vastaavan janteen pituutta merkitään $j_n \alpha$, niin Pythagoraan lauseen mukaan

$$j_n^2 \alpha + j_n^2 (180 - \alpha) = j_n^2 180^\circ = 120^2. \text{ (kuva 34)}$$

Näin Ptolemaios saattoi määrittää sekä 108° että 120° kaarta vastaavien janteiden pituudet.



Kuva 34.

Ptolemaios johti meidän käyttämiemme kulmien summan ja erotuksen sekä kulman puolikkaan muunnoskaavojen vastineet jännteille. Esimerkiksi kulmien erotukselle hän johti seuraavan kaavan:

⁷ Kuusikymmenjärjestelmän luku. Puolipiste erottaa kokonaiset ja murto-osat. Väli erottaa kuusikymmenjärjestelmän paikat toisistaan. Esimerkiksi $70;32\ 3 = 70 + \frac{32}{60} + \frac{3}{3600} = 70,534\dots$

$$\text{jn } (\alpha - \beta) \text{ jn } 180^\circ = \text{jn } \alpha \text{ jn } (180^\circ - \beta) - \text{jn } \beta \text{ jn } (180^\circ - \alpha).$$

Tämän kaavan avulla hän määrittä astelukujen 72° ja 60° erotuksena 12° kaarta vastaavan jängteen pituuden. Tästä hän eteni peräkkäisillä kulman puolituksilla, jolle hän myös tiesi kaavan, laskien pituudet $\text{jn } 6^\circ$, $\text{jn } 3^\circ$ $\text{jn } 1,5^\circ$ ja $\text{jn } 0,75^\circ$. Kahden viimeisen arvon välistä hän huolellisella interpolaatiolla määrittä arvon $\text{jn } 1^\circ = 1;250$ ja tämän perusteella arvon $\text{jn } 0,5^\circ = 0;3125$.

Nyt Ptolemaioksella oli kaikki tarvittava tieto taulukon täyttämiseen. Soveltaen useita kertoja peräkkäin summakaavaa tilanteeseen $\text{jn } (\alpha + 0,5^\circ)$ hän saattoi täyttää koko taulukon $\frac{1}{2}^\circ$ välein eli määrittää astelukuja 0° , $\frac{1}{2}^\circ$, 1° , ..., 180° vastaavien jängteiden pituudet.⁸

Ptolemaios Klaudios (100-170)



Ptolemaios Klaudios on yhdessä Hipparkhoksen kanssa toinen merkittävä antiikin ajan tähtitieteilijä sekä myös matemaatikko ja maantieteilijä. Ptolemaios oli syntynyt Egyptissä asuneesta kreikkalaisesta perheestä ja oli myös Rooman kansalainen. Hän asui ja teki merkittävimmät havaintonsa tunnetun maailman tieteiden keskuksessa, Aleksandriassa, Egyptissä, jossa hän myös kuoli vuonna 170.

Ptolemaios laati *Almagestin* lisäksi muitakin teoksia, jotka käsittelivät mm. maantiedettä ja optiikkaa sekä yllättävästi myös astrologiaa. Ptolemaios itse ei nähnyt tässä mitään ristiriitaa ja hän piti astrologisia pohdintojaan tähtitieteellisten laskelmiensa täydentäjänä: edellisten avulla voidaan selvittää kuinka taivaankappaleet vaikuttavan maanpäälliseen elämään kun jälkimmäisesti selviää niiden liikeradat avaruudessa.

Ptolemaios pyrki laatimaan kartat koko silloisesta tunnetusta maailmasta. Hänen kartoissaan oli, ensimmäistä kertaa, pituus- ja leveyspiirit, mitkä helpottivat mm. tarkkaa kopioimista. Tehdäkseen kartat mahdollisimman selkeiksi hän valitsi niiden 0-pituuspiiriksi Kanarian saarten länsireunan, sillä saariryhmä oli Antiikin maailman läntisin kolkka. Siitä lukien kaikki pituuspiirit olivat idässä. Ptolemaioksen kartat olivat keskiajalle saakka lähes kaikkien karttureiden esikuvina. Ptolemaios teki kartoissaan erään historian kulun kannalta merkittävän virheen: hän arvioi Maapallon ympärysmittan reilusti liian pieneksi. Tämä arvio rohkaisi mm. Kolumbuksen löytöretkelleen etsimään läntistä reittiä Intiaan, tunnetuin seurauksin.

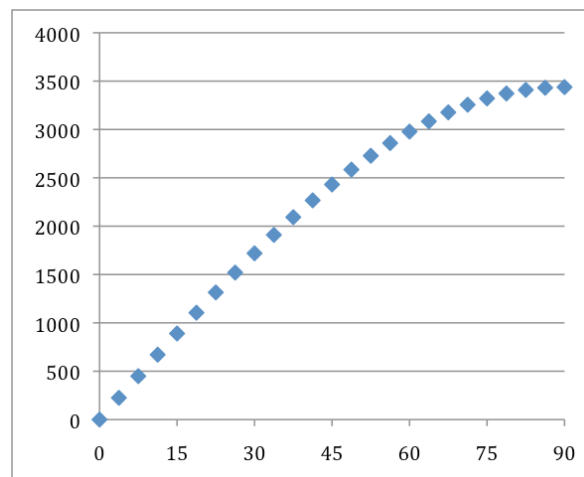
⁸ Laskumenetelmä: Kennedy, E. S., *The History of Trigonometry*, s. 7-8
erkki.luoma-aho@jkl.fi

3.2.3. Intia

Intia n. 500

Tieto kreikkalaisten alkeellisesta trigonometriasta siirtyi mm. Aleksanteri Suuren valloitusten myötä avaamia reittejä myöten aina Intiaan saakka, jossa kirjoitettiin 300- ja 400-lukujen taitteessa useita ns. *Siddhāntoja* eli sisällöltään likimain samankaltaisia astronomisia kirjoituksia. Ne sisälsivät runomuodossa aineksia sekä kreikkalaisesta tähtitieteestä että intialaisesta kansanperinteestä. Näistä ainut täysin säilynyt työ on *Sūrya Siddhānta* ("Auringon järjestelmä"). Siddhāntat sisältävät tähtitieteen osalta myös hieman omaperäistä ainesta: niissä on taulukoitu jänneiden pituuksien sijasta jänneiden puolikkaiden pituuksia. Tämä pieni, mutta tärkeä edistysaskel, vei trigonometriaa lähemmäksi meidän tuntemamme muotoa, koska jänneiden puolikkaiden taulukko vastaa sisällöltään oleellisesti siniä. *Siddhāntojen* kirjoittajat ovat jääneet tuntemattomiksi, mutta ovat inspiroineet intialaista tähtitieteilijää ja matemaatikkoa Aryabhataa (476–550), joka laati 500-luvun alussa teoksen *Aryabhatiya*. Tässä melko lyhyessä tähtitieteellisen, geometrisen, aritmeettisen ja trigonometrisen tiedon tiivistelmäkirjasessa löytyy jänneiden puolikkaiden arvot. Aivan tarkasti ottaen kirjasta ei löydy jänneiden pituuksia vaan runomuodossa luetteloitu luvut 225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22 ja 7. Aryabhatan jänneiden puolikkaiden pituudet ilmoittava säe alkaa sanoilla *makhi-bhakhi-phakhi-dhakhi-nakhi* ... jatkuen vastaavalla runollisella tavalla.⁹ Luettelon luvut ovat sinin peräkkäisten arvojen erotukset. Lukuja on 24, joten astelukujen välimatka on 225 minuuttia eli $3\frac{3}{4}^\circ$.

Taulukon rakenteesta johtuen yleisesti ajatellaan, että intialaisten käsiin on joutunut ensikädessä Hipparkhoksen töitä, jolla oli vastaava 225 minuutin välimatka astelukujen välillä sekä hän käytti ympyrän säteenä samaa lukua 3438, joka on Aryabhatan taulukon suurin eli $\sin 90^\circ$ vastaava arvo. Taulukossa on muutamia pieniä virheitä, jotka eivät kuitenkaan kumuloidu, joten kyseiset virheet lienevät pelkkiä kointivirheitä. Kuvassa 35 on Aryabhatan lukujen perusteella piirretty kuvaaja. Aryabhatan ilmoittavat lukuarvot sijaitsevat hyvin tarkasti sinifunktion neljäsosalla.¹⁰



Kuva 35. Aryabhatan luettelon lukujen perusteella laadittu kuvaaja.

⁹ Hayashi, s. 397

¹⁰ Clark, s. 19

Aryabhata I (476-550)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = ?$$



Aryabhata I eli Aryabhata vanhempi (erotuksena samannimisestä, mutta 400 vuotta myöhemmin eläneestä matemaatikosta) eli Intiassa 400- ja 500-lukujen vaihteessa. Hän laati *Aryabhatiyā*n vain 23 vuoden ikäisenä vuonna n. 500. Aryabhatiya oli, kuten muutkin ajan intialaiset kirjoitelmat, runomuotoinen ja se sisälsi 118 jaetta. Matemaattiset kaavat hän ilmaisee sanallisesti, ilman perusteluja. Kirjoitelmasta löytyy monia oikeita sääntöjä, mutta samassa lauseessa saattaa esiintyä myös täysin virheellinen kaava. Esimerkiksi Aryabhata toteaa, että kolmion ala saadaan kertomalla kolmion korkeus kannan puolikkaalla ja jos laskettava on kolmiopohjaisen pyramidin tilavuus saadaan se kertomalla pohjakolmion puolikas pyramidin korkeudella. Ympyrän alalle hän antaa aivan oikean säännön, kerro ympyrän kehän puolikas halkaisijan puolikkaalla. Ehkä yllättävin kirjasta löytyvä sääntö kertoo kuinka voidaan laskea aritmeettisen lukujonon peräkkäisten jäsenten summa eli Aryabhata tunsi kaavan $\frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$.¹¹

¹¹ Clark, s. 26-27, 35-36
erkki.luoma-aho@jkl.fi

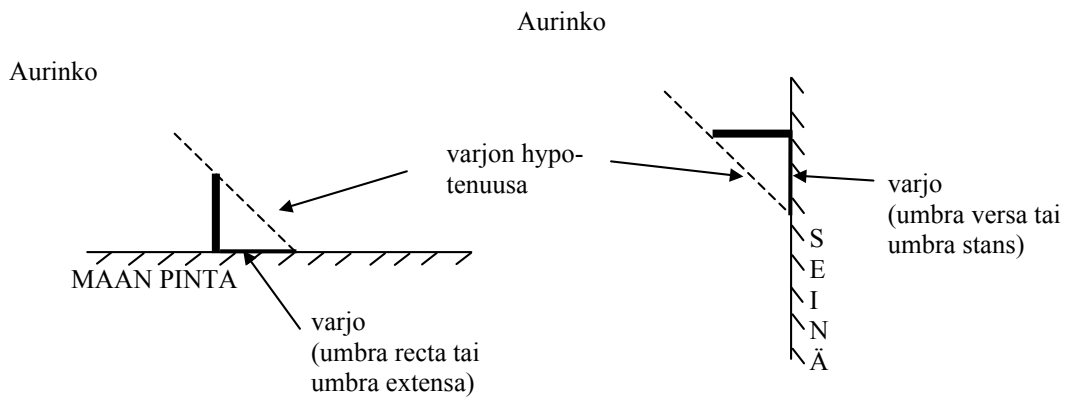
3.2.4. Arabimatemaatikot keskiajalla

Aluevalloitusten myötä arabit saivat käsiinsä sekä kreikkalaisia että intialaisia trigonometrisia kirjoituksia. Arabioppineet päätyivät suosimaan intialaisten jänteiden puolikkaisiin perustuvaa trigonometriaa kreikkalaisten jännetaulukoiden kustannuksella.

Sini

Aryabhata käytti *Aryabhatiyassa* jänteen puolikkaista nimitystä *ardha-jya* tai *jya-ardha*, mutta hän käytti usein myös lyhennystä *jyā* tai *jiva*. Kääntäessään *Aryabhatiyān* arabiaksi kääntäjät kehittivät sanan *ardha-jya* tilalle sinänsä merkityksettömän sanan *jiba*. Arabia kuuluu seemiläisiin kieliin, joissa kirjoitetaan pelkät konsonantit ja vokaalit täydennetään luettaessa tarpeen mukaan. Sanan *jiba* konsonantit antoivatkin mahdollisuuden lukea sen myös muodossa *jaib*, joka tarkoittaa laskosta, taitosta, poukamaa tai lahtea. Kun italialainen Gerard Cremonalainen (1114–1187) käänsi *Aryabhatiyān* arabista latinaksi noin vuonna 1150 valitsi hän sanan *jiba* vastineeksi latinan kielen sana *sinus*, joka merkitsee laskosta, taitosta tai lahtea. Sana *sinus* on sitten asettunut useimmissa romaanisissa kielissä muotoon *sine* ja suomen kielessä muotoon *sini*.

Habash al-Hāsib n. 830 Arabimatemaatikko, muinaisen silkkitien varrella, nykyisen Turkmenistanin alueella, Marwin kaupungissa elänyt Habash al-Hāsib (k. 864–874) esitteli 830-luvulla ensimmäisen kerran tangentin käsitteen. Tangentti liittyi tosin hänellä ja muillakin myöhemmillä arabimatemaatikoilla erityiseen varjon pituuksien teoriaan, jossa keskeistä oli tarkkailla tietyn pituisen mittatikun varjon pituuksia suhteessa auringon korkeuskulmaan. Oleellinen sisältö näissä mitauksissa on kuitenkin sama kuin nykyaikaisessa tangentissa, joten Habash al-Hasibia voidaan oikeutetusti pitää tangentin kehittäneenä matemaatikkona. Tangentin lisäksi hän laati taulukon kotangentille. Hän laati myös monenlaisia muitakin taulukoita, liittyen mm. päivän pituuteen ja auringon nousuaikaan. Näistä syistä al-Hāsib sai aikalaisiltaan lempinimen ”laskija”.



Kuva 36.

(Kuvion lähde lat. nimitysten osalta: Smith II, s. 620)

Kuva 37.

Al-Battānī n. 900

Al-Battānī (858–929), joka tunnetaan myös latinalaisella nimellä Albatenius, kirjoitti vuoden 900 tienoilla teoksen nimeltä *Zīj*. Nimi *Zīj* on tekninen termi, joka tarkoittaa astronomista taulukkoa, mutta teos on paljon muutakin kuin vain taulukkokirja. Kirjan esipuheessa al-Battānī kirjoittaa, että hänen tarkoituksenaan on laatia teos, jossa hän korjaa edeltäjiensä tekemät virheet ja epä johdonmukaisuudet. Hän mainitsee nimeltä Ptolemaioksen, joka oli vaatinut, että hänen jälkeensä tulevien on parannettava hänen teorioitaan ja päätelmiään, kuten hän oli parannellut Hipparkhoksen ja hänen edeltäjiensä tuloksia.

Al-Battānīn tekstistä löytyvä tärkein trigonometrinen edistysaskel oli kosinin kirjallinen ensiesiintyminen. Tämä tapahtui, kun hän kirjoitti teoksessaan *wātar ma yabqā li-tamām...ilā tisīn* eli "komplementtikulman sini ... kulmalle 90°". Itse sana kosini on myöhemmää perua, se seipitetty vasta 1500-luvulla.

Abu al-Wafā n. 970

Kolmas tärkeä trigonometriaa edistänyt arabimatemaatikko oli Bagdadissa asunut Abu al-Wafā (940-998), joka yhtenäisti siihenastisen trigonometrisen teorian ja esitti kaikki kuusi trigonometrista funktiota yhtenäisessä muodossa. Myös al-Wafān aikalaisen al-Bīrūnīn (973-1048) kirjoituksissa käsitellään kaikkien trigonometristen funktioiden välisiä riippuvuussuhteita ja esimerkkejä niiden soveltamista. Al-Bīrūnī esitteli kirjoituksissaan sinilauseen yhdessä sen todistuksen kanssa.

Al-Battānī (858-929)

Al-Battānī on yksi merkittävimpiä keskiajan islamilaisista tähtitieteilijöistä, joka elämästä tosin on tarjolla vain niukalti tietoja. Hän syntyi Harranissa, joka sijaitsee nykyisen Turkin alueella, Syyrian rajan läheisyydessä. Tiedetään, että Al-Battānī teki ensimmäiset tähtitieteelliset havaintonsa vuoden 877 tienoilla, mistä myös hänen synnyinaikansa on päätelty. Hän on jatkanut tähtitieteellisten havaintojen tekemistä varmuudella ainakin vuoteen 918 saakka. Hänen tärkeimmät saavutuksensa liittyvät nimenomaan tähtitieteeseen. Al-Battānī laski vuoden pituudelle aiempaa tarkemman arvon, saaden tulokseksi 365 vuorokautta 5 tuntia 46 minuuttia ja 24 sekuntia. Tulos on 2 minuuttia 22 sekuntia liian lyhyt, mutta kuitenkin lähempänä oikeaa kuin Ptolemaioksen laskelma, joka on 6 minuuttia ja 26 sekuntia liian pitkä. Al-Battānī laski myös sekä ekliptikan kaltevuudelle (23°35') että kevätpäiväntasauksen siirtymiselle aiempaa tarkemmat arvot.

Matematiikan osalta Al-Battānī teki merkittävimmät tulokset trigonometriaan liittyen mm. käyttäessään ensimmäisenä kosinia. Pääasiassa juuri al-Battānīn käännettyjen töiden kautta Eurooppa tuli tuntemaan Intiassa kehitetyn "puolijänteen" eli sinin.

Al-Battānī oli uskonnoltaan muslimi, mutta hänen perheensä tunnusti muinaista Mesopotamialaista uskontoa, jonka luonteeseen kuului mm. tähtien palvonta. Tämä saattaa olla eräs syy hänen innostukselleen astronomiasta. Al-Battānī teki suurimman osan havainnoistaan nykyisen Syyrian pohjoisosassa sijaitsevassa kaupungissa nimeltään ar-Raqqah. Hän ilmeisesti nautti eläessään ar-Raqqahin asukkaiden arvostusta, sillä kaupunkilaisten tultua kohdeltua epäoikeudenmukaisesti verotuksessa, lähettivät asukkaat Al-Battānīn pääkaupunkiin Bagdadiin esittämään vastalauseen kohtelustaan. Al-Battānī oli matkaan lähtiessään jo 70 vuotta täyttänyt vanhus. Hän pääsi hyvin perille ja saattoi esittää protestinsa ar-Raqqahdin asukkaiden puolesta. Pitkä ja vaivalloinen matka Bagdadiin oli kuluttanut hänen voimiaan kuitenkin niin paljon, että paluumatkan raskaudet osoittautuivat liian suuriksi ja hän menehtyi Samarran kaupungissa 125 km Bagdadista pohjoiseen 71-vuotiaana.

3.2.5. Trigonometria itsenäistyy Euroopassa keskiajan lopulla

Eurooppa keskiajalla

Keskiajalla Euroopassa ei tapahtunut matemaattista edistymistä. Matematiikka uinui tuhatvuotista unta. Trigonometrian kehityksen kannalta keskeisin tapahtuma oli *Almagestin* latinankielisen käännöksen ilmestyminen liki 1000 vuotta sen kirjoittamisen jälkeen 1100-luvulla. Matemaattinen harrastuneisuus kuitenkin lisäntyi vähitellen ja kiinnostus myös trigonometriaa kohtaa kasvoi. Ensimmäisinä merkkeinä tästä on Ranskalaisen Levi ben Gersonin (1288-1344) vuonna 1342 julkaissama kirjoitelma *De sinibus, chordis et arcubus*¹². Siinä hän opettaa ratkaisemaan sekä suorakulmaisen että vinokulmaisen kolmion ja hän myös todistaa sinilauseen, mikä ei ollut siihen aikaan lainkaan tavanomaista. Hänen työnsä ei kuitenkaan ollut omaperäinen, sillä arabimatemaatikot olivat tunteneet mm. sinilauseen jo useita satoja vuosia. Työ ei edes levinnyt kovin laajalle. Regiomontanus, trigonometrian kehitykseen ratkaisevasti vaikuttanut saksalainen matemaatikko, ei ilmeisesti ollut tietoinen ben Gersonin työstä. Gerson kuitenkin osoittaa, että kiinnostus trigonometriaa kohtaan oli heräämässä.

Regiomontanus 1460

Johannes Müller eli latinankieliseltä nimeltään Regiomontanus kirjoitti vuonna 1464 kautta aikojen ensimmäinen pelkkään trigonometriaan keskittyneen teoksen *De Triangulis Omnimodis* (Kaikenlaisista kolmioista). Regiomontanuksen lähestymistapa oli Eukleideen tapaan aksioomiin tai aikaisempiin tuloksiin perustuvaa ja hän myös todisti kaikki lauseensa tarkasti. Lisäksi hän varusti tulokset kuvilla ja selventävillä esimerkeillä. *De Triangulis* koostuu itse asiasta neljästä kirjasta, joista kirjat I ja II käsittelevät tasogeometriaa ja loput kaksi pallogeometriaa. *De Trianguliksien* ilmestyminen on tärkeä merkkipaalu trigonometrian historiassa, sillä tähän saakka trigonometriset laskelmat olivat olleet vain osa tähtitieteilijän työtä, eivät itsenäinen opiskelun kohde. Teos myös levisi hyvin laajalle ja sitä opiskeltiin huolellisesti ympäri Euroopan. Sen innoittamana myös julkaistiin eri maissa useita likimain samansisältöisiä trigonometrian kirjoja.

Trigonometrian ja astronomian suhteesta 1400-luvulla saa hyvän kuvan Regiomontanuksen *De Triangulis Omnimodiksien* esipuheen otteesta:

Kukaan ei voi ohittaa kolmioiden tiedettä ja saavuttaa tyydyttäviä tietoja tähdistä. Sinun, joka tahdot opiskella suuria ja ihmeellisiä asioita ja olet utelias tuntemaan tähtien liikkeitä täytyy lukea nämä kolmioiden teoriat. Niiden tuntemus avaa ovet tähtitieteeseen ja geometrisiin tehtäviin.

Vaikka Regiomontanuksen sanoista välittyy käsitys, että trigonometria on olemassa ikään kuin palvellakseen astronomiaa, niin kirja kuitenkin repäisi särön trigonometrian ja astronomian välille, sillä ensi kertaa trigonometriaa opiskeltiin omana alanaan.

¹² Vapaasti suomennettuna ”Sineistä, jäniteistä ja ympyränkaarista”.

Ympyrä sulkeutuu

Regiomontanuksen *De Triangulis Omnimodis* oli astronomi Nikolaus Kopernikuksen trigonometrian oppikirja. Kopernikuksen henkilökohtaisesti käyttämä ja hänen omakätisillä reunahuomautuksilla varustamansa kopio on säilynyt osoittaen, että Kopernikus perehtyi tarkasti Regiomontanuksen laatimaan trigonometrian kirjaan.

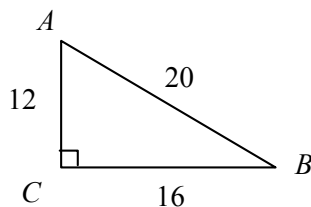
Trigonometrian opiskelu antoi Kopernikukselle välineet suorittaa riittävän tarkat havainnot ja laskemat ja siten ymmärtää vastoin vallitsevaa käsitystä, että Maa ja muut planeetat kiertävät aurinkoa. Kopernikuksessa voidaanakin nähdä Hipparkhoksesta alkaneen ympyrän sulkeutuvan: Trigonometria syntyi maakeskisen kosmologisen systeemiin liittyvien laskelmien suorittamisen helpottamiseksi, mutta Hipparkhoksen alulle panema trigonometria johdatti lopulta Kopernikuksen hylkäämään koko maakeskisen järjestelmän.

Esipuheen mukaisesti Regiomontanus johdattaa kirjassaan lukijansa perusteellisesti tuntemaan trigonometrian perusteet. Esimerkiksi kirjan I lauseessa 27 hän kirjoittaa:

Jos tunnetaan suorakulmaisen kolmion kaksi sivua, niin kolmion kaikki kulmat voidaan määrittää.

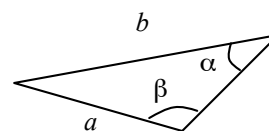
Välittömästi lauseen jälkeen, kuten muidenkin lauseiden kohdalla, Regiomontanus käy läpi tarkasti eri tilanteet ja osoittaa, että kaikissa tilanteissa kulmat ovat selvittävissä sinitaulukoiden avulla. Todistuksen jälkeen hän antaa vielä havainnollistavan esimerkin:

Esimerkiksi, jos AB on 20, AC on 12 ja BC on 16 ja täysi sini meidän taulukossamme on 60 000, niin kerro 60 000 luvulla 12, jolloin saat 720 000, joka jaettuna luvulla 20 antaa 36 000. Tälle sinitaulukko antaa kaaren noin 36° 52 minuuttia. Tämä on $\angle ABC$, joka vähennettynä luvusta 90° on lopulta 53° 8 minuuttia, toisen terävän kulman suuruus.



Kuva 38.

Kirja I, lause 27, esimerkki



Kuva 38.

Kirja II, lause 1, sinilause

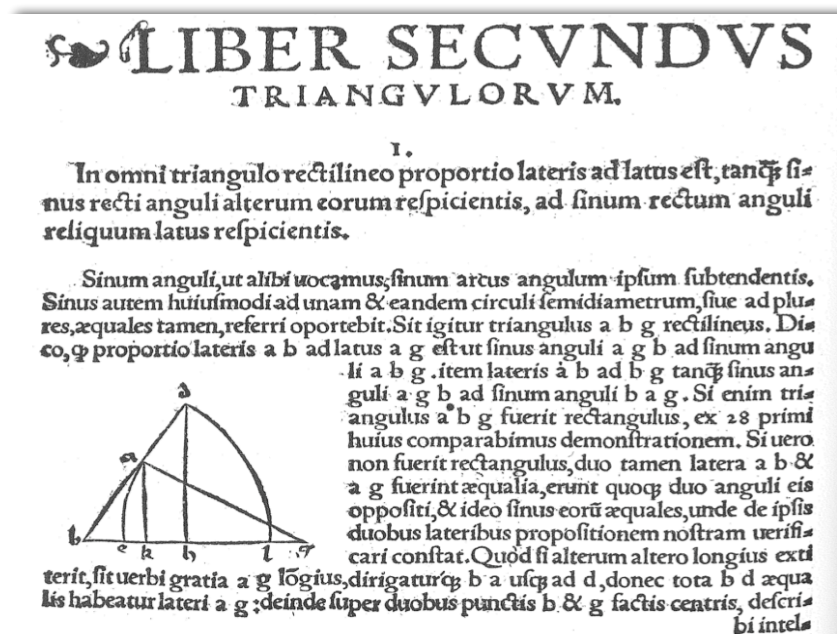
Kirjan II ensimmäistä lausetta pidetään erityisen tärkeänä, koska siinä Regiomontanus esittelee sinilauseen. Lähteenä hänellä on ollut jokin arabialainen matemaatikko, mahdollisesti al Biruni:

Jokaisessa suoraviivaisista sivuista muodostuvassa kolmiossa sivun suhde toiseen on samaa kuin sivun vastaisen kulman sinin suhde toisen sivun vastaisen kulman siniin.

Symbolisesti esitettynä Regiomontanuksen muotoilu vastaa verrantomuotoista

yhtälöä $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. On kuitenkin helppo huomata, että edellinen verranto vastaa nykyisin oppikirjoissa esiintyvää muotoa

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$



Kuva 13. De triangulis omnimodis, II kirjan ensimmäinen kappale, jossa Regiomontanus esittelee ja todistaa sinilauseen.

Kirjan II lauseissa 4 ja 5 hän sitten kuvailee missä tilanteissa sinilauseen avulla on mahdollista ratkaista kolmio:

Lause 4. Jos minkä tahansa erisivuisen kolmion kaksi kulmaa sekä yksi sivu on annettu, niin toiset sivut ovat helposti laskettavissa.

Lause 5. Jos kolmion kaksi sivua on annettu yhdessä toisen sivun vastaisen kulman kanssa, niin loput kulmat sekä kolmas sivu voidaan määrittää.

Sinilauseen lisäksi kirjan II lauseessa 26 on ensimmäistä kertaa nähtävillä kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava.

Regiomontanus (1436-1476)

Saksalainen Johannes Müller eli latinalaiselta nimeltään Regiomontanus oli aikansa merkittävin matemaatikko ja astronomi. Nimen Regiomontanus Johannes Müller omaksui kotikaupunkinsa Königsbergin ("Kuninkaan vuori") sanataarkasta latinankielisestä nimestä Regio Monte.

Regiomontanus oli lahjakas nuori, joka lähetettiin jo 12-vuotiaana opiskelemaan noin 1 000 kilometrin päähän kotikaupungistaan Leipzigiin, josta valmistuttuaan hän muutti Wieniin vuonna 1450, jossa jatkoi opintojaan.

Georg von Peurbach, Regiomontanuksen opettaja Leipzigin yliopistossa, oli aloittanut paavin toiveesta Ptolemaioksen *Almagestin* käännöstyön, joka kuitenkin oli vielä pahasti kesken hänen sairastuttuaan vakavasti.

Kuolinvuoteellaan Peurbach uskoi käännöksen loppuunsaattamisen Regiomontanuksen haltuun. Regiomontanus, joka piti Peurbachia pikemmin isänään kuin opettajaan omistautuikin työlleen mm. opetellen kreikan kielen, jotta ymmärtäisi alkuperäistä kreikankielistä tekstiä. Hyvällä kreikan kielen

taidoillaan, matemaattisilla lahjoillaan ja määrätietoisella työllä hän pystyi laatimaan erinomaisen *Almagestin* käännöksen, jolle hän antoi nimen *Epytoma in Almagesti Ptolemei* eli "Ptolemaioksen *Almagestin* Tiivistelmä".

Käännöstyönsä innoittamana Regiomontanus laati hyvin kunnianhimoisen suunnitelman kääntää ja julkaista omassa kirjapainossaan lukuisan määrän muitakin kreikkalaisten matemaattisia klassikkoteoksia yhdessä omien teostensa kanssa. Suunnitelmat jäivät kuitenkin toteutumatta, sillä hän sairastui vakavasti ja kuoli Roomassa vuonna 1476, vasta 40-vuotiaana. Roomaan hän oli matkustanut paavin kutsumana johtaakseen kirkollisen kalenterin uudistystä. Kuoleman syyksi arvellaan jotakin kulkutautia, joskin pian kuoleman jälkeen alkoi levitä huhuja, että erään matemaattisen kilpailijan kateelliset pojat olisivat myrkyttäneet Regiomontanuksen.

Vuonna 1474 Regiomontanus julkaisi teoksen *Ephemerides*, johon hän oli laskenut taivaankappaleiden päivittäiset sijainnit taivaalla vuosille 1475-1506. Löytöretkeilijä Kristoffer Kolumbus käytti tämän teoksen tietoja "ennustaessaan" vihamielisille Uuden mantereen asukkaille 29.2.1504 tapahtuneen Kuunpimennyksen.

Trigonometriset taulukot

Keskeinen osa trigonometriaa aina taskulaskinten ja tietokoneiden kehittämiseen saakka olivat trigonometriset taulukot ja erityisesti sinitaulukko. Taulukoiden tarkkuus ja virheettömyys olivat luotettavien laskelmien edellytys. Taulukoiden laadinta oli suuritöistä ja hidasta puuhaa. Siksi hyvien taulukoiden laatijat nauttivatkin suurta arvostusta.

Hipparkhoksen laatima ensimmäinen jännetaulukko ei ole säilynyt, mutta Ptolemaioksen noin vuonna 150 laatimat taulukot ovat kuitenkin olemassa. Näissä ensimmäisissä säilyneissä trigonometrisissä taulukoissa Ptolemaios laski jänteen puolen asteen välein alkaen $0,5^\circ$ kaaresta päätyen 180° kaareen. Jänneiden pituudet hän ilmoitti kahden seksagesimaalin eli kuusikymmenjärjestelmän murtoluvun tarkkuudella. Desimaalisessa järjestelmässä ajateltuna hänen tuloksensa ovat oikein noin viiden desimaalin tarkkuudella.

Islamin sotaisan ekspansion rauhoituttua ja arabimatemaatikoiden opittua edeltäjiensä trigonometriset taidot he paransivat huomattavasti sinitaulukoiden tarkkuutta. Vuoden 850 tienoilla Habash al-Hāsib (n. 770-870) laati sinitaulukon 1° välein kolmen seksagesimaalin tarkkuudella. Puolivuosisataa myöhemmin eli noin vuonna 900 al-Battānī laati taulukon, jossa sinit oli laskettu $\frac{1}{2}^\circ$ asteen välein kolmen seksagesimaalin tarkkuudella. Tästä noin 30 vuoden kuluttua al-Bīrūnī laati sinitaulukon, jossa kulmat on laskettu $\frac{1}{4}^\circ$ välein neljän seksagesimaalin tarkkuudella. Ulūgh Beg saavutti vielä viiden seksagesimaalin tarkkuuden sinitaulukossaan, jossa arvot oli laskettu yhden asteminuutin välein. Ulūgh Begin taulukon pohjana oli 18 desimaalin tarkkuudella laskettu sinin arvo, $\sin 1^\circ = 0,017452406437283571$, jossa on 16 oikeaa desimaalia ja vasta 17. desimaali on virheellinen.

Regiomontanus laati 1400-luvulla trigonometrian teorian lisäksi myös sinitaulukkoita. Hän käytti ympyrän säteen arvona (sinus totus, $\sin 90^\circ$) lukua 60 000 sekä myöhemmin lukuja 10 000 000 ja jopa 600 000 000. Ennen tätä niin arabit kuin muutkin taulukoiden laatijat olivat noudattaneet Ptolemaioksen tapaa ja valinneet sinus totuksen arvoksi luvun 60 sekä käyttäneet jänneiden pituuksissa kuusikymmenjärjestelmän murtolukuja. Suurella sinus totuksen arvolla Regiomontanus pystyi laatimaan tarkkoja taulukoita ja samalla välttämään murtolukujen käytön. On hyvä muistaa, että kokonaislukujen 10-järjestelmä ja paikkamerkintä tuli Euroopassa yleisesti tietoon vasta 1200-luvulla Leonardo Pisalaisen *Liber abacin*. Desimaaliluvut otettiin ensi kerran Euroopassa käyttöön Simon Stevinin esityksestä 1500-luvun lopulla, mutta ne yleistyivät vasta logaritmitaulukoiden myötä 1600-luvun alkupuolella.

George Rheticus uudisti 1500-luvulla taulukointikäytäntöä laatimalla kosinille oman taulukkonsa ja lyhentämällä taulukot käsittämään vain kulmat $0^\circ - 45^\circ$ ja viittaamalla yli 45° kulmien osalta komplementtikulman taulukkoon. Taulukoissaan hän valitsi kolmion hypotenuusan eli sinus totuksen arvoksi 10 000 000. Sinin ja kosinin arvot hän määritteli $10''$ välein. Tangentin ja sekantin taulukoihin hän valitsi entistään suuremman sinus totuksen arvon, luvun 10^{15} .

Taulukko 4. Tietoja sinitaulukoista

Laatija	Vuosiluku	Astelukujen väli	Käytetty tarkkuus
Ptolemaios	150	$\frac{1}{2}^\circ$ (jännetaulukko)	3 seksagesim. (viisi desimaalia)
Habash al-Hāsib	850	1°	3 seksagesim. (viisi desimaalia)
al-Battānī	900	$\frac{1}{2}^\circ$	3 seksagesim. (viisi desimaalia)
al-Bīrūnī	1030	$\frac{1}{4}^\circ$	4 seksagesim. (seitsemän desimaalia)
Ulūgh Beg	1440	$1' = \frac{1}{60}^\circ$	5 seksagesim. (yhdeksän desimaalia)
Regiomontanus	1450	$1'$	yhdeksän desimaalia
Rheticus	1590	$10'' = \frac{1}{360}^\circ$	kymmenen desimaalia

Rheticus 1550

Tähän saakka kaikissa trigonometriaa käsitelleissä kirjoissa, myös Regiomontanuksen laatimassa, lähtökohtana oli ollut janteen puolikasta vastaavan *kaaren* asteluku, ei janteen puolikasta vastaavan *keskuskulman* asteluku. Regiomontanus kyllä huomautti, että lähtökohdaksi voitaisiin ottaa keskuskulma, mutta ei kuitenkaan muuttanut tältä osin käytäntöä.

Muutoksen toi sen sijaan Regiomontanuksen oppilas, itävaltalainen George Joachim Rheticus (1514-1576), joka teki matemaattista historiaa määrittämällä vuonna 1551 ilmestyneessä kirjasessaan *Canon doctrinae triangulorum* kaikki kuusi trigonometrista funktiota suorakulmaisen kolmion sivujen suhteiden avulla turvautumatta ympyrän kaariin. Lisäksi Rheticus uudisti taulukointikäytäntöä laatimalla kosinille oman taulukkonsa ja lyhentämällä taulukot käsittämään vain kulmat 0° - 45° ja viittaamalla yli 45° kulmien osalta komplementtikulman taulukkoon.

George Joachim Rheticus (1514-1574)

George Rheticuksen isä, George Iserin, toimi lääkärinä kotikaupungissaan Itävallan Feldkirchissa vuoteen 1528 saakka, jolloin hänet mestattiin noituudesta syytettynä. Lisärangaistuksena sukunimeä Iserin ei saanut enää käyttää, joten Rheticuksen italialainen äiti, Thomasina de Porris, palautti itselleen ja lapsilleen tyttönimensä. George-poika vierasti uutta italialaista nimeä ja käänsi sukunimekseen von Lauchen. Molemmat tarkoittavat kuitenkin samaa, vapaasti käännettynä "Purjosipulinen". Myöhemmin George kyllästyi nimeensä ja otti uudeksi nimekseen Rheticus, sillä hänen synnyinpaikkansa sijaitsi muinaisen Rooman Rhaetian provinssissa.

Rheticus opiskeli ensin Feldkirchin latinalaisessa koulussa, sitten Zürichissä ja lopulta uskonpuhdistuksen keskuksessa, Wittenbergin yliopistossa, josta hän valmistui 1536. Uskonpuhdistaja Martti Lutherin läheisen työtoverin Philipp Melanchthonin myötävaikuttamana Rheticus sai pian valmistuttuaan yliopistosta paikan aritmetiikan ja geometrian opettajana.

Kesällä 1539 Rheticus matkusti Fromborkiin, nykyisen Puolan alueelle, tapaamaan Kopernikusta. Keskusteluissa Kopernikuksen kanssa hän vakuuttui pian uudesta Aurinkokeskisestä systeemistä ja jäi saman tien kahdeksi vuodeksi opiskelemaan tähtitiedettä Kopernikuksen johdolla. Kopernikus, joka vielä tässä vaiheessa vastusteli tulostensa julkaisemista suostui kuitenkin Rheticuksen toiveeseen julkaista *Narratio prima* ("ensimmäinen raportti"), joka oli ensimmäinen painettu Aurinkokeskeisen järjestelmän esitys. Koska *Narratio prima* ei kohdannutkaan sitä vihamielistä vastustusta, jota Kopernikus oli pelännyt hän rohkaistui julkaisemaan kirjansa *De revolutionibus orbium coelestium libri vi*. Kopernikus uskoi käsikirjoituksen Rheticuksen haltuun, joka järjesti sen painatuksen Nürnbergissä, jossa se lopulta painettiin vuonna 1543, Kopernikuksen kuolinvuonna.

Rheticus palasi syksyllä 1541 takaisin Wittenbergiin, jossa hän julkaisi jo seuraavan vuoden alussa kirjan *De lateribus et angulis triangulorum*, joka on Kopernikuksen *De revolutionibus* -kirjan trigonometrian osuus lisättynä Rheticuksen itse laskemilla trigonometrisillä taulukoilla.

Syksyllä 1542, oltuaan vain vuoden Wittenbergissä, Rheticus valittiin Leipzigin yliopiston matematiikan professoriksi. Vuonna 1551 Rheticus aiheutti Leipzigin pahan skandaalin saadessaan syytteen homoseksuaalisesta suhteesta oppilaaseensa. Mikään ei voinut auttaa häntä tässä tilanteessa ja niin Rheticus pakeni nopeasti Leipzigista ja muutti Prahaan. Hänet tuomittiin rikkeestään poissaolevana 101 vuodeksi vankeuteen.

Kuitenkin juuri ennen pakomatkaansa Rheticus ehti julkaisi teoksen *Canon doctrinae triangulorum*, joka oli tärkeä etappi trigonometrian kehityksessä. Teos oli tarkoitettu johdannoksi myöhemmin ilmestyväksi tarkoitettulle pääteokselle. Rheticus kuitenkin menehtyi vuonna 1576, ennen kuin ehti saada koko teoksen, *Opus Palatinum de triangulis*, valmiiksi. *Opus Palatinum*in viimeisteli ja nimesi hänen oppilaansa Valenthine Otho. Kirjan nimi on kunnianosoitus Othon tukijalle ja suojelijalle vaaliruhtinas Frederik IV:lle, joka toimi

kolmikymmenvuotisen sodan aikana protestanttien puolustuksen johtajana ja käytti kunnianimeä Palatinate (saks. Pfalz). Vaikka Rheticus oli tehnyt "kahdentoista vuoden työn" teoksen eteen hänen jälkeensä jääneiltä kului lopulta kaksi vuosikymmentä saada se julkaisukuntoon ja se painettiin vasta vuonna 1596. Rheticuksen pääteos sisältää kuuden trigonometrisen funktion taulukot laskettuna 10 kulmasekunnin välein kolmiosta, jonka hypotenuusa on 10^{10} .

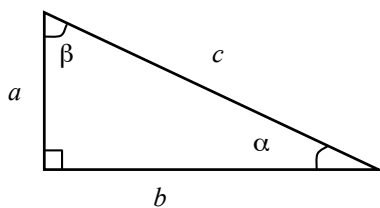
Fincke 1580

Vuonna 1583 julkaisi tanskalainen matemaatikko Thomas Fincke (1561-1656) kirjan *Geometria Rotundi*, jossa käytettiin ensimmäisen kerran tangentista ja sekantista nykyaikaan säilyneitä nimityksiä "tangent" ja "secant". Fincke on ilmeisesti ainut pohjoismaalainen matemaatikko, joka on jättänyt nimensä trigonometrian historiaan. Fincke lyhensi kirjassaan trigonometriset funktiot muotoon "sin.", "tan." ja "sec." sekä "sin. com.", "tan. com." ja "sec. com.", joista kolme viimeistä tarkoittavat komplementtikulmille määrättyjä siniä, tangenttia ja sekantia eli kosinia, kotangenttia ja kosekanttia.

Gunter n. 1600

Lyhenteitä "sin" ja "tan" ilman pistettä käytti ensimmäisen kerran englantilainen ministeri ja astronomian professori Edmund Gunter (1581-1626) eräänlaisen laskutikun piirustuksissa. Hän myös sepitti sanan "cosini.", jolle hän käytti lyhennettä "cosi."

Kosini eli komplementtikulman sini



Latinan sanojen *compleo* "täyttää", "täydentää" ja *co-* "yhdessä" mukaisesti komplementtikulmat täyttävät yhdessä suoran kulman. Komplementtikulmiksi sanotaankin kahta kulmaa, joiden summa on 90° , joten suorakulmaisen kolmion terävät kulmat ovat aina komplementtikulmia.

Kosini on nimensä mukaisesti "komplementtikulman sini". Oheisen kuvion mukaan kulman α komplementtikulma on β ja tämän kulman sini on kateetin b ja hypotenuusan c suhde, joten $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.

Suorakulmaisessa kolmiossa tietyn terävän kulman kosini ja tämän kulman komplementtikulman sini ovat aina täsmälleen sama suhde:

$\cos \alpha = \sin \beta$ ja $\cos \beta = \sin \alpha$. Tätä ilmiötä Rheticus käytti hyväkseen hänen lyhentäessään sinin ja kosinin taulukot käsittämään vain kulmat $0^\circ - 45^\circ$.

Jokainen suorakulmainen kolmio voitaisiin ratkaista käyttäen pelkästään siniä ja Pythagoraan lausetta, kosini ja tangentti ovat tässä suhteessa tarpeettomat. Käytännössä laskut kuitenkin yksinkertaistuvat käytettäessä näitä kahta sinin lisäksi.

Pitiscus n. 1600

Seuraava tärkeä nimityksiin liittyvä askel oli saksalaisen Bartholomeo Pitiscuksen (1561-1613), vuonna 1595 ilmestynyt trigonometrian oppikirja *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus*¹³. Kirjan nimessä esiintyy nimittäin ensimmäistä sana trigonometria. Rheticuksen tavoin hän käsittelee kirjassaan kaikkia kuutta trigonometrasta funktiota. Pitiscuksen vuonna 1595 julkaisema *Trigonometria* kohosi nopeasti arvostetuksi trigonometrian oppikirjaksi Saksan kaikissa yliopistoissa. Se myös käännettiin sekä englannin että ranskan kielelle pian 1600-luvun alussa. Kirjan sisältö on likimain seuraava: trigonometrysten funktioiden määritelmät, menetelmä trigonometrisen taulukon laatimiseksi, ohjeita kolmion ratkaisemiseksi sekä trigonometrysten funktioiden perusyhteydet.

Murrosvaihe

Regiomontanuksen johdattamana trigonometrian teoria oli kehittynyt nopeasti: noin sadassa vuodessa oli trigonometria irrottautunut astronomian alta omaksi alakseen, jota opiskeltiin jo sen itsensä takia. Myös nimitykset ja merkinnät olivat hyvää vauhtia saamassa meillemkin tuttua muotoa. 1600-luvulle tultaessa trigonometria oli saavuttanut eräänlaisen huipennuksen laskennallisena apuvälineenä. Seuraava kehitysvaihe liittyy yleiseen algebrallisten merkintöjen ja abstraktion tason kasvuun. Yksi tärkeimmistä algebran kehitykseen panoksensa antaneista oli ranskalainen parlamentaarikko ja harrastelijamatemaatikko François Viète, joka edesauttoi myös trigonometrian kehittymistä analyttisempään muotoon.

Bartholomeo Pitiscus (1561-1613)

Bartholomeo Pitiscus on kotoisin Grünbergistä (nyk. Zielona Gora Puolassa). Hän opiskeli kalvinilaista teologiaa Heidelbergissä, Saksassa ja toimi Breslaussa linnan kappalaisena. Elämänsä viimeisinä vuosina hän toimi Evankelisen unionin johtajan, vaaliruhtinas Fredrik IV:n hovissa saarnaajana. Frederik IV oli myös Rheticuksen oppilaan Othon suojelija, kun tämä viimeisteli Rheticuksen taulukkokirjan *Opus palatinum de triangulis*. Pitiscus oli ennen kaikkea teologi, joka harrasti myös matematiikkaa.

Pitiscus tarkasti George Rheticuksen laatimat taulukot lisäten niiden tarkkuutta ja korjaten niissä olleita virheitä. Hän myös laati systemaattisen trigonometrian kirjan, *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus*, jonka nimessä esiintyy ensimmäisen kerran painettuna sana trigonometria.

Vuonna 1596 Rheticuksen ja Othon yhteistyön tuloksena julkaistun *Opus palatinum de triangulis* tangentti- ja sekanttitaulukoiden löydettiin pian systemaattinen virhe koskien kulmia yli 83° . Pitiscus päätti korjata taulukot ja laski uudelleen kyseiset arvot sillä seurauksella, että 86 sivua täytyi muuttaa ja painaa uudelleen.

Vuonna 1607 Pitiscus sai valmiiksi toisen kirjansa *Thesaurus Mathematicus*, jossa oli sinitaulukko laskettuna $10''$ välein käyttäen kolmion hypotenuusana lukua 10^{15} ja erityisesti sinin arvoja laskettuna 22 numeron tarkkuudella. Osa kyseisen kirjan käsikirjoituksista oli peräisin Rheticuksen jäämistöstä, johon Pitiscus pääsi käsiksi Othon vuonna 1603 tapahtuneen kuoleman jälkeen.

¹³ Boyer, s. 439-440; Katz, s. 401, Smith II, s. 611
erkki.luoma-aho@jkl.fi

3.2.6 Trigonometria muuttuu analyyttiseksi

Viète 1580



François Viète
(1540-1603)

François Viète, jonka merkitystä ns. kirjainalgebran perustajana käsitteimme jo aiemmin. Hän, modernin matematiikan edelläkävijä, sovelsi uutta analyyysiään menestyksellä myös trigonometriaan. Aiemmin esimerkiksi Regiomontanuksen sini-lauseen ja Pitiscuksen sini- ja kosinilauseen todistukset olivat täysin sanallisia ja perustuvat geometriseen päättelyyn, joihin on yhdistetty sanallisella tasolla olevaa algebraa. Algebrallisten merkintöjen kehittyminen oli välttämätöntä, jotta myös trigonometria saattoi kehittyä.

Vièten julkaistessa vuonna 1579 kirjan *Canon mathematicus seu ad triangula* eli "Kolmioihin sovelletut matematiikan lait" koitti trigonometriassa uusi aikakausi hänen kääntäessä huomiota pelkästä kolmion ratkaisemisen menetelmien kehittämisestä pohtimaan saman kulman eri trigonometrysten funktioiden välisiä yhteyksiä. Hän oli ensimmäinen matemaatikko, joka omasi riittävän algebrallisen koneiston tähän. Viète mm. johtaa nykymerkinnöin esitetyt kaavat

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \text{ ja}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

Trigonometrian soveltaminen algebraan

Viète osasi myös yhdistää trigonometriaa algebralliseen yhtälönratkaisuun menestyksellisesti. Esimerkiksi hän löysi yhtälölle $x^3 = 1$ seuraavat kolme ratkaisua: $x_1 = 1$, $x_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ ja $x_3 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$.

Viète onnistui myös pelastamaan kotimaansa Ranskan maansa kunnian Alankomaiden ja Ranskan kuningaskuntien välisessä matemaattisesta kisasta:

Belgialainen matematiikan professori Adriaan van Roomen (1561-1615) julkaisi 1500-luvun lopulla kirjan *Ideae mathematicae*, yleiskatsauksen kaikista elossa olevista merkittävistä matemaatikoista. Koska katsauksessa ei mainittu ainuttakaan ranskalaista, Alankomaiden suurlähettiläs varsin epädiplomaattisesti vähätteli ranskalaisten matematiikan tasoa ja esitti Ranskan kuninkaalle Henrik IV:lle van Roomenin kirjassa esiintyneen yhtälön

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + \dots + 95634x^5 - 3795x^3 + 45x = c$$

väittäen, että yksikään ranskalainen ei pysty yhtälöä ratkaisemaan. Ranskan kuningas Henrik IV lähetti yhtälön luottomatematiikolleen Viètelles, joka löysi yhtälölle välittömästi yhden ratkaisun. Seuraavana päivänä hän löysi jo 22 lisäratkaisua huomattessaan, että yhtälön saattoi muokata peräkkäisin sijoituksin trigonometriseksi. Vièten ratkaisu perustui huomioon, että kyseessä oli lausekkeen $2 \sin 45\alpha$ polynomimuoto sijoituksella $x = 2 \sin \alpha$.¹⁴ Van Roomen oli niin vaikuttunut Vièten taidoista, että matkusti henkilökohtaisesti tapaamaan häntä.

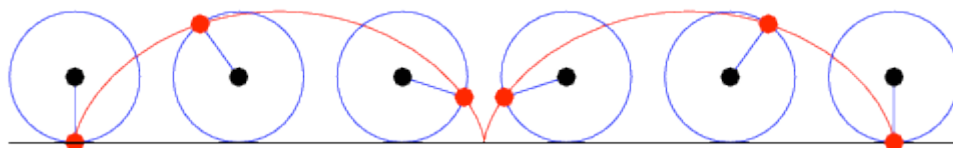
¹⁴ Derbyshire, s. 87

Funktiot ja kuvaajat

Vaikka Viète edisti trigonometrian kehittymistä analyyttiseksi, niin edelleenkin esimerkiksi funktion käsite odotti esiintuloa. Trigonometrian kehitys analyyttiseksi liittyy yleiseen funktioiden kehityksen historiaa. Tätä käsitellään yksityiskohtaisemmin vielä luvussa 5.

Roberval 1630

Ranskalainen matemaatikko Gilles Personne de Roberval (1602-1675) oli useiden aikalaismatemaatikkojen tapaan kiinnostunut sykloidista. Sykloidi on käyrä, jonka ympyrän kehällä oleva piste piirtää, kun ympyrä vierii liukumatta pitkin suoraa. Esimerkiksi polkupyörän renkaaseen kiinnitetyn heijastimen liikerata on sykloidi



Kuva 41. Sykloidi.

Robervallin erityinen mielenkiinto kohdistui sykloidin pinta-alan määrittämiseen. Työskentely johtikin tulokseen, sillä hän onnistui määrittämään sen pinta-alan eräänlaisen integraalilaskennan esimuodon avulla ja julkaisi ratkaisunsa vuonna 1634 teoksessa *Traite des indivisibles*. Ratkaisu on trigonometrian osalta merkityksellinen, koska osana ratkaisua Roberval piirsi, ensimmäisenä matemaatikkona, osan sinikäyrästä.

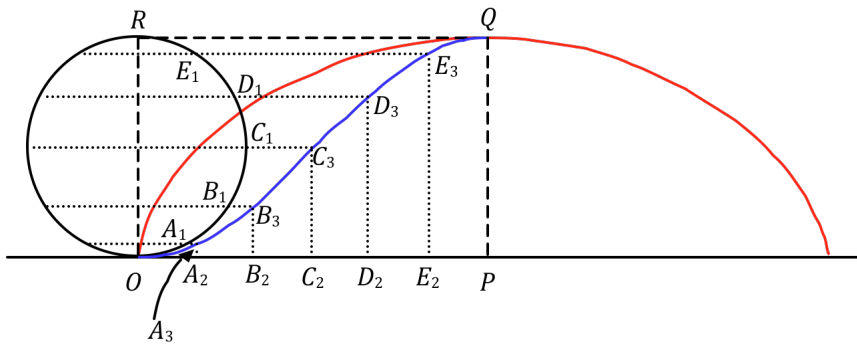
Wallis 1670

Roberval ei piirtänyt koskaan kokonaista jaksoa sinin kuvaajasta, vaan kunnia tästä kuuluu englantilaiselle John Wallisille, jonka vuonna 1670 ilmestyneessä liikkeen olemusta käsitelleessä kirjasessa *Mechanica, sive Tractatus de Motu*, löytyy piirrettyinä peräti kaksi jaksoa. Descartesin työn kautta käyrät olivat 1650-luvun puolivälin jälkeen olleet kiinnostava tutkimuskohde.

Sinikäyrän ensiesiintyminen

Roberval määritteli syklodin rajoittaman pinta-alan muodostamalla aluksi uuden ”apukäyrän” seuraavalla tavalla: Hän jakoi janan OP äärettömän moneen osaan ($A_2, B_2, \dots$) sekä sijoitti ympyrän kehälle pisteet $A_1, B_1, \dots$ siten, että $OA_1 = OA_2, A_1B_1 = A_2B_2, \dots$, jolloin leikkauspisteet $A_3, B_3, \dots$ muodostavat uuden käyrän. Leikkauspisteillä on sama y -koordinaatti kuin vastaavilla kehäpisteillä $A_1, B_1, \dots$ ja niiden x -koordinaatti on akselilla OP kuljettu matka. Käyrä, joka nyt muodostuu äärettömän monesta leikkauspisteestä $A_3, B_3, \dots$ on siten täsmälleen neljäsosa sinikäyrästä.

Roberval osoitti vastinjanoja vertailemalla, että välillä OQ syklodin ja sinikäyrän väliin jäävä alue on puolet syklodin rakentavan ympyrän alasta. Lisäksi hän huomasi, että sinikäyrän OQ sekä janojen OP ja PQ väliin jäävä alue on täsmälleen yhtä suuri kuin ympyrän pinta-ala, joten syklodin pinta-ala on kaiken kaikkiaan kolme kertaa niin suuri kuin syklodin piirtävällä ympyrällä.



Kuva 42. Sinikäyrän neljäsosa yhdessä syklodin puolikkaan kanssa.

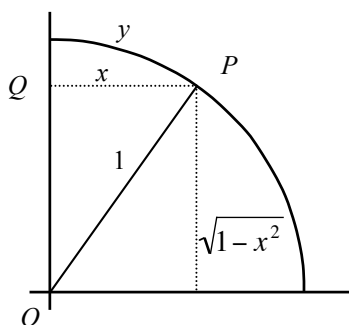
Newton 1670

Trigonometria sai lopullisen modernin muotoilunsa 1700-luvulla. Vieten alulle laittamaa kehitystä jatkoi lähinnä fyysikkona tunnettu englantilainen Sir Isaac Newton, joka oli myös erinomainen ja kekseliäs matemaatikko. Hänen vuonna 1669 julkaisemasta teoksesta *De Analysi per Aequationes Numeri Terminorum Infinitas* löytyy binomilause, jonka avulla on mahdollista lausua muotoa $(P + PQ)^{m/n}$ oleva lauseke äärettömän monen termin summana, joten esimerkiksi

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \dots$$

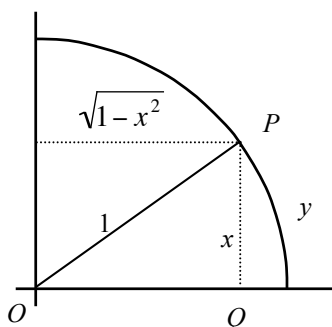
Binomilauseen avulla Newton esitti kaarta y vastaavalle sinille sarjakehitelmän muodossa

$$x = \sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 - \frac{1}{5040}y^7 + \dots$$



Kuva 43. Kaaren pituutta y vastaa sinin arvo x . Newtonin alkuperäinen kuvio.

Newton muodosti kaarta y vastaavan sinin arvon ympyrästä, jonka säde on 1, kuten kuvassa 43. Nykyisin kulma on tapana sijoittaa alkamaan positiiviselta x -akselilta, jolloin muuttujien sijoittelu vastaa kuviota 44. On kuitenkin hyvä muistaa, että sini eli puolijänteen pituus ei ole riippuvainen paikasta vaan jänteen puolikasta vastaavan kaaren pituudesta tai asteluvusta.



Kuva 44. Kaaren pituus y määritettynä kaaren pituutena alkaen vaakatasosta ja sinin arvo etäisyytenä vaakatasosta. Muokattu Newtonin kuviosta.

Keskeinen uutuus Newtonin työssä oli se, että hän käytti kulman suuruuden mittana kaaren pituutta y , eikä kaaren astelukua, mikä oli ollut aikaisempi tapa. Newtonin työ oli siten tärkeä askel kohti modernia määrittelyä. Kulman mittaaminen kaaren pituuden kautta vaikutti myös sen, että sinin arvon määrittäminen ei enää tarvinnut rajoittua terävään kulmaan. Tämä rajoitushan oli ollut implisiittisesti mukana kaikissa trigonometrisissa taulukoissa Hipparkhoksen ajoista lähtien.

Euler 1750

Trigonometrinen funktioiden keskeinen ominaisuus on jaksollisuus. Hollantilaisen Christiaan Huygensin (1629-1695) tutkiessa heilureita ja englantilaisen Robert Hooken (1635-1703) tutkiessa jousia huomattiin sekä heilureiden että jousien käyttäytymisessä jaksollinen ilmiö. Myös puhaltimien, jousisoittimien, kellojen ja vastaavien instrumenttien äänentuottamisen tutkiminen johti huomaamaan soitinten tuottaman äänen olevan äänilähteen säännöllisen värähtelyn aikaansaama jaksollinen aaltoliike. Näitä ilmiöitä mallintamaan tarvittiin jaksollinen funktio. Matemaatikkojen keksivät soveltaa juuri löydettyjä differentiaaliyhtälöitä näihin jaksollisiin fysikaalisiin ilmiöihin. Yhtälöiden ratkaisuna ilmestyi – yllätys, yllätys – sarjamuodossa olevia trigonometrisia funktioita. Vaikka Newton oli sarjakehitelmäsään jo lähestynyt sinin modernia funktioluonnetta, niin aluksi näihin ratkaisuihin suhtauduttiin hyvin kriittisesti ja esimerkiksi vielä vuonna 1728 Eulerin ystävä Johann Bernoulli, eräs aikansa parhaista matemaatikoista, ei voinut ajatellakaan siniä funktiona. Hänelle sini oli vain ympyrässä määrätyn janan pituus eli pelkkä geometrinen suure,

Maaperä kuitenkin pehmeni vähitellen ja vuonna 1739 Euler teki matemaattista historiaa hyväksyessään sinin erään värähtelyä kuvaavan differentiaaliyhtälön ratkaisuksi ja piti siten siniä ja myös muita trigonometrisiä funktioita funktioina samassa mielessä kuin jo aiemmin eksponenttifunktiota.

Modernin trigonometrian kulmakivenä on trigonometrinen funktioiden määrittäminen yksikköympyrässä. Tämä määritelmä on luonnollinen jatko Newtonin sarjakehitelmälle ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisuille ja sen esitteli sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler vuonna 1748 ilmestyneessä kirjassaan *Introductio in analysin infinitorum*. Boyer kirjoittaa kirjan merkityksestä näin: Historioitsijat viittavat säännöllisesti Eulerin *Introductioon*, mutta sen merkitys on yleisesti aliarvostettu. Tämä kirja on luultavasti modernin ajan vaikutusvaltaisimman oppikirjan. Tämän työn kautta funktion käsite tuli osaksi matematiikan perusteita. Se määritteli yleistajuisesti logaritmin eksponenttina ja trigonometriset funktiot suhteina. Se esitti selvällä tavalla algebrallisten ja transsendenttien funktioiden kuten alkeis- ja korkeampien funktioiden välisen eron. Se kehitti napakoordinaattien käyttöä sekä käyrien parametrimuotoa. Sanalla sanoen, *Introductio* teki analyysille sen minkä Eukleideen *Alkeet* teki geometrialle.¹⁵

Trigonometria saavuttikin Eulerin työn kautta nykyisen modernin funktioluonteen. Euler kirjoittaa *Introductionissa* mm. seuraavalla tavalla:

Me oletamme, että ympyrän säde on aina 1 ja että z on tämän ympyrän kaari. Me olemme kiinnostuneet erityisesti tämän kaaren sinistä ja kosinista. Niinpä me merkitsemme, että kaaren z sini on $\sin z$. Samoin, kaaren z kosini on $\cos z$. Koska 180° kaari

on π , niin $\sin 0\pi = 0$ ja $\cos 0\pi = 1$. Samoin $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \pi = 0$,

$\cos \pi = -1$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin 2\pi = 0$ ja $\cos 2\pi = 1$. Jokainen sini ja

kosini on lukujen $+1$ ja -1 välissä. Me hyväksymme, että $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$.

¹⁵ Boyer, *History of Analytic Geometry*, s. 180

Kirjassa Euler tarjoaa kaiken kaikkiaan täydellisen trigonometrian käsittelyn. Hän myös käsitteli trigonometrinen funktioiden summa- ja erotuskaavoja sekä jaksollisuutta ja johti niille potenssisarjoja. Hän myös piirsi niiden kuvaajat. Euler myös käytti *Introductionissa* kulman yksikkönä radiaania, vaikka nimityksenä tälle oli kaari. Hän otti käyttöön kirjaimen π kuvaamaan ympyrän kehän ja halkaisijan suhdetta. Muissa teoksissaan hän käsitteli trigonometrinen funktioiden differentiaalilaskentaa. Euler siis perusti modernissa mielessä trigonometrian. *Introductionista* tulikin klassikko ja se on myös varhaisin analyysin alan kirja, jonka tekstiä esimerkiksi matematiikan ylioppilas voi vaivatta seurata. Euler esittelee tässä kirjassaan myös yhtälön

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \text{ jonka erikoistapauksessa } (\alpha = \pi) \text{ saadaan yhtälö}$$

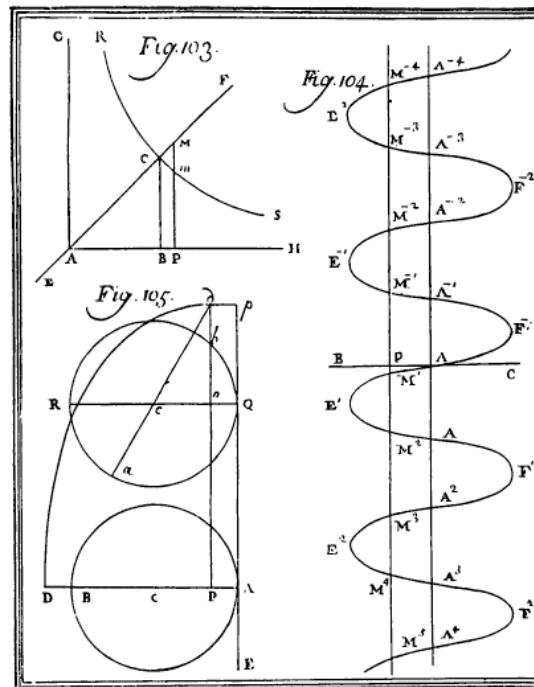
$$e^{i\pi} = -1,$$

jossa yhdistyvät matematiikan kolme tärkeintä lukua: i , e ja π .

Sinikäyrä

Euler kuvaa sinikäyrän muodostamisen hieman nykyisestä poikkeavalla tavalla. Hän ottaa suoran CAB akseliksi. Sitten hän toteaa, että jos abskissa $x = 0$, niin ordinaatat ovat $AA^1 = \pi a$, $AA^2 = 2\pi a$, $AA^3 = 3\pi a$ jne. sekä vastakkaiseen suuntaan mitattuna vastaavasti $AA^{-1} = \pi a$, $AA^{-2} = 2\pi a$, $AA^{-3} = 3\pi a$ jne. Tämän jälkeen hän toteaa, että jos abskissa $x = AP$, niin tätä vastaava ordinaatta leikkaa käyrän pisteissä $PM^1 = as$, $PM^2 = a(\pi - s)$, $PM^3 = a(2\pi + s)$ jne. Euler toteaa hieman myöhemmin, että Leibniz kutsuu käyrää sinikäyräksi, koska sen avulla on helppo määrittää mitä tahansa kaartta vastaava sinin arvo. Euler toteaa tässä yhteydessä myös että

$$\frac{y}{a} = \arcsin \frac{x}{c} \text{ eli } \frac{x}{c} = \sin \frac{y}{a}.$$
 Määrittely poikkeaa siis totutusta.



Kuva 45. Kuvitusta Eulerin kirjasta *Introductio*. Sinikäyrä kuvassa 104.

Radiaanit

Vaikka Euler käytti jo vuonna 1748 kirjassaan *Introductio* kulman yksikkönä radiaania, niin sana *radian* on paljon myöhempiä perua ja lähtöisin fyysikko Lord Kelvinin (William Thomson) veljen James Thomsonin kynästä, joka seitti sanan vuonna 1871. Ensimmäisen kerran se löytyy kirjoitettuna vuodelta 1873 Queen Collegen tenttikysymyksestä. *Oxford English Dictionary*, Oxfordin yliopiston historiallinen kieltä määrittelevä sanakirja, sisälsi sanan jo ensimmäisessä laitoksessaan vuonna 1879.

Leonhard Euler (1707-1783)

Euler on yksi kaikkien aikojen tuotteliaimmista ja tärkeimmistä matemaatikoista. Kun vuonna 1907, Eulerin syntymän 200-vuotisjuhlien aikaan sveitsiläiset ottivat kunniatehtäväkseen koota Eulerin kaikki julkaisut yhteen sarjaan arvioitiin tuloksena olevan 43 teosta. Teossarjan *Leonhardi Euleri Opera omnia* sisällysluettelon tekeminen edistessä huomattiin, että vasta 72 laajaa teosta täynnä Eulerin julkaisemia tutkimuksia riittäisi. Työn laajuus yllätti myös ajallisesti, sillä tuskin kukaan urakan alkuperäistä alullepanijoista olisi uskonut, että työ valmistuisi vasta sata vuotta työhön ryhtymisen jälkeen vuonna 2008! Euler oli saanut hyvän kristillisen kasvatuksen ja hän eli elämänsä vakaassa kalvinilaisessa kristillisessä uskossa, joten häntä voi hyvällä syyllä pitää kalvinistisen työmoraalin ikonina.

Leonhard sai vaimonsa Katarinan kanssa kaikkiaan 13 lasta, joista tosin jo kahdeksan kuoli nuorena. Euler oli tottunut jo ennen avioitumistaan kiivaaseen työtahtiin eikä perheen perustamiseenkaan hidastanut Eulerin vauhtia: hän saattoi kirjoittaa julkaisun jopa puolessa tunnissa, pitäen toisella kädellä vauvaa sylissään. Tutkielman valmistuttua Euler yleensä nosti paperit pinoon edellisten päälle, josta sihteeri kävi noutamassa sopivan määrän tutkielmia täyttääkseen Tiedeakatemia virallisen kausijulkaisun *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* sivut. Euler on kuvannut kuinka helppoa hänelle ajatusten paperille kirjaaminen toteamalla, että ”kynä on hänen älyään tehokkaampi”. On arvioitu, että hän olisi tuottanut elämänsä aikana matemaattista tekstiä noin 16 000 kirjan sivua. Venäjän Tiedeakatemia julkaisi Eulerin tutkielmia vielä 50 vuotta hänen kuolemansa jälkeen.

Leonhard oli jo lapsena lahjakas ja hänellä oli läpi elämän erityisen hyvä muisti. Hänen tiedetään esimerkiksi osanneen lausua ulkomuistista läpi elämänsä nuorukaisena lukemansa Virgiliuksen teoksen *Aenis*. Eulerin ihmeellinen näkömuisti mahdollisti erilaisten laskutoimitusten tekemisen päässään ilman kynää ja paperia. Tästä taidosta oli apua varsinkin elämän loppupuolella hänen sokeuduttuaan epäonnistuneen kaihileikkauksen seurauksena vuonna 1771. Sokeutuminen ei vaikuttanut hitustakaan hänen työhönsä vaan hänelle kävi aivan kuten Beethovenille, jonka kuuroutumien sysäsi säveltäjämestarin luomaan suurenmoisimmat sinfoniinsa. Itse asiassa Euler julkaisi lähes puolet kaikista töistään elämänsä viimeisen neljänneksen aikana. Kun Euler ei voinut enää tehdä muistiinpanoja, hän saneli muistinvaraisesti työstämänsä tulokset avustajilleen.

Euler sai elää täysissä sielun voimissa aivan elämänsä viime hetkille saakka. Hänen kuolinpäivästään 18.9.1783 kerrotaan, että se alkoi kuten mikä tahansa päivä. Aamulla Euler piti yhdelle lapsenlapselleen matematiikan oppitunnin, suoritti päivällä muutaman laskutoimituksen sekä keskusteli avustajiensa kanssa juuri löydetyistä uudesta planeetasta Uranus. Iltapäivällä noin viiden aikaan teetä juodessaan hän sai äkillisen sairaskohtauksen, kaatui maahan ja kuiskasi: ”Minä kuolen.” Myöhemmin samana iltana noin yhdentoista aikoihin Euler kuoli 76-vuotiaana.

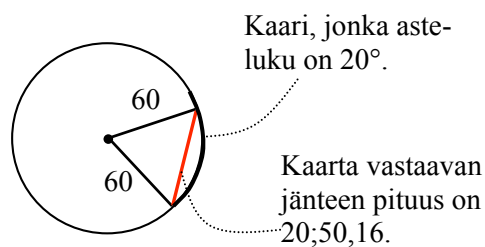
Eulerin tulokset ja vaikutus matematiikan kehittymiselle voidaan koota yhteen matemaatikko Laplacen sanoin: ”Hän on meidän kaikkien opettaja!” Tämä pitää erityisen hyvin paikkansa nykyisin peruskoulussa ja lukioissa opetetavan matematiikan osalta, sillä Euler on ollut kehittämässä kaikkia keskeisiä käsitteitä: funktiota, derivaattaa, integraalia, trigonometriaa ja logaritmeja. Useiden käsitteiden ja termien nykyinen muotoilu on juuri Eulerin kynästä lähtöisin. Esimerkiksi kirjain e luonnollisen logaritmin järjestelmän kantalukuna, π ympyrän kehän ja halkaisijan suhteena, $\sum$ summan symbolina ja kirjain i imaginäärilukuna $\sqrt{-1}$. Euler määritteli ensimmäisenä matemaattikkona käsitteen funktio ja häneltä on peräisin myös kirjaimen f (sekä sulkeiden) käyttö funktion symbolina.

LIITE Jännetaulukon ja nykyisen sinin käytön vertailua

Hipparkhoksen aloittama ja Ptolemaioksen tarkentama jänneiden taulukko on oleelliselta osaltaan nykyisen trigonometrisen sinin. Ptolemaios laski taulukkoon on jänneiden pituudet $0,5^\circ$ kaaresta 180° kaareen puolen asteen välein taulukoituna. Koska sini on puolet jänneestä voidaan taulukossa havaita olevan sinit kulmasta $\frac{1}{4}^\circ$ kulmaan 90° asteen neljäsosan välein. Jotta jänneiden pituuksien yhteys siniin tulee paremmin selväksi käydään läpi yksinkertainen laskuesimerkki.

Taulukko 1. Ote *Almagestin* jännetaulukosta.¹⁶

Kaari	Jänne
$\frac{1}{2}^\circ$	0;31 25
1°	1;2 50
$1\frac{1}{2}^\circ$	1;34 15
...	...
20°	20;50 16
...	...
72°	70;32 3

**Kuva 46.** Ptolemaioksen laatiman jännetaulukon havainnollistus. Ptolemaios laski jänneet ympyrästä, jonka säde on 60.

ια'. Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν.

περιφε- ρειῶν	εὐθειῶν			ἐξηκοστῶν			
L'	ο	$\lambda\alpha$	$\kappa\epsilon$	ο	α	β	ν
α	α	β	ν	ο	α	β	ν
$\alpha L'$	α	$\lambda\delta$	$\iota\epsilon$	ο	α	β	ν

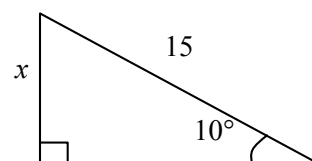
Kuva 47. Ptolemaioksen jännetaulukon alku.**Esimerkki**

Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 15 ja terävä kulma 10° . Määritä terävän kulman vastaisen sivun pituus x .

Ratkaisu sinin avulla

Moderni tapa ratkaista tehtävä on muodostaa yhtälö

$$\sin 10^\circ = \frac{x}{15}, \text{ josta } x = 15 \cdot \sin 10^\circ = 2,60472266... \approx 2,6.$$



¹⁶ Puolipiste erottaa kokonaiset ja 60-järjestelmän murto-osat. Väli erottaa kuusikymmenjärjestelmän paikat toisistaan. Esimerkiksi $0;31\ 25 = 0 + \frac{31}{60} + \frac{25}{3600} = 0,52361...$

Ratkaisu jännetaulukon avulla

Ptolemaioksen jännetaulukon avulla tehtävä ratkeaa, kun piirretään suorakulmainen kolmio ympyrän sisään.

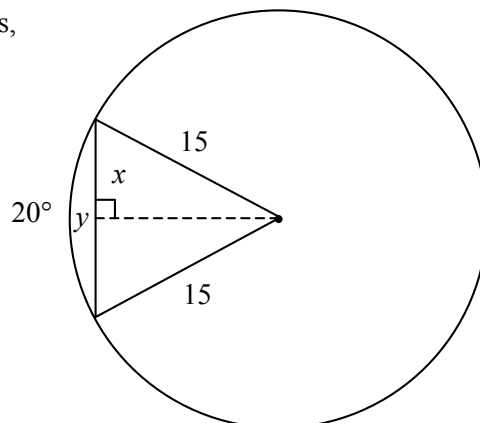
Luetaan aluksi jännetaulukosta 20° kaarta vastaavan janteen pituus, joka on $20;50,16 = 20 + \frac{50}{60} + \frac{16}{3600} = 20,83777\dots$.

Koska taulukossa olevat janteet on laskettu ympyrästä, jonka säde 60, on taulukon jänne neljä kertaa niin pitkä kuin haluttu jänne y eli jaetaan taulukon arvo luvulla neljä:

$$y = 20,83777\dots : 4 = 5,209\dots$$

Jotta saadaan kysytty sivun pituus x täytyy janteen pituus y jakaa luvulla 2:

$$x = y : 2 = 5,209\dots : 2 = 2,6047222\dots \approx 2,6.$$



Ptolemaioksen taulukon avulla lasketussa lopputuloksessa on kuusi oikeaa desimaalia ja vasta seitsemäs desimaali on virheellinen, mikä riittäisi edelleen useimmissa tilanteissa mainiosti.

Edellisen laskun perusteella voitaisiin kirjoittaa yleinen yhteys meidän käyttämän sinin ja Ptolemaioksen janteen välille. Kun merkitään, että $jn(\alpha)$ ilmoittaa kaarta α vastaavan janteen pituuden, niin

$$\sin(\alpha) = jn(2\alpha) / 120.$$

Näin esimerkiksi $\sin 36^\circ = jn(72^\circ) : 60 = \frac{70 + \frac{32}{60} + \frac{3}{3600}}{120} = 0,587784722\dots$, mikä eroaa oikeasta tuloksesta

vasta kuudennessa desimaalipaikassa. Tarkkuus on voimassa yleisestikin eli Ptolemaioksen taulukon perusteella lasketut sinit ovat oikein viiden desimaalin tarkkuudella. Ptolemaioksen 100-luvulla tekemän taulukon sekä Pythagoraan lauseen avulla olisikin mahdollista ratkaista riittävällä tarkkuudella mikä tahansa peruskoulussa vastaan tuleva trigonometrian laskutehtävä.