Solmu

Matematiikkalehti
3/2010

http://solmu.math.helsinki.fi/

Solmu 3/2010

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

Päätoimittaja:
Matti Lehtinen, dosentti, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:
Juha Ruokolainen, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti: *toimitus@solmu.math.helsinki.fi*

Toimituskunta:
Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu
Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu
Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Markku Halmetoja, lehtori, Mäntän lukio
Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu
Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Antti Rasila, tutkija, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu
Hilkka Taavitsainen, lehtori, Ressun lukio

Graafinen avustaja: *Marjaana Beddard*

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:
Virpi Kauko, FT, matemaatikko, virpi@kauko.org, Jyväskylä
Jorma K. Mattila, professori, jorma.mattila@lut.fi
Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto
Jorma Merikoski, dosentti, jorma.merikoski@uta.fi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Tampereen yliopisto
Petri Rosendahl, assistentti, petri.rosendahl@utu.fi
Matematiikan laitos, Turun yliopisto
Matti Nuortio, jatko-opiskelija, mnuortio@paju.oulu.fi
Matemaattisten tieteiden laitos, Oulun yliopisto
Timo Tossavainen, lehtori, timo.tossavainen@joensuu.fi
Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

Numeroon 1/2011 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 9.1.2011 mennessä.

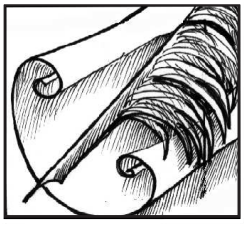
Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Kansi: Doorilainen, joonialainen ja korinttilainen pylväs kreikkalaisessa arkkitehtuurissa.

Sisällys

Pääkirjoitus: Luovuudesta ja matematiikasta (Matti Lehtinen) 4
Mitä ovat laskennalliset tieteet? (Symbolinen laskenta) (Jukka Tuomela) 5
Millä todennäköisyydellä satunnainen luku on neljällä jaollinen? (Juho Niemelä) 11
Mongoliassa on matematiikkakilpailu alakoulunopettajillekin (Matti Lehtinen) 13
Solmun matematiikkadiplomit (Marjatta Näätänen) 14
Apollonioksen unohtunut ympyrä (Matti Lehtinen) 15
Epäyhtälöistä, osa 2 (Markku Halmetoja) 18
Pietarin paradoksi ja tietokonesimulaatio (Jani Isohanni) 23
Tutkijavaihdossa Berkeleyssä (Vesa Julin) 26
Matemaattisista aineista potkua ympäristöuralle (Kaisa-Reeta Koskinen) 28
Matematiikan asemasta perusopetuksen uudessa tuntijaossa 29



Luovuudesta ja matematiikasta

Amerikkalaisen Newsweek-lehden 19. heinäkuuta päivätyn numeron kansikuvajuttu käsitteli luovuutta Amerikassa. ”Luovuutta” voidaan mitata psykologisin testein siinä kuin ”älykkyyttäkin”, ja nyt on saavuttu tilanteeseen, jossa tähän asti aina noussut lasten luovuuspisteiden keskiarvo onkin kääntynyt laskuun. Tämän lehti koki vakavaksi huolenaiheeksi.

Newsweekin toimittajat eivät tietenkään ole aivotutkimuksen asiantuntijoita, mutta ei ole syytä epäillä, etteivätkö he nojautuisi pätevien eksperttien tietämykseen. Luovuudessa on heidän mukaansa kyse kahden erilaisen aivotoiminnan yhteensovittautumisesta. Ongelman ilmaantuessa aivot, ”vasen aivopuolisko”, etsii ensin ilmeisiä ja helppoja ratkaisuja. Ellei niitä löydy, alkavat ”vasen aivopuolisko” ja ”oikea aivopuolisko” yhteistoiminnan. Aivot etsivät hämäriä ja epämääräisiäkin muistikuvia asioista, jotka saattaisivat olla hyödyllisiä. Kun tämän sekavan informaatiovyyhdin seasta vilahtaa jotain merkityksellistä, ”vasen aivopuolisko” kiinnittyy tähän ja alkaa keskittyneesti prosessoida. Syntyy ahaa-elämys. Tämän jälkeen aivot lakkaavat setvimästä muistiaineistoa ja alkavat keskittyneesti arvioida oivalluksen laatua. Ne voivat hyväksyä tai hylätä sen. Onnellisessa tapauksessa on syntynyt ongelman luova ratkaisu.

Tuntuu kovin tutulta. Juuri noin ratkaistaan matemaattista ongelmaa. Sillä saattaa olla helppo ja tuttu ratkaisu: harjoitustehtävässä testataan juuri opittua ja riittää tunnistaa tehtävän parametrit. Mutta ellei ratkaisua heti näy, ratkaisijan on käytävä läpi monenlaisia ajatuskokeita ja yrityksiä. Joskus tulee tunne, jonka mukaan on löytynyt idea, joka toimii. Toimimisen varmistaminen on kuitenkin olennainen osa prosessia.

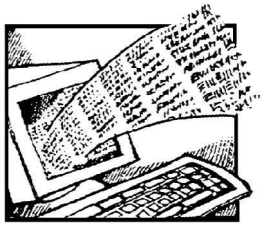
Newsweekin artikkeli kuvasi keinoja, joilla luovaa ongelmanratkaisua opiskellaan. Lehti vertasi tilannetta koripalloon. Jotta voisi olla loistava koripalloilija, on oltava pitkä. Mutta keskimittainenkin voi tulla hyväksi pelaajaksi harjoittelemalla. Matemaattinen ongelmanratkaisu on ongelmanratkaisua pelkistetyimmillään. On helppo ajatella, että ongelmanratkaisijan aivot harjaantuvat yleisemminkin luovaan toimintaan ja että aivojen luovaa ongelmanratkaisumoodia voi harjoitella matemaattisen ongelmanratkaisun avulla.

Mutta. Ongelmanratkaisun etsimis- ja kokeiluvaihe onnistuu vain, jos aivoissa on tietoa, jota yhdistellä, jonka kanssa kokeilla. Jos tieto on vain MAOL-taulukossa tai Googlen takana, siitä ei ole ollenkaan hyötyä. Asioita on tiedettävä. Ei riitä, että tietää tarvittaessa saavansa tietoa.

Keskustelu luovuudesta kääntyy niin meillä kuin Atlantin takanakin helposti puheeksi taideaineista. Newsweekin artikkeli ei pidä taiteen ja luovuuden yhteen kytkemistä perusteltuna. Luovuustesteissä tekniikan ja taiteen opiskelijat saavat samannäköisen pistejakauman. Luovan ratkaisun löytäminen on epäilemättä niin insinöörille, matemaatikolle kuin taiteilijallekin syvästi palkitsevaa.

Matti Lehtinen

Pääkirjoitus



Mitä ovat laskennalliset tieteet? (Symbolinen laskenta)

Jukka Tuomela
Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto
jukka.tuomela@uef.fi

Aluksi

Määritelmän mukaan π on ympyrän kehän suhde halkaisijaan. Miten sille voitaisiin laskea hyvä likiarvo? Miten polynomin nollakohdat voisi laskea? Miten Google järjestää haun tulokset paremmuusjärjestykseen? Mitä reittiä pitkin raketti saadaan Marsiin mahdollisimman vähällä polttoaineella? Monet ongelmat sekä puhtaassa matematiikassa että reaalimaailmassa johtavat mielenkiintoisiin laskennallisiin tehtäviin. Lisäksi tietotekniikan leviäminen lähes kaikille elämän alueille takaa sen, että uusia laskennallisia tehtäviä tulee koko ajan lisää.

Tarkastelen seuraavassa laskennallisuutta lähinnä matematiikan kannalta: mitä uusia haasteita tai näkökulmia laskennalliset tehtävät antavat matematiikalle ja matemaatikoille. Heikkola ja Tarvainen [4] puolestaan äskettäin käsittelivät laskennallisuutta sovellusten ja mallinnuksen lähtökohdista käsin, joten kirjoitukset täydentävät sopivasti toisiaan.

Laskenta ja (tiede)politiikka

Laskennallisista tieteistä on puhuttu ja kirjoitettu viime aikoina varsin paljon. Opetusministeriö julkaisi jokin aika sitten paksun raportin laskennallisista tieteistä, perustettiin laskennallisten tieteiden seura (SULATIS) ja Suomen Akatemian rahoilla on käynnistetty sekä laskennallisten tieteiden tutkimusohjelma että laskennallisten tieteiden tohtoriohjelma (FICS).[1] On annettu ymmärtää, että laskennallisilla tieteillä olisi laajempaakin yhteiskunnallista merkitystä. Erityisesti on korostettu laskennallisten tieteitten merkitystä korkean teknologian tuotekehityksen kannalta. Jätän kuitenkin näitten laajempien kuvioitten pohtimisen lukijalle poliittiseksi harjoitustehtäväksi ja keskityn vain laskennallisten tieteitten matemaattisempaan puoleen.

Mitä laskennallisilla tieteillä oikeastaan tarkoitetaan? Ehkäpä seuraava määritelmä antaa jonkinlaisen kuvan asiasta:

laskennallisissa tieteissä tutkitaan jonkin sovellusalueen ilmiötä käyttäen matemaattisia malleja, joitten käsittely ja ratkaisu edellyttää mittavia tietokoneresursseja.

Tarvitaan siis kolmenlaista tietämystä: itse sovellusalueen, matematiikan ja tietojenkäsittelyn. Tuskinpa kukaan yksittäinen tutkija hallitsee kaikkia kolmea osaaluetta, joten luontevinta on harjoittaa tutkimusta ryh-

[1] http://www.minedu.fi/OPM/Julkaisut/2007/Laskennallisen_tieteen_kehittaminen_Suomessa.html
http://www.sulatis.fi/
http://www.aka.fi/fi/A/Tiedeyhteiskunnassa/Tutkimusohjelmat/kaynnissa/Laskennalliset-tieteet/
http://fics.hiit.fi/

missä, joihin kuuluu eri alojen asiantuntijoita.

Esimerkiksi sään ennustaminen täyttää nämä tunnusmerkit: meteorologian ja fysiikan perusteella päädytään tiettyyn malliin (osittaisdifferentiaaliyhtälösysteemiin), jonka numeerinen ratkaiseminen vie varsin ison siivun kaikesta Suomessa käytössä olevasta superkonekapasiteetista. Tämäntyyppistä lähestymistapaa voidaan soveltaa moniin muihinkin ongelmiin, ja edellä mainitusta opetusministeriön raportista löytyy runsaasti esimerkkejä.

Laskennallisten menetelmien tutkimus on aktiivista sekä Suomessa että muualla. Sen sijaan laskennallisten tieteitten vaikutus matematiikan opetukseen on toistaiseksi ollut varsin vaatimatonta. Ehkäpä eräs syy on laskennallisten tieteitten monitieteisyys: tutkimuksessa tieteitten raja-aitoja on helpompi ylittää kuin opetuksessa. Miten sitten laskennallinen näkökulma pitäisi ottaa huomioon vaikkapa kouluopetuksessa onkin sitten jo vaikea koulutuspoliittinen kysymys, eikä siihen tässä voi puuttua.

Katsotaan seuraavassa muutamien esimerkkien avulla, minkälaisiin kysymyksiin laskennallinen näkökulma johtaa. Numeeriseen laskentaan liittyvät asiat jätetään kirjoituksen seuraavaan osaan.

Algoritmi

Keskeinen käsite kaikessa laskennassa on algoritmi. Lyhyesti algoritmi voitaisiin määritellä seuraavasti:

ALG *algoritmi on äärellinen joukko ohjeita, joiden perusteella tehdään äärellinen määrä toimenpiteitä, jotka tuottavat halutun lopputuloksen*

Kun on annettu jokin algoritmi, pitää siis osoittaa, että

KR1 *algoritmi päättyy* ja

KR2 *algoritmi antaa oikean tuloksen.*

Tyypillisesti algoritmit toteutetaan tietokoneen avulla. Tällöin ohjelmalle annetaan alussa joitain syötteitä (input). Sitten ohjelmaa ajetaan äärellinen aika (KR1), minkä jälkeen saadaan oikea vastaus (KR2). Vaikka yllä olevat kriteerit vaikuttavat itsestään selviltä, niin jokainen joka on ohjelmoinut, on tehnyt ohjelmia, joille KR1 ja/tai KR2 **EI** päde!

Geometria

Vaikka algoritmi tuntuukin ehkä varsin modernilta käsitteeltä, niin sillä on hyvin pitkä historia. Itse asiassa jo Eukleideen geometria oli algoritmista.[2] Eukleideen kirjassa on kahdenlaisia tuloksia: lauseita ja konstruktio-ongelmia. Jälkimmäisissä käsitellään nimenomaan algoritmeja. Muistetaan, että Eukleideen geometriassa voidaan tehdä kahdenlaisia toimenpiteitä:

OP1 *kahden pisteen kautta voidaan piirtää suora* (viivoitin käytössä)

OP2 *kun keskipiste on annettu, voidaan piirtää ympyrä* (harppi käytössä)

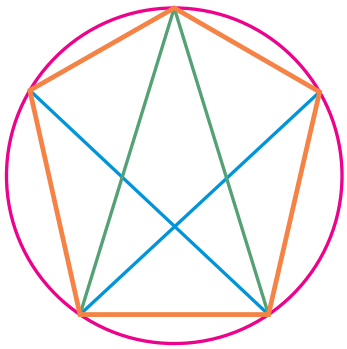
Kaikki konstruktiot voidaan siten palauttaa äärelliseksi määräksi operaatioita OP1 ja OP2. Tarkastellaan esimerkiksi Eukleideen IV kirjan ongelmaa 11.

ONGELMA: Piirrä annetun ympyrän sisälle tasasivuinen viisikulmio.

Eukleides antaa seuraavan algoritmin, kuva 1.

ALGORITMI IV 11

1. piirrä tasakylkinen kolmio, jolle kärkikulma on puolet kahdesta muusta kulmasta (algoritmi IV 10)[3]
2. piirrä samanmuotoinen kolmio annettuun ympyrään (algoritmi IV 2)
3. puolita kolmion isommat kulmat (algoritmi I 9)
4. yhdistä pisteet (OP1)



Kuva 1: Algoritmin IV 11 toteutus.

Kuva on piirretty vain suurin piirtein oikeaksi, joten lopputulos ei ole täsmälleen säännöllinen viisikulmio.

[2] Netistä löytyy useitakin versioita Eukleideen geometriasta:
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html
http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/byrne.html
http://farside.ph.utexas.edu/euclid/
Ne, joille kelpaa vain alkukielinen teksti:
http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/

[3] Eukleides kutsuu aliohjelmaa, joka on annettu IV kirjan ongelmassa 10.

Tähän liittyen muistetaan Poincarén tunnettu kommentti: *Geometria on taito tehdä hyviä päätelmiä huonosti piirretyistä kuvioista.*[4] Selvästi algoritmi päättyy, koska lopulta jokainen aliohjelma voidaan suorittaa tekemällä äärellinen määrä operaatioita OP1 ja OP2. Annettuaan algoritminsa Eukleides käyttää sivun osoittaakseen, että KR2 on voimassa.

Polynomit

Edellä algoritmin päättyminen oli itsestään selvää. Näin ei kuitenkaan aina ole. Katsotaan seuraavassa erästä algoritmia, jossa algoritmin päättymisen osoittamisen idea on erittäin tärkeä monissa yhteyksissä.

Olkoon $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_q x^q$ jokin q-asteinen polynomi ja merkitään $\mathsf{deg}(f) = q$. Olkoon edelleen g jokin toinen polynomi. Haluttaisiin laskea polynomien f ja g suurin yhteinen tekijä. Määritelmän mukaan $h = \mathsf{syt}(f,g)$, jos

(S1) $f = hf_1$ ja $g = hg_1$, missä f_1 ja g_1 ovat joitain polynomeja,

(S2) h on korkea-asteisin polynomi, jolla on tämä ominaisuus.

Tämä määritelmä ei ole ollenkaan algoritminen siinä mielessä, että se ei suoraan anna mitään ideaa siitä, miten h voitaisiin laskea. Eräs mahdollisuus perustuu polynomin jakamiseen tekijöihin. Tunnetusti q-asteisella polynomilla on q (mahdollisesti kompleksista) nollakohtaa, kun kertaluvut otetaan huomioon. Toisin sanoen voidaan kirjoittaa

$$f = a_q(x - c_1)^{k_1} \ldots (x - c_\ell)^{k_\ell},$$

missä $k_1 + \cdots + k_\ell = q$. Vastaavasti g voidaan jakaa tekijöihin ja tällöin suurin yhteinen tekijä saadaan katsomalla, kuinka paljon f:llä ja g:llä on yhteisiä nollakohtia. Tässä on kuitenkin se huono puoli, että pitäisi erikseen laskea nollakohdat, ja herääkin kysymys, onko tämä todella tarpeen. Itse asiassa on olemassa paljon tehokkaampi menetelmä. Olkoon annettu polynomit f ja g. Tällöin pätee, että on olemassa polynomit s (osamäärä) ja r (jakojäännös) siten, että

$$f = s\,g + r, \quad \mathsf{deg}(r) < \mathsf{deg}(g). \tag{1}$$

Lukija voi helposti edelleen osoittaa, että saadut s ja r ovat yksikäsitteisiä.[5] Oletetaan, että on käytössä aliohjelma jakojäännös, joka laskee r:n, kun f ja g on annettu. Tällöin seuraava algoritmi laskee f:n ja g:n suurimman yhteisen tekijän.

ALGORITMI SYT

```
h := f ; p := g
WHILE p ≠ 0 DO
    r:=jakojäännös(h,p);
    h:=p;
    p:=r;
ENDWHILE
```

Algoritmin päättyessä $p = 0$ ja $h = \mathsf{syt}(f,g)$. Algoritmin oikeellisuuden todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Algoritmin päättyminen seuraa siitä, että se tuottaa jonon jakojäännöksiä r_ℓ siten, että

$$\mathsf{deg}(g) > \mathsf{deg}(r_1) > \cdots > \mathsf{deg}(r_\ell) > \cdots$$

Koska $\mathsf{deg}(p) \geq 0$ kaikille polynomeille ($p \neq 0$), niin yllä oleva jono ei voi jatkua mielivaltaisen pitkään. Pitää siis olla olemassa jokin $k \leq \mathsf{deg}(g)$ siten, että $r_k = 0$.

Tämä on hyvin tyypillistä. Usein algoritmeissa on jokin silmukka, jota toistetaan, kunnes jokin ehto tulee voimaan. Eräs todistustekniikka on osoittaa, että joka kierroksella jokin positiivinen, kokonaislukuarvoinen suure pienenee. Koska tätä ei voi tapahtua äärettömän monta kertaa, silmukka voidaan suorittaa vain äärellisen monta kertaa. Huomattakoon, että tässä saatiin lisäksi yläraja kierrosten lukumäärälle: $\mathsf{deg}(g)$. Tästä puolestaan saadaan luonnollisesti arvio, kuinka kauan algoritmin suoritus voi korkeintaan kestää.

Katsotaan vielä eräs sovellus syt-algoritmista. Olkoon f annettu kuten yhtälössä (1). Yksinkertaisin polynomi, jolla on samat nollakohdat, on siis

$$f_r = (x - c_1)\ldots(x - c_\ell).$$

Nyt f_r saadaan kaavasta

$$f_r = \frac{f}{\mathsf{syt}(f, f')},$$

missä f' on f:n derivaatta. Tässäkään ei siis tarvinnut laskea nollakohtia, mikä kenties tuntuu yllättävältä. Erinomainen johdatus laskennalliseen polynomialgebraan on [3].

Lajittelu ja laskennan vaativuus

Kaikessa käytännön laskennassa oleellista on myös kolmas kriteeri:

KR3 *algoritmi on riittävän nopea.*

[4] Géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites.

[5] Vihje: käytä funktion deg ominaisuuksia.

Tietenkin tätä voidaan pitää myös kriteerin KR1 tarkennuksena: ei vaadita pelkästään, että algoritmi päättyy, vaan halutaan arvioida mahdollisimman tarkasti, kuinka kauan algoritmin suoritus kestää. Tällaista algoritmien tehokkuuden tutkimista kutsutaan *laskennan vaativuusanalyysiksi*. Hyödylliseksi on osoittautunut ajatella, että algoritmilla on käytössä tiettyjä alkeisoperaatioita, ja vaativuusanalyysissä pyritään arvioimaan, kuinka monta operaatiota algoritmin suorittaminen vaatii. Eukleideen geometrian tapauksessa voitaisiin laskea, kuinka monta alkeisoperaatiota OP1 ja OP2 tarvitaan tietyn algoritmin suorittamiseksi. Numeerisessa laskennassa taas lasketaan liukulukuoperaatioiden määrä.[6]

Algoritmin tehokkuuden analyysissä on kätevää ottaa käyttöön eräs hyödyllinen merkintä. Olkoot f ja g joitain funktioita. Merkintä $f(n) = O(g(n))$ tarkoittaa, että on olemassa jotkin vakiot a ja c siten, että

$$|f(n)| \leq c\, g(n) \quad \text{kun} \quad n > a.$$

Jatkossa ajatellaan, että n on kokonaisluku, mutta määritelmää käytetään myös, kun n on reaaliluku. Edelleen sanotaan, että f kasvaa polynomiaalisesti, jos $f(n) = O(n^k)$ jollekin k.

Laskennan vaativuusanalyysissä tyypillisesti tarkastellaan tilannetta, kun tehtävän koko kasvaa. Useinhan samalle algoritmille voidaan antaa erikokoisia syötteitä. Jos siis ajatellaan, että n kuvaa tehtävän kokoa ja $f(n)$ työmäärää, kun ratkaistaan kokoa n oleva tehtävä, niin haluttaisiin saada selville, miten nopeasti f kasvaa, kun $n \to \infty$.

Toisaalta säännöllisen viisikulmion tapauksessa algoritmilla ei oikeastaan ole syötteitä, mutta voidaan silti kysyä, olisiko olemassa jokin algoritmi, joka vaatisi vähemmän operaatioita OP1 ja OP2 kuin Eukleideen antama algoritmi. Tämän pohtimisen jätän harjoitustehtäväksi.

Tarkastellaan seuraavassa lajittelun vaativuusanalyysiä: olkoon annettu n kappaletta kokonaislukuja; kuinka nopeasti ne voidaan laittaa suuruusjärjestykseen? Luonnollisesti yhtä hyvin voitaisiin lajitella vaikkapa nimiä aakkosjärjestykseen, mutta tarkastellaan nyt (yleisyyttä rajoittamatta) kokonaislukuja. Lajittelussa on luonnollista ottaa alkeisoperaatioksi kahden luvun vertailu. Ongelma on siis laskea, kuinka monta vertailua tarvitaan, kun n lukua laitetaan suuruusjärjestykseen.

Lajittelussa jonkin algoritmin löytäminen on varsin helppoa, kukapa ei olisi joskus laittanut lukuja suuruusjärjestykseen, nimiä aakkosjärjestykseen tai vaikkapa ihmisiä pituusjärjestykseen. Koko ongelman mielenkiinto onkin nimenomaan vaativuusanalyysissä: miten lajittelun voisi tehdä mahdollisimman tehokkaasti.

Olkoon annettu

$$9 \quad 7 \quad 5 \quad 11 \quad 8 \quad 20 \quad 3 \quad 17.$$

Eräs algoritmi tunnetaan nimellä *kuplalajittelu* (bubble sort)[7]. Lähdetään liikkeelle vasemmalta ja etsitään suurinta arvoa. Ensin todetaan, että $9 > 7$, joten vaihdetaan niitten paikkaa. Sitten $9 > 5$, joten näittenkin paikkaa vaihdetaan. Näin jatketaan, ja 7 vertailun ja muutaman paikanvaihdon jälkeen saadaan

$$7 \quad 5 \quad 9 \quad 8 \quad 11 \quad 3 \quad 17 \quad 20.$$

Nyt tiedetään, että 20 on suurin, joten seuraavalla kierroksella pitää tehdä vain 6 vertailua. Lopulta 7 kierroksen jälkeen saadaan

$$3 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 11 \quad 17 \quad 20.$$

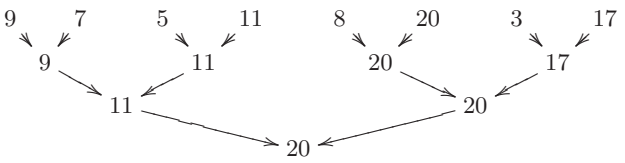
Yleisessä tapauksessa joudutaan siis tekemään

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = \tfrac{1}{2}\, n(n-1)$$

vertailua, joten työmäärä on $O(n^2)$. Huomattakoon, että paikanvaihtojen lukumäärä riippuu annetusta datasta, mutta vertailujen määrä on aina sama.

Tämä on varsin hidasta, jos n on hyvin iso. Tässä muuten lukijalle kenties tulee mieleen, että koska tietokoneet tulevat koko ajan yhä nopeammiksi, niin tällainen vaativuusanalyysi ei ehkä ole niin kovin tärkeää. Ehkäpä hieman paradoksaalisesti asia on päinvastoin: kun tietokoneet tulevat tehokkaammiksi, niin samalla heti halutaan käsitellä yhä suurempia datamääriä ja yhä monimutkaisempia malleja. Tämä on mahdollista vain, jos algoritmit ovat tarpeeksi tehokkaita.

Voitaisiinko siis lajitella nopeammin? Tarkastellaan erästä *kekolajittelun* muunnelmaa (heap sort). Käytetään samaa dataa kuin yllä ja tehdään siitä ”tenniskaavio”:

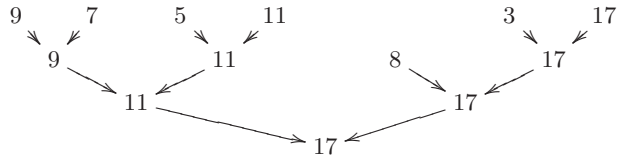


20 on ”voittaja”. Poistetaan se ja järjestetään jäljelle jäävät luvut samalla tavalla kaavioon. Huomaa, että läheskään kaikkia ”otteluja” ei tarvitse pelata uudelleen: nyt 8 siirtyy suoraan toiselle kierrokselle, ja sitten

[6] Liukulukuoperaatio (flop, floating point operation) on tietokoneella liukuluvuilla suoritettu yhteen-, vähennys-, kerto- tai jakolasku.

[7] Nimitys tulee kuulemma siitä, että jos luvut järjestettäisiin pystysuoraan, niin suuremmat luvut nousevat alhaalta ylös kuten ilmakuplat vedessä.

suoritetaan vertailut $8 < 17$ ja $11 < 17$. Saadaan siis



Uudelleenjärjestelyssä tarvittiin vain 3 operaatiota, koska kaavion ”syvyys” on $3 = \log_2 8$.

Samaan tapaan jatkamalla ja poistamalla aina kaavion voittaja saadaan vastaus. Mutta onko tämä todella nopeampi yleisessä tapauksessa kuin kuplalajittelu? Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $n = 2^k$. Alkuperäisen kaavion tekemiseen tarvitaan

$$1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1 = n - 1$$

vertailua. Koska kaavion syvyys on $\log_2 n = k$, niin kaavion uudelleenjärjestelyssä joudutaan tekemään korkeintaan k operaatiota. Järjestely joudutaan tekemään n kertaa, joten kokonaistyömäärä on $O(n \log n)$. Isoilla n:n arvoilla kekolajittelu on siis huomattavasti nopeampi kuin kuplalajittelu. Voidaan lisäksi osoittaa, että itse asiassa vaativuus $O(n \log n)$ on optimaalinen: minkä tahansa lajittelumenetelmän työmäärä kasvaa vähintään tätä vauhtia [7].

Lopuksi

Edelliset esimerkit toivottavasti valaisivat hiukan eräitä puolia laskennallisista kysymyksistä matematiikan kannalta. Seuraavassa muutamia muita ideoita ja viitteitä.

Mikä on alkeisoperaatio?

Teorian ”voima” kasvaa, jos voidaan ottaa lisää alkeisoperaatioita käyttöön. Esimerkiksi Eukleideen geometriaa voidaan laajentaa ottamalla käyttöön eräitä lisäoperaatioita. Voidaan vaikkapa olettaa, että viivoitin on merkitty, jolloin pituuksia voi mitata. Tämän avulla voidaan ratkaista kaksi klassista ongelmaa, jotka ovat mahdottomia ”puhtaassa” euklidisessa geometriassa: kuution kahdentaminen ja kulman jakaminen kolmeen osaan [2, 8]. Samalla tavalla kvanttitietokone tarjoaa periaatteessa uusia mahdollisuuksia, koska se voi suorittaa alkeisoperaatioita, jotka tavalliselle tietokoneelle ovat mahdottomia [1]. Tosin kvanttitietokoneen käytännön toteutus tuntuu olevan vielä pitkän työn takana.

Vaativuus

Algoritmien vaativuuden tarkastelussa pitää ottaa myös huomioon muistitilan tarve. Esimerkiksi polynomilaskennassa tämä on varsin vakava ongelma. Tyypillisessä tilanteessa polynomin kertoimet ovat joko rationaalilukuja tai ”parametreja”, siis oikeastaan myös muuttujia, mutta koska niiden luonne tehtävässä on erilainen, niin niitä myös sitten käsitellään eri tavalla. Joka tapauksessa eräissä tärkeissä algoritmeissa, joista puhutaan tarkemmin kirjassa [3], ongelmana on, että polynomien kertoimien lausekkeet saattavat kasvaa hyvinkin suuriksi. Samoin polynomien asteluku saattaa kasvaa voimakkaasti. Edelleen ongelma pahenee, kun polynomeissa esiintyvien muuttujien määrä kasvaa. Jonkinlaisen käsityksen asiasta saa, jos tarkastellaan m:n muuttujan polynomien termien lukumäärää. Olkoot $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, ja merkitään

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}.$$

Edelleen sanotaan, että monomin x^α aste on $\mathsf{deg}(x^\alpha) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ ja polynomin aste on luonnollisesti suurin sen monomien asteista. Jos sitten tarkastellaan yleistä q-asteista m:n muuttujan polynomia p, niin tämän esittämiseen tarvitaan

$$\frac{(m+q)!}{m!q!}$$

monomia. Esimerkiksi 10-asteisen 7 muuttujan polynomissa on lähes 20000 monomia. Kahden tällaisen polynomin kertolasku vaatii jo huomattavan monta operaatiota.[8]

Edellä on vaativuusanalyysissä tarkasteltu *pahimman tapauksen* analyysiä (worst case). On siis pyritty löytämään vaativuuden yläraja, joka pätee kaikille syötteille. Usein kuitenkin algoritmeilla on se hyvä tai kiusallinen ominaisuus, että ”tyypillisesti” algoritmin vaatima työmäärä on huomattavasti pienempi kuin pahimman tapauksen työmäärä. Tällöin puhutaan *keskimääräisen tapauksen* (average case) analyysistä. Valitettavasti usein on kuitenkin hankalaa määritellä, mitä tarkoitetaan tyypillisellä syötteellä. Kuuluisa esimerkki tästä on lineaarisen optimoinnin *simplex-algoritmi*.[9] On osoitettu, että pahimmassa tapauksessa vaativuus ei ole polynomiaalinen. Kuitenkin käytännössä algoritmi on osoittautunut erittäin nopeaksi ja käyttökelpoiseksi.

Turingin kone

Teoreettinen malli kaikelle laskennalle on *Turingin kone*. Turing oli 40-luvulla von Neumannin ohella yksi tietokoneen teoreettisten perusteiden tutkimuksen pioneereista, ja näissä pohdinnoissaan hän päätyi Turingin

[8] Kuinka monta operaatiota tarvitaan? Kuinka monta monomia on tulopolynomissa?

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm

koneen käsitteeseen [5]. Voisi sanoa, että Turingin kone on eräänlainen tarkka määritelmä algoritmille. On myös esitetty muita ideoita siitä, miten laskenta ja algoritmi voitaisiin määritellä, mutta kaikki nämä ovat osoittautuneet ekvivalenteiksi Turingin koneen kanssa. On myös pohdittu, mikä merkitys Turingin koneen käsitteellä on ihmisen ajatteluprosessien kannalta. Voidaanko aivoja pitää Turingin koneena? Tätä, ja paljon muuta, on mielenkiintoisesti analysoitu kirjassa [6].

Numeerinen laskenta

Numeerinen laskenta poikkeaa monella tavalla yllä kuvatusta ”puhtaasta” tai symbolisesta laskennasta. Palataan tähän kirjoituksen seuraavassa osassa.

Viitteet

[1] J. Brown, *Kvanttitietokone*, Terra Cognita, 2001.

[2] J. Conway and R. Guy, *The book of numbers*, Copernicus, New York, 1996.

[3] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, 3rd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2007, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

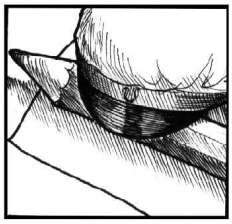
[4] E. Heikkola ja P. Tarvainen, *Kokemuksia matematiikan hyödyntämisestä teollisuudessa*, Solmu (2010), no. 1, 14–17.

[5] A. Hodges, *Alan Turing, arvoitus*, Terra Cognita, 2000.

[6] D. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*, Basic Books Inc. Publishers, New York, 1979.

[7] T. W. Körner, *The pleasures of counting*, Cambridge University Press, 1996.

[8] Henri Lebesgue, *Leçons sur les Constructions Géométriques*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 2003.



Millä todennäköisyydellä satunnainen luku on neljällä jaollinen?

Juho Niemelä
Kustannustoimittaja
Tammi Oppimateriaalit

Tämä pohdiskelu juontaa juurensa syksyn 2009 pitkän matematiikan ylioppilastehtävään numero 7, jota tarkasteltiin lukion *Pitkä Sigma* -kirjasarjan osaa *Todennäköisyys ja tilastot* (MAA6) tehtäessä:

A, B, C ja D aikovat jakaa keskenään korillisen omenoita siten, että kukin vuorollaan ottaa aina yhden omenan. Korissa olevien omenoiden lukumäärää ei tiedetä. A ehdottaa vedonlyöntiä: jos jokaiselle tulee yhtä monta omenaa, A maksaa kolmelle muulle kullekin 50 euroa. Muussa tapauksessa kukin kolmesta maksaa A:lle 25 euroa. Laske A:n saaman rahamäärän odotusarvo.

Jotta odotusarvon saa laskettua, on ensin ratkaistava, millä todennäköisyydellä omenoiden määrä on neljällä jaollinen. Omenoiden lukumäärää ”ei tiedetä”, joten oletus lienee, että omenoita voi olla mikä tahansa määrä, vähintään nolla tietysti.

Jos mahdollinen omenoiden määrä olisi rajattu esimerkiksi välille 1–100 ja lisäksi tiedettäisiin, että jokainen määrä on yhtä todennäköinen, neljällä jaollisen määrän todennäköisyys voitaisiin laskea ongelmitta. Suotuisia tapauksia ovat määrät $4, 8, \ldots, 100$ $(= 4 \cdot 25)$, joita on 25, joten todennäköisyys on $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Entä jos omenoita voikin olla mikä tahansa määrä? Mahdollisuuksia on äärettömän monta, joista suotuisia tapauksia ovat kaikki neljällä jaolliset luvut, joita on myös äärettömän paljon. Äärellisen tilanteen tapaan yrittämällä todennäköisyydeksi tulisi $\frac{\infty}{\infty}$ eli ei mitään järkevää.

Yritetään kiertää ongelmaa. Ajatellaan, että olipa omenoiden lukumäärä mikä tahansa, niin neljällä jaettaessa jakojäännökseksi tulee varmasti $0, 1, 2$ tai 3. Ovatko nämä jakojäännökset yhtä todennäköisiä? Jos ovat, niin neljällä jaollisen luvun (eli jakojäännöksen 0) todennäköisyys on selvästi $\frac{1}{4}$. Voisi ajatella, että kyllä kai jakojäännökset ovat yhtä todennäköisiä, koska luvut 0–3 ovat keskenään yhtä todennäköisiä ja loput peräkkäiset nelikot (4–7, 8–11 jne.) ovat olennaisesti täysin samanlaisia kuin nelikko 0–3: jokaisessa nelikossa on yksi kutakin jakojäännöstä edustava luku. Toisaalta matematiikassa ei mielellään haluta sanoa ”kai”. Täytyy siis yrittää vielä keksiä jokin raudanluja perustelu.

Oletetaan aluksi, että korissa voi olla omenia 0–n ja että jokainen näistä määristä on yhtä todennäköinen. Luvun n jakojäännös neljällä jaettaessa on jälleen 0, 1, 2 tai 3, joten voidaan kirjoittaa $n = 4m + k$, jossa $k = 0, 1, 2$ tai 3. Suotuisia tapauksia ovat $0, 4, 8, \ldots, 4m$, ja niiden lukumäärä on $m + 1$. Klassisen todennäköisyyden mukaan neljällä jaollisen luvun todennäköisyys on nyt

$$\frac{m+1}{n+1} = \frac{m+1}{4m+k+1} = \frac{1+\frac{1}{m}}{4+\frac{k+1}{m}}.$$

Kun n kasvaa rajatta, niin myös m kasvaa rajatta. Luku k vaihtelee mutta pysyy koko ajan rajoissa 0–3. Näin ollen osoittaja lähestyy lukua 1 ja nimittäjä lukua 4, joten osamäärä lähestyy lukua $\frac{1}{4}$. Joko tämä riittää osoittamaan, että todennäköisyys on $\frac{1}{4}$?

Joillekin riittää, joillekin ei. Edellä laskettiin, kuinka suuri on neljällä jaollisten lukujen suhteellinen osuus luvuista 0–n, ja havaittiin suhteellisen osuuden lähestyvän neljäsosaa. Entä jos neljällä jaollisten lukujen mukaan otetaan kaikki luvut yhdestä miljoonaan, mikä on näin saatavan ”paljon isomman” joukon todennäköisyys? Itse asiassa se on jälleen neljäsosa, jos käytetään samanlaista raja-arvoperustelua: lukujen 0–n joukossa on uuden, isomman joukon lukuja korkeintaan miljoona enemmän kuin alkuperäisessä joukossa, ja kun miljoona jaetaan luvulla n ja annetaan n:n kasvaa rajatta, osamäärä lähestyy nollaa. Lisäys ei muuta raja-arvoa, jos lisäys on niin pieni, että sen suhteellinen osuus lähestyy nollaa. Olisi siis yhtä todennäköistä, että poikien korissa on omenia mikä tahansa määrä yhdestä miljoonaan tai jokin neljällä jaollinen määrä kuin että korissa on pelkästään jokin neljällä jaollinen määrä. Sama todennäköisyys saataisiin myös silloin, kun neljällä jaollisiin lisättäisiin vaikkapa kaikki luvun 3 potenssit, sillä niidenkin suhteellinen osuus (noin $\log_3 n/n$) lähestyy nollaa. Ei kuulosta kovin hyvältä.

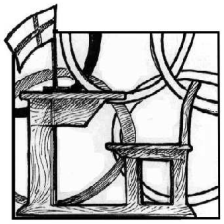
Tässä kierretään kehää ongelman ympärillä, kunnes lopulta huomataan, että ongelmalla ei ole kunnollista ratkaisua. Selitys on se, että luonnollisten lukujen joukossa ei yksinkertaisesti ole olemassa kaivatunlaista todennäköisyyden mittaria. Haluaisimme, että koko luonnollisten lukujen joukon todennäköisyys on 1. Lisäksi haluaisimme, että jokainen luonnollinen luku on yhtä todennäköinen. Ja vielä haluaisimme, että joukon todennäköisyys saadaan laskemalla yhteen osien todennäköisyydet. Jos jokaisen luonnollisen luvun todennäköisyys on p, niin pitäisi siis olla

$$\begin{aligned} P(\mathbb{N}) &= P(0) + P(1) + P(2) + \cdots \\ &= p + p + p + \cdots = \begin{cases} 0, & \text{jos } p = 0 \\ \infty, & \text{jos } p > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

joten ehto $P(\mathbb{N}) = 1$ ei tällöin voi toteutua.

Miten tehtävä pitäisi siis ymmärtää ja ratkaista? Ratkaisussa täytyy olettaa, että jakojäännökset $0, 1, 2$ ja 3 ovat yhtä todennäköisiä. Edellä nähtiin, että ei ole olemassa hyvää mittaria sen toteamiseksi, että luonnollisten lukujen joukon osajoukot ovat yhtä todennäköisiä, joten oletuksen järkevyys täytyy perustella jollakin muulla tavalla. Voitaneen vedota jonkinlaiseen symmetriaan, mutta loppujen lopuksi kysymys on vain sopimuksesta, joka joko hyväksytään lähtökohdaksi tai sitten ei. Perimmäisiä lähtökohtia ei toki yleensäkään matematiikassa edes yritetä perustella (koska niiden perusteleminen on matematiikan keinoin mahdotonta), mutta ehdottomasti ne täytyy kertoa lukijalle, ellei lukijan voida olettaa niitä ilman mainitsemistakin tietävän.

Tämä ylioppilastehtävä ei ollut onnistunein mahdollinen. Ongelmat olisivat poistuneet, jos tehtävänannossa olisi mainittu, että omenoita voi olla esimerkiksi 1–100 ja että jokainen määrä on yhtä todennäköinen. Eihän nimittäin siitä, että omenien määrää ei tiedetä, suinkaan seuraa, että jokainen määrä on yhtä todennäköinen. Voisihan olla, että omenakoreja täyttää vaikkapa kone, joka syöttää peräjälkeen 100 omenaa, joista kukin osuu koriin 95 %:n todennäköisyydellä. Tällöin omenoiden määrä noudattaa binomijakaumaa eikä tasaista jakaumaa. Jos omenien määrää ei haluta rajata, mikä toisaalta vastaa hyvin huonosti todellisuutta (omenakoreihin tuskin mahtuu ainakaan kovin monta tuhatta omenaa), täytyisi kertoa jo tehtävänannossa, että kaikki jakojäännökset oletetaan yhtä todennäköisiksi. Tällöin kuitenkin tehtävän luonne muuttuisi olennaisesti, joten omenien määrän rajaaminen on selvästi parempi vaihtoehto. Sen sijaan on mieletöntä sanoa, että omenoita voi olla mikä tahansa määrä, joista jokainen on yhtä todennäköinen, koska luonnollisten lukujen joukossa ei ole todennäköisyyskäsitettä tällaisen sanonnan perustaksi.



Mongoliassa on matematiikkakilpailu alakoulunopettajillekin

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Solmun numerossa 3/2007 kerrottiin Mongolian opettajien matematiikkakilpailusta ja julkaistiin kilpailun tehtävät suomalaisten opettajien ja muiden Solmun lukijoiden ratkaistaviksi. Tehtävät olivat vaativia ja palaute niukkaa: ratkaisuja lähetti vain Uudenkaupungin lukion silloinen oppilas Janne Junnila.

Mongolian matematiikkaolympialaisten lajivalikoimaan kuuluu myös alakoulunopettajien matematiikkakilpailu. Se on järjestetty jo 15 vuoden ajan. Kilpailussa menestyminen tuottaa opettajille merkittävää taloudellista etua, ja siihen osallistutaan innokkaasti. Ystäväni Ulan Batorin yliopiston matematiikan professori **Dashdorj Tsherendorj** kertoo, että kilpailu on merkittävästi kohottanut Mongolian opettajien matemaattista tasoa. Edellä viitatussa kirjoituksessa kysäisin, kuka järjestäisi matematiikkakilpailun Suomenkin opettajille. Ehdokkaita ei ole kuulunut, kenttä on siis yhä avoin.

Mongolian vuoden 2010 alakoulunopettajien matematiikkakilpailu pidettiin Mongolian kansallisten matematiikkaolympialaisten yhteydessä toukokuussa Ulan Batorissa, ja tehtävät ovat ohessa. Julkaisemme lukijoiden ratkaisuja, jos saamme niitä. Lähettäkää ratkaisujanne suoraan toimittajalle osoitteeseen Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu tai sähköpostitse osoitteeseen matti.lehtinen@helsinki.fi.

1. Matematiikkakilpailussa oli 25 osallistujaa ja kolme tehtävää A, B ja C. Jokainen osallistuja ratkaisi ainakin yhden tehtävän. Niissä osallistujissa, jotka eivät ratkaisseet tehtävää A, oli kaksi kertaa niin paljon sellaisia, jotka ratkaisivat B:n kuin sellaisia, jotka ratkaisivat C:n. Osallistujia, jotka ratkaisivat vain tehtävän A oli yksi enemmän kuin muita tehtävän A ratkaisseita. Niistä osallistujista, jotka ratkaisivat vain yhden tehtävän, puolet ei ratkaissut tehtävää A. Kuinka moni osallistuja ratkaisi vain tehtävän B?

2. Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $m^2 < a, b < m^2 + m$ ja $a \neq b$. Määrittäkää kaikki ne luonnolliset luvut c, joille c on luvun ab tekijä ja $m^2 < c < m^2 + m$.

3. Olkoot A ja C neliön $XOBD$ sisäpisteitä niin, että $\angle AXC = \angle ABC = 45°$. Merkitään kolmion PQR alaa symbolilla S_{PQR}. Osoittakaa, että

$$S_{AXO} + S_{ABC} + S_{CXD} = S_{ACX} + S_{AOB} + S_{CBD}.$$

4. Määrittäkää kaikki positiiviset kokonaisluvut N, joille on olemassa positiivinen kokonaisluku M seuraavin ominaisuuksin:

a) M:n ensimmäiset numerot muodostavat luvun N.

b) Jos S on se luku, joka saadaan, kun M:n ne ensimmäiset numerot, jotka muodostavat luvun N, siirretään M:n viimeisiksi numeroiksi, niin $S \cdot N = M$.

(Esimerkiksi kun $N = 46$, luku $M = 460100021743857360295716$ toteuttaa ehdon.)

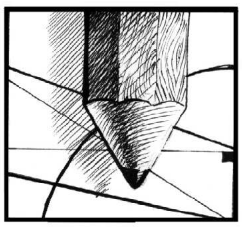
5. Todistakaa, että jokainen parillinen kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin $2n(4n+1)$, voidaan kirjoittaa muotoon

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 4n,$$

missä kunkin $\pm$-merkin kohdalle kirjoitetaan joko $+$ tai $-$.

6. Merkintä (a, b) tarkoittaa lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää. Olkoot m ja n sellaisia luonnollisia lukuja, että $(2m+1, 2n+1) = 1$. Määrittäkää

$$\left(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right).$$



Solmun matematiikkadiplomit

Marjatta Näätänen
Helsingin yliopisto

Lukudiplomin tavoin matematiikkadiplomi antaa mahdollisuuden hauskalle ja hyödylliselle harrastukselle, tarjoaa haasteita ja hauskaa ja monipuolista toimintaa lapsille. Diplomit eivät ole tiukasti sidottuja vuosiluokkiin, vaikkakin diplomien numerointi kertoo etenemisestä suunnilleen vuosiluokkien mukaisesti. Diplomitehtäviä voi tehdä yksin, kaverien kanssa, perheen yhteisenä harrastuksena, oppitunnilla. Diplomitehtävät sopivat myös kerhotoimintaan, matematiikkakummitoimintaan ja yksityiseen kertaukseen. Diplomitoiminta ei ole oppilaiden välistä kilpailua, vaan oppilaille tarjotaan hauskoja ja haastavia tehtäviä jo ensi luokasta alkaen. Niillä oppilas voi ottaa mittaa itsestään. Tehtäviä ratkaistaessa on toivottavaa keskustella toisten kanssa, jotta myös matematiikan kielen käyttö kehittyy ja itse kukin joutuu pukemaan sanoiksi ajattelunsa. Oppilas voi kysyä neuvoa ja tehdä yhteistyötä.

Tärkeintä on, että innostus herää ja oppilaat huomaavat oppivansa matematiikkaa. Diplomi palkitsee harrastuksen ja antaa ponnistelun jälkeisen tuloksen ilon. Jotkut tehtävät ovat helppoja, jotta kaikki pääsevät mukaan, toiset taas haastavat vaativampaan pohdintaan. Ajatteluahan on kehitettävä kuten kaikkia muitakin taitoja ja toimintoja. Esimerkiksi ensimmäiselle luokalle on tehtäviä luvuista ja laskutoimituksista, algebran alkeista, geometriasta ja mittaamisesta, tietojen käsittelystä ja tilastoista, eri vaihtoehtojen etsimisestä sekä ongelmanratkaisusta.

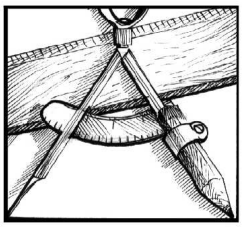
Tehtäviä ratkaistaan tulosteelle kirjoittaen, piirtäen ja askarrellen, jotta erittäin tärkeä ja nykyisin liian vähälle harjoitukselle jäävä hienomotoriikka kehittyy. Tehtävät ohjaavat koululaisia käyttämään myös toimintavälineitä ongelmien ratkaisemiseksi. Näin oppilas saa konkreettisia kokemuksia ajattelunsa perustaksi.

Tehtävät ja diplomit I–V ovat tulostettavissa matematiikkalehti Solmun sivulta

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Lukuvuoden alussa opettaja voi käynnistää diplomitoiminnan. Alussa tehtäviin tutustutaan tunnilla tai parilla koulussa. Kun oppilaat ovat ymmärtäneet toiminnan idean, tehtävät voidaan antaa vapaa-ajan harrastukseksi. Jos opettaja on mukana toiminnassa, tehtävät tuodaan kouluun diplomin saamiseksi lukuvuoden lopulla.

Vaikka opettaja ei heti ryhtyisikään diplomitoimintaan, hän voi kertoa siitä niille, jotka haluavat harrastaa tehtävien ratkaisua itsenäisesti, kotona tai kavereiden kanssa. On toivottavaa, että vanhemmat osallistuvat lastensa matematiikkaharrastukseen ainakin tukemalla sitä. Opettaja voi esitellä diplomitoimintaa vanhempainillassa. Vanhemmat voivat omatoimisestikin tulostaa tehtävät ja toimintaa voidaan harrastaa kotona perheen kesken.



Apollonioksen unohtunut ympyrä

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Vuoden 2010 Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Kazakstanissa. Kilpailun toisen päivän ensimmäinen tehtävä oli klassista geometriaa:

Olkoon P kolmion ABC sisäosan piste. Suorat AP, BP ja CP leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ myös pisteissä K, L ja M, tässä järjestyksessä. Pisteeseen C piirretty Γ:n tangentti leikkaa suoran AB pisteessä S. Oletetaan, että $SC = SP$. Todista, että $MK = ML$.

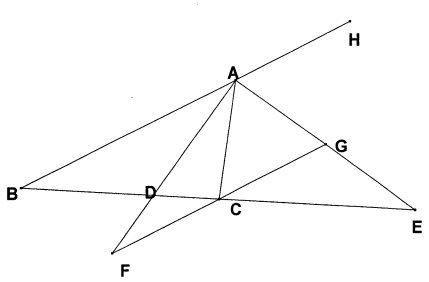
Kun keskustelin kilpailun jälkeen tehtävistä Suomen joukkueen jäsenten kanssa, tulin maininneeksi, että yksi tehtävän monista ratkaisutavoista perustuu *Apollonioksen ympyrän* hyväksikäyttöön. Itselleni yllätykseksi sain todeta, että Apollonioksen ympyrä oli kaikille läsnäolijoille tuntematon käsite. Lienee siis syytä saattaa Solmun lukijoiden tiedot tässä suhteessa samalle tasolle kuin aikanaan lukion oppimäärän opiskelleiden: vuosina 260–170 eKr. eläneen suuren kreikkalaisen geometrikon *Apollonios Pergalaisen* mukaan nimetty ympyrä kuului nimittäin geometrian oppikurssin perustietoihin ennen matematiikanopetuksen mullistuksia.

Klassinen lähestymistapa

Apollonioksen ympyrään päästään nykykoulunkin geometrian kursseissa mainitun kolmion kulman puolittajan ominaisuuden kautta. Olkoon ABC kolmio, josta oletetaan $AB > AC$. Olkoon H jokin piste sivun BA jatkeella. Kulman BAC puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D ja kulman CAH eli kulman BAC vieruskulman puolittaja leikkaa sivun BC jatkeen pisteessä E. Tällöin pätee

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

Näiden verrantojen sisältö ilmaistaan usein niin, että kolmion kulman puolittaja ja kolmion kulman vieruskulman puolittaja jakavat kolmion sivun sisä- ja ulkopuolisesti kulman viereisten sivujen suhteessa.



Tämän *kulmanpuolittajalauseen* todistus voidaan suorittaa monin tavoin, esimerkiksi sinilauseen avulla. Eräs yksinkertaisimmista todistuksista perustuu apupiirrokseen, jossa pisteen C kautta piirretään AB:n

suuntainen suora. Se leikkaa kulman BAC puolittajan pisteessä F ja kulman CAH puolittajan pisteessä G. Yhdensuuntaisuudesta seuraa $\angle CFD = \angle BAD$ ja $\angle ABD = \angle FCD$. Kolmiot ABD ja FCD ovat siis yhdenmuotoisia. Yhdenmuotoisuudesta seuraa vastinosien verrannollisuus:

$$\frac{AB}{FC} = \frac{DB}{DC}.$$

Koska AD on kulman BAC puolittaja, on $\angle CAD = \angle BAD = \angle AFC$. Kolmiossa AFC on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten se on tasakylkinen: $FC = AC$. Mutta tästä seuraa heti

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Toinen kulmanpuolittajalauseen osa seuraa puolestaan sitä, että kolmiot ABE ja GCE ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{AB}{CG} = \frac{EB}{EC}.$$

Mutta koska $\angle CAG = \angle GAH = \angle CGA$, kolmio GAC on tasakylkinen ja $CG = AC$. Siis myös

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

Kuinka suuri on kulma DAE? Kolmion kulmien summa on sama kuin kahden suoran kulman summa, ja tästä seuraa, että $\angle CAH = \angle ABC + \angle BCA$: kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summa. Mutta tästä seuraa, että kulma DAE on itse asiassa kolmion ABC kaikkien kulmien puolikkaiden summa ja niin ollen suora kulma. Ja Thaleen lause eli kehäkulmalause suoraan kulmaan sovellettuna kertoo, että jos piirretään ympyrä, jonka halkaisija on DE, niin A on tämän ympyrän kehällä. Tuo DE-halkaisijainen ympyrä on juuri Apollonioksen ympyrä.

Analysoidaan tilannetta hiukan tarkemmin. Pisteet D ja E määrittyivät kolmion ABC perusteella. Ne olisi kuitenkin voitu määritellä vain tietyn ehdon toteuttavina suoran BC pisteinä, vetoamatta suoran ulkopuoliseen pisteeseen A. Jos nimittäin $k > 1$ on mielivaltainen luku, on janalla BC tasan yksi piste D, jolle pätee

$$\frac{BD}{DC} = k$$

ja puolisuoralla BC janan BC ulkopuolella on tasan yksi piste E, jolle

$$\frac{EB}{EC} = k.$$

Suhdeluku k riittää kiinnittämään pisteet D ja E ja myös ympyrän $\mathcal{A}$, jonka halkaisija on DE, Apollonioksen ympyrän.

Nyt pätee seuraava tulos: Kaikki ne tason pisteet X, joille

$$\frac{XB}{XC} = k \qquad (1)$$

ovat ympyrällä $\mathcal{A}$ ja kaikille ympyrän $\mathcal{A}$ pisteille X pätee (1).

Lauseen edellinen osa on jo todistettu. Muutetaan vain A X:ksi edellä suoritetussa päättelyssä. Toinen puoli vaatii vähän enemmän. Viimeiset kunnolliset geometrian oppikirjat, 1950-luvulla kirjoitetut *Niilo Kallion, Bruno Malmion* ja *Samuli Apajalahden Geometria* ja *Kalle Väisälän Geometria* sivuuttavat todistuksen, edellinen ehkä tahattomasti, jälkimmäinen asiasta eksplisiittisesti mainiten. Puoli vuosisataa vanhempi koulukirja, *L. Neovius-Nevanlinnan Alkeisgeometrian oppikirja*, esittää täydellisen todistuksen.

Todistetaan tuloksen jälkimmäinen osa epäsuorasti. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan ympyrällä $\mathcal{A}$ on piste X, jolle

$$\frac{XB}{XC} = k' \neq k.$$

Oletetaan vielä, että $k' < k$. Kolmion BCX kulman BXC puolittaja leikkaa BC:n pisteessä D' ja kyseisen kulman vieruskulman puolittaja leikkaa BC:n jatkeen pisteessä E'. Piste X on $D'E'$-halkaisijaisella ympyrällä $\mathcal{A}'$. Tehdyn oletuksen nojalla

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{E'B}{E'C} = \frac{XB}{XC} = k' < \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}.$$

Tästä seuraa, että D' on lähempänä B:tä kuin D. Koska

$$\frac{EB}{EC} = \frac{BC}{EC} + 1$$

ja

$$\frac{E'B}{E'C} = \frac{BC}{E'C} + 1,$$

on oltava $E'C > EC$, eli E' on kauempana C:stä kuin E. Mutta tämä merkitsee, että jana DE sisältyy kokonaan janaan $D'E'$, ja edelleen $\mathcal{A}$ on kokonaan $\mathcal{A}'$:n sisäpuolella. Piste X ei voi olla kahdella toisiaan koskettamattomalla ympyrällä. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi, ja Apollonioksen ympyrää koskeva tuloksemme on kokonaan todistettu.

Analyyttisen geometrian avulla helpommin

Edellä klassisin, synteettisin menetelmin saatu tulos on johdettavissa varsin helposti laskemalla. Olkoot edellä käsitellyt pisteet B ja C x-akselin pisteet $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$. Piste $X = (x, y)$ toteuttaa ehdon

$$\frac{XB}{XC} = k > 1$$

jos ja vain jos

$$(x+1)^2 + y^2 = k^2\left((x-1)^2 + y^2\right).$$

Yhtälö on yhtäpitävä yhtälöiden

$$(k^2-1)(x^2+y^2) - 2(k^2+1)x + k^2 - 1 = 0$$

ja

$$\left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4k}{(k^2-1)^2}$$

kanssa. Viimeinen yhtälö on sellaisen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on x-akselin piste

$$\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}, 0\right)$$

ja säde

$$\frac{2k}{k^2-1}.$$

Ympyrä leikkaa x-akselin pisteissä

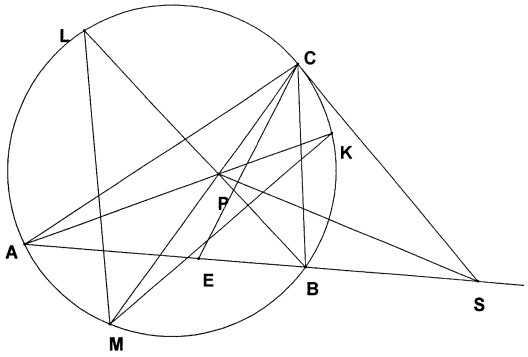
$$\left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \pm \frac{2k}{k^2-1}, 0\right),$$

jotka ovat

$$\left(\frac{k-1}{k+1}, 0\right) \quad \text{ja} \quad \left(\frac{k+1}{k-1}, 0\right).$$

Helppo lasku osoittaa, että juuri nämä pisteet jakavat janan BC sisä- ja ulkopuolisesti suhteessa k.

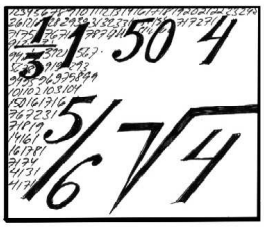
Apollonioksen ympyrän määrittävät jana BC ja suhdeluku k. Kun k:ta vaihdellaan, saadaan ääretön joukko ympyröitä, ns. *ensimmäisen lajin Steinerin ympyräparvi*. Sen mielenkiintoiset ominaisuudet ovat jo toisen pakinan aihe. Mutta entä lähtökohta, olympiatehtävä ja sen littyminen Apolloniokseen?



Tehtävän ratkaisu voisi mennä suunnilleen näin: Voidaan olettaa, että $AC > BC$, jolloin S on puolisuoralla AB. Kehäkulmia tarkastelemalla huomataan, että kolmiot PKM ja PCA ovat yhdenmuotoiset. Siis $\frac{PM}{MK} = \frac{PA}{AC}$. Samoin kolmiot PLM ja PCB ovat yhdenmuotoiset, joten $\frac{PM}{ML} = \frac{PB}{BC}$. Väitteen todistamiseksi riittää, että osoitetaan $\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BC}$ eli

$$\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}. \tag{1}$$

Olkoon E kulman ACB puolittajan ja sivun AB leikkauspiste. Ne pisteet X, joille $\frac{XA}{XB} = \frac{CA}{CB}$ ovat Apolloniuksen ympyrällä eli ympyrällä, joka kulkee pisteiden C ja E kautta ja jonka keskipiste on suoralla AB. Osoitetaan, että S on tämän ympyrän keskipiste. Koska $\angle CAB = \angle BCS$ (kehäkulma ja jänteen ja tangentin välinen kulma) ja $\angle ACE = \angle ECB$, niin $\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS$ eli kolmio SCE on tasakylkinen. Siis S on Apolloniuksen ympyrän keskipiste. Koska $SP = SC$, P on Apolloniuksen ympyrällä ja (1) toteutuu.



Epäyhtälöistä, osa 2

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Välillä I määriteltyä funktiota sanotaan konveksiksi, jos sen kuvaaja on alaspäin kupera, eli jos kuvaajan mitkä tahansa kaksi pistettä yhdistävä jana ei alita kuvaajaa. Esimerkiksi funktiolla $f(x) = x^2$ on tämä ominaisuus. Konveksit funktiot toteuttavat Jensenin[1] epäyhtälön. Se on eräänlainen yleisepäyhtälö, jonka avulla voidaan todistaa lukuisa joukko muita epäyhtälöitä. Jensenin epäyhtälö on tämän kirjoituksen pääasia, mutta siihen pääsemiseksi on ensin käsiteltävä konveksien funktioiden ominaisuuksia. Aivan ensimmäiseksi on yllä annettu konveksisuuden geometrinen määritelmä muunnettava analyyttiseksi. Kirjoitukseen sisältyy muutama harjoitus, joiden pohtiminen syventää asian ymmärtämistä. Niiden ratkaisut julkaistaan myöhemmin Solmun nettisivulla.

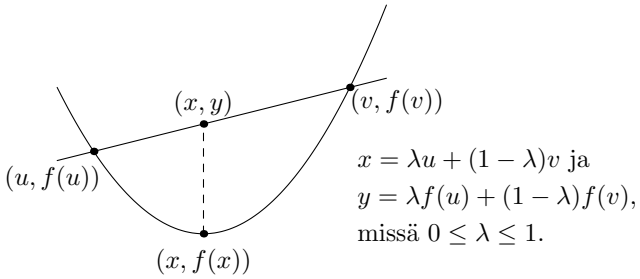
Konveksisuuden määritelmä

Olkoon f välillä I määritelty funktio ja $[u,v] \subseteq I$. Sen kuvaajan pisteet $(u,f(u))$ ja $(v,f(v))$ yhdistävän janan yhtälö on

$$y = y(\lambda) = \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v),$$

missä $0 \le \lambda \le 1$. Näillä λ:n arvoilla myös

$$x = \lambda u + (1-\lambda)v \in [u,v].$$



Jos kuvaaja on alaspäin kupera, niin piste $(x,f(x))$ ei ylitä mainittua janaa millään $x \in [u,v]$. Konveksisuuden analyyttinen määritelmä saadaan kirjoittamalla tämä geometrinen ehto epäyhtälöksi.

Määritelmä. Olkoon I reaalilukuväli ja f siinä määritelty funktio. Se on *konveksi*, jos epäyhtälö

$$f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) \le \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \qquad (2)$$

toteutuu kaikilla $u,v \in I$ ja $\lambda \in]0,1[$. Se on *aidosti konveksi*, jos

$$f\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) < \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \qquad (3)$$

kaikilla $\lambda \in]0,1[$ ja kaikilla keskenään erisuurilla $u,v \in I$.

Huomautus. Parametri λ rajoitetaan määritelmässä avoimelle välille $]0,1[$, sillä tämän välin päätepisteissä epäyhtälö (2) on joka tapauksessa voimassa.

[1] Johan Jensen (1859–1925), tanskalainen matemaatikko.

Jos erisuuruus epäyhtälöissä (2) tai (3) on vastakkaiseen suuntaan, niin funktio f on *konkaavi* tai *aidosti konkaavi* välillä I. Selvästi funktio f on (aidosti) konkaavi, jos ja vain jos $-f$ on (aidosti) konveksi, joten jatkossa voidaan rajoittua pelkästään konveksisuuteen.

Seuraavissa harjoituksissa ja esimerkissä sovelletaan konveksisuuden määritelmää.

Esim. Funktio $f(x) = |x|$ on konveksi, sillä kolmioepäyhtälöstä seuraa

$$|\lambda u + (1-\lambda)v| \le \lambda|u| + (1-\lambda)|v|$$

kaikilla $u,v \in \mathbb{R}$ ja $\lambda \in]0,1[$.

Harjoituksia

1. Osoita, että funktio $f(x) = x^2$ on aidosti konveksi.

2. Osoita, että funktio $g(x) = x^{-1}$, $x > 0$, on aidosti konveksi.

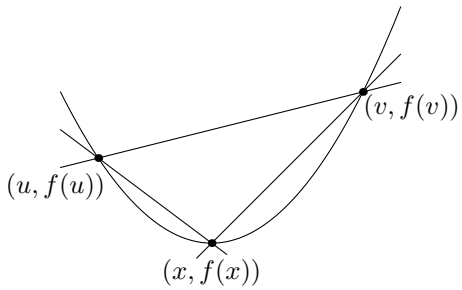
3. Keksi esimerkki konveksista funktiosta $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, joka on **a)** jatkuva, **b)** epäjatkuva.

4. Osoita, että jos f ja g ovat välillä I konvekseja funktioita ja jos a sekä b ovat ei-negatiivisia, niin lineaarikombinaatio $af + bg$ on konveksi.

Konveksisuuden luonnehdintaa

Funktion konveksisuus on alkeellisia tapauksia lukuunottamatta varsin hankalaa todistaa suoraan määritelmän perusteella. Seuraavassa johdetaan eräitä yhtäpitäviä ja riittäviä ehtoja konveksisuudelle.

Jos f on välillä I määritelty konveksi funktio ja $x \in]u,v[\subset I$, niin kuvioon



piirrettyjen sekanttien kulmakertoimet toteuttavat kaksoisepäyhtälön

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le \frac{f(v)-f(x)}{v-x}, \qquad (4)$$

mikä johtaa tärkeään konveksisuuden luonnehdintaan.

Lause 1. Välillä I määritelty funktio f on konveksi, jos ja vain jos kaikille ehdon $u < x < v$ toteuttaville välin I luvuille on voimassa mikä tahansa kaksoisepäyhtälöstä (4) saatava erotusosamääriä koskeva epäyhtälö.

Todistus. Käsitellään tapaus

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \le \frac{f(v)-f(x)}{v-x},$$

ja muut jätetään harjoitustehtäviksi.

Olkoot $u,x,v \in I$ ja $u < x < v$. Tällöin on olemassa $\lambda \in]0,1[$ siten, että $x = \lambda u + (1-\lambda)v$. Koska $x-u > 0$, $v-x > 0$, $v-u > 0$,

$$\lambda = \frac{v-x}{v-u} \quad \text{ja} \quad 1-\lambda = \frac{x-u}{v-u},$$

ovat epäyhtälöt

$$\begin{aligned} f(x) &\le \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \\ \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x) &\le \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \\ \lambda\big(f(x)-f(u)\big) &\le (1-\lambda)\big(f(v)-f(x)\big) \\ \frac{v-x}{v-u}\big(f(x)-f(u)\big) &\le \frac{x-u}{v-u}\big(f(v)-f(x)\big) \\ \frac{f(x)-f(u)}{x-u} &\le \frac{f(v)-f(x)}{v-x} \end{aligned}$$

keskenään yhtäpitäviä, joten lause on todistettu.

Seuraus. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on aidosti konveksi, jos ja vain jos kaikille ehdon $u < t < v$ toteuttaville välin I luvuille on voimassa

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} < \frac{f(v)-f(x)}{v-x}.$$

Derivoituvan funktion konveksisuudelle saadaan helpohko kriteeri.

Lause 2. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ derivoituva. Jos ja vain jos derivaatta on (aidosti) kasvava, niin f on (aidosti) konveksi.

Todistus. Olkoot x,t ja y ehdon $x < t < y$ toteuttavia I:n lukuja. Väliarvolauseen mukaan on olemassa $\xi_1 \in]x,t[$ ja $\xi_2 \in]t,y[$ siten, että

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(\xi_1) \quad \text{ja} \quad \frac{f(y)-f(t)}{y-t} = f'(\xi_2).$$

Koska $\xi_1 < \xi_2$ ja f' on kasvava, on $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, joten

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) = \frac{f(y)-f(t)}{y-t},$$

eli väite on tosi lauseen 1 perusteella. Jos f' on aidosti kasvava, niin epäyhtälöstä $\xi_1 < \xi_2$ seuraa $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, joten

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = \frac{f(y)-f(t)}{y-t},$$

eli väite on tosi lauseen 1 seurauksen perusteella.

Seuraus. Jos f on kahdesti derivoituva ja jos f'' on ei-negatiivinen, niin f on konveksi. Jos f'' on ei-negatiivinen ja sillä on enintään erillisiä nollakohtia, niin f on aidosti konveksi.

Esim. Funktiot $f(x) = \mathrm{e}^x$ ja $g(x) = -\ln x$ ovat aidosti konvekseja, sillä $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $g''(x) = x^{-2} > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$.

Esim. Funktiot $f_n(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ovat aidosti konvekseja. Funktiot $g_n(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ovat aidosti konvekseja välillä $[0,\infty[$.

Harjoituksia

5. Osoita, että välillä I määritelty funktio f on konveksi, jos ja vain jos

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

kaikille ehdon $u < x < v$ toteuttaville välin I luvuille.

6. Osoita, että välillä I määritelty funktio f on konveksi, jos ja vain jos

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

kaikille ehdon $u < x < v$ toteuttaville välin I luvuille.

7. Todista, että *avoimella välillä* määritelty konveksi funktio on jatkuva. Ohje: Jos I on avoin väli ja $x_0 \in I$, niin on olemassa luvut $a,b,u,v \in I$ siten, että $a < u < x_0 < v < b$. Valitse $x \in]u,x_0[$, ja osoita kaksoisepäyhtälöä (4) soveltaen, että $f(x) \to f(x_0)$, kun $x \to x_0$ vasemmalta. Osoita sitten samalla tavalla, että $f(x) \to f(x_0)$, kun $x \to x_0$ oikealta.

8. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$, on aidosti konveksi.

Jensenin epäyhtälö

Konveksisuuden määritelmä voidaan kirjoittaa seuraavasti:

Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on konveksi, jos

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

kaikilla $x_1, x_2 \in I$ ja kaikilla $\lambda_1, \lambda_2 \in]0,1[$, joille $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Jensenin epäyhtälö yleistää määritelmän epäyhtälön useammalle λ:n ja x:n arvolle.

Lause 3. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ konveksi funktio ja $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ positiivisia lukuja, joiden summa on 1. Tällöin kaikilla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n). \quad (5)$$

Todistus. Väite on siis tosi, kun $n = 2$. Jos se on tosi $(n-1)$:lle luvulle, niin, koska

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = (1 - \lambda_n)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} x_{n-1}\right) + \lambda_n x_n,$$

on

$$\begin{aligned} &f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n) \\ &\leq (1-\lambda_n) f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} x_{n-1}\right) \\ &\qquad + \lambda_n f(x_n) \\ &\leq (1-\lambda_n)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} f(x_{n-1})\right) \\ &\qquad + \lambda_n f(x_n) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda_n f(x_n), \end{aligned}$$

joten väite on induktioperiaatteen nojalla tosi kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

Valitsemalla kaikki λ:t yhtä suuriksi saadaan monessa yhteydessä käyttökelpoinen seurauslause.

Seuraus. Jos $f : I \to \mathbb{R}$ on konveksi ja $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, niin

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \quad (6)$$

Milloin epäyhtälöissä (5) ja (6) vallitsee yhtäsuuruus? Jos esimerkiksi f on ensimmäisen asteen polynomifunktio (se on konveksi), niin yhtäsuuruus on voimassa kaikilla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Kysymys yhtäsuuruuden voimassaolosta on siis kiinnostava vain, jos funktio on aidosti konveksi.

Lause 4. Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ aidosti konveksi, $x_1, \ldots, x_n \in I$ ja $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ positiivisia lukuja, joiden summa on 1. Tällöin

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \quad (7)$$

jos ja vain jos $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Todistus. Selvästi (7) on voimassa, jos $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Oletetaan nyt, että (7) on voimassa, ja tehdään vastaoletus, että luvut $x_1, \ldots, x_n$ eivät ole kaikki yhtä suuria. Voidaan rajoituksetta olettaa, että ne ovat pienimmästä alkaen suuruusjärjestyksessä. Tällöin x_1 on niistä pienin. Olkoon x_k ensimmäinen siitä poikkeava luku. Siis

$$x_1 = \ldots = x_{k-1} < x_k \leq \ldots \leq x_n.$$

Merkitään vielä $\mu = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}$, jolloin $\lambda_k + \ldots + \lambda_n = 1 - \mu$. Koska f on aidosti konveksi ja

$$x_1 < \frac{\lambda_k}{1-\mu}x_k + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\mu}x_n,$$

on

$$\begin{aligned}
&f\big(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\big) \\
&= f\left(\mu x_1 + (1-\mu)\left(\frac{\lambda_k}{1-\mu}x_k + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\mu}x_n\right)\right) \\
&< \mu f(x_1) + (1-\mu) f\left(\frac{\lambda_k}{1-\mu}x_k + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\mu}x_n\right) \\
&\le (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}) f(x_1) + \lambda_k f(x_k) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n),
\end{aligned}$$

mikä on ristiriidassa oletuksen (7) kanssa. Siis ei ole ensimmäistäkään lukua x_k, joka poikkeaisi pienimmästä luvusta x_1, joten kaikki x:t ovat samoja.

Muodostamalla sopivia aidosti konvekseja funktiota voit Jensenin epäyhtälön avulla keksiä aivan uusia, ennennäkemättömiä epäyhtälöitä! Seuraava lienee kuitenkin yleisesti tunnettu.

Lause 5. Olkoot $u_1, \ldots, u_n$ positiivisia lukuja ja $\mathcal{A}$ niiden aritmeettinen keskiarvo. Tällöin

$$\mathcal{A}^{\mathcal{A}} \le \sqrt[n]{u_1^{u_1} u_2^{u_2} \ldots u_n^{u_n}},$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u_1 = \ldots = u_n$.

Todistus. Positiivisille luvuille määritelty funktio $f(x) = x \ln x$ on aidosti konveksi, joten Jensenin epäyhtälön (6) mukaan

$$\left(\frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}\right) \ln \left(\frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}\right) \le \frac{1}{n} u_1 \ln u_1 + \ldots + \frac{1}{n} u_n \ln u_n,$$

mistä väite seuraa.

Harjoituksia

9. Osoita, että jos positiivisten lukujen $u_1, \ldots, u_n$ aritmeettinen keskiarvo on 1, niin

$$u_1 u_2 \ldots u_n \le 1 \le u_1^{u_1} u_2^{u_2} \ldots u_n^{u_n},$$

ja että yhtäsuuruudet ovat voimassa, jos ja vain jos $u_k = 1$ kaikilla $k \in \{1, \ldots, n\}$.

10. Osoita **a)** edellisen tehtävän erikoistapauksena, **b)** pelkästään lukion oppimäärään tukeutuen, että

$$(1-x)^{1-x}(1+x)^{1+x} > 1$$

kaikilla $x \in \,]0{,}1[$.

11. Osoita, että jos a,b,c ovat positiivisia ja $a+b+c = 1$, niin

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge \tfrac{1}{3}.$$

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

12. Osoita, että jos luvut u_k ovat positiivisia ja jos $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1$, niin

$$\big(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2\big)^2 \le u_1^3 + u_2^3 + \ldots + u_n^3.$$

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

Keskiarvoepäyhtälöitä

Kirjoituksen ykkösosassa (Solmu 2/2010) tutkittiin keskiarvojen $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{C}$ suuruusjärjestystä. Jensenin epäyhtälön avulla voidaan todistaa sama järjestys myös vastaaville painotetuille keskiarvoille. Ne määritellään yhtälöillä

$$\mathcal{H}_\lambda = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{u_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{u_n}}$$

$$\mathcal{G}_\lambda = u_1^{\lambda_1} \ldots u_n^{\lambda_n}$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$$

$$\mathcal{C}_\lambda = \frac{\lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2}{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n}$$

missä u- ja λ-luvut ovat positiivisia ja λ-lukujen summa on 1. Järjestys todistuu kolmessa vaiheessa.

Vaihe 1. $\mathcal{G}_\lambda \le \mathcal{A}_\lambda$. Olkoot $u_1, \ldots, u_n$ positiivisia lukuja ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positiivisia lukuja, joiden summa on 1. On olemassa luvut $x_1, \ldots, x_n$ siten, että $u_k = \mathrm{e}^{x_k}$ kaikilla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Koska funktio $f(x) = \mathrm{e}^x$ on aidosti konveksi, on Jensenin epäyhtälön mukaan

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n} \le \lambda_1 \mathrm{e}^{x_1} + \ldots + \lambda_n \mathrm{e}^{x_n}.$$

Yhtälöiden $u_k = \mathrm{e}^{x_k}$ avulla tämä sievenee muotoon

$$\mathcal{G}_\lambda = u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_n^{\lambda_n} \le \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = \mathcal{A}_\lambda.$$

Vaihe 2. $\mathcal{H}_\lambda \le \mathcal{G}_\lambda$. Olkoot u- ja λ-luvut kuten yllä. Soveltamalla edellistä epäyhtälöä u-lukujen käänteislukuihin saadaan

$$\frac{1}{u_1^{\lambda_1}} \ldots \frac{1}{u_n^{\lambda_n}} \le \frac{\lambda_1}{u_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{u_n},$$

mistä välittömästi seuraa

$$\mathcal{H}_\lambda = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{u_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{u_n}} \le u_1^{\lambda_1} \ldots u_n^{\lambda_n} = \mathcal{G}_\lambda.$$

Vaihe 3. $\mathcal{A}_\lambda \le \mathcal{C}_\lambda$. Olkoot u- ja λ-luvut edelleen kuten yllä. Funktio $g(x) = x^2$ on aidosti konveksi, joten Jensenin epäyhtälöä soveltaen saadaan

$$(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n)^2 \le \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2,$$

mistä seuraa

$$\mathcal{A}_\lambda = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \leq \frac{\lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2}{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n} = \mathcal{C}_\lambda.$$

Siis

$$\mathcal{H}_\lambda \leq \mathcal{G}_\lambda \leq \mathcal{A}_\lambda \leq \mathcal{C}_\lambda.$$

Koska funktiot $f(x) = \mathrm{e}^x$ ja $g(x) = x^2$ ovat aidosti konvekseja, vallitsee tässä ketjussa yhtäsuuruus, jos ja vain jos luvut u_k ovat kaikki keskenään yhtäsuuria.

Lähdeluettelo

[1] J.Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class, An Introduction to the Art of Mathematical Inequatilies*, Cambridge University Press, 2007.

[2] The MacTutor History of Mathematics archive, `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmaan kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Hiukan osittelulaista

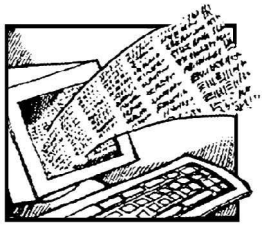
Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra



Pietarin paradoksi ja tietokonesimulaatio

Jani Isohanni
Ohjelmistotekniikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto
jani.isohanni@tut.fi

Pietarissa 1700-luvulla vaikuttanut sveitsiläinen matemaatikko Nicolaus Bernoulli esitti kuvitteellisen uhkapelin, jossa kolikkoa heitetään, kunnes saadaan kruuna, ja pelaaja voittaa rahaa sen mukaan, monennellako heitolla kruuna tulee. Jos kruuna tulee heti ensimmäisellä heitolla, voittaa pelaaja kaksi euroa. Jos toisella, niin hän voittaa neljä euroa jne. Yleisesti, jos kruuna tulee n:nnellä heitolla, pelaaja voittaa 2^n euroa, ja klaavalla peli jatkuu mahdollisesti rajattoman kauan.

Tämä peliasetelma osoittautuu oivaksi esimerkiksi siitä, miten tietokonesimulaatioilla voidaan saada näennäisesti ristiriitaisen oloisia tuloksia.

Voiton odotusarvo

Olemme kiinnostuneita, miten paljon pelaajan kannattaa maksaa pelatakseen kuvattua peliä. Lähestytään asiaa laskemalla ensin voiton odotusarvo. Jotta voisimme puhua asioista täsmällisesti, niin sovitaan muutamasta tarvittavasta käsitteestä.

Pelikierros tarkoittaa kolikon heittämistä, kunnes saadaan kruuna, *peli* on jokin valittu määrä pelikierroksia, ja *heitto* on yksi kolikon heitto. Nyt peli koostuu valitusta määrästä pelikierroksia, jotka puolestaan kestävät korkeintaan valitun määrän heittoja.

Panos on yhdellä pelikierroksella asetettu panos, *voitto* yhdeltä kierrokselta voitettu rahamäärä, ja *voitto-summa* on yhden pelin kaikilta pelikierroksilta yhteensä voitettu summa.

Tarkastellaan ensin heittojen maksimimäärän suhteen rajoitettua tapausta.

Jos pelikierros päättyy ensimmäiseen heittoon, niin vain kruunalla voittaa ja voiton todennäköisyys on 0,5 voiton ollessa 2 euroa. Tästä voidaan laskea, että voiton odotusarvo yhdelle kierrokselle on $0{,}5 \cdot 2 = 1$, ja päätellään, että yhdeltä pelikierrokselta voittaa keskimäärin yhden euron eli pelaajan kannattaa osallistua peliin kierrokseksi alle eurolla.

Jos pelikerros venytetään maksimissaan kahteen peräkkäiseen heittoon, on voiton odotusarvo $0{,}5 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 4 = 2$ euroa eli pelaajan kannattaa ostaa yksi pelikierros alle kahdella eurolla. Tämä yleistyy suoraviivaisesti tapaukseen, jossa sallitaan korkeintaan n perättäistä heittoa, ja voiton odotusarvoksi saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n} 2^n = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Siis mitä enemmän perättäisiä heittoja kierroksella sallitaan, sitä enemmän pelaaja voi odottaa voittavansa yhdellä pelikierroksella. Jos heittoja sallitaan rajattoman paljon, niin periaatteessa pelaajan kannattaa pelata yksi kierros millä tahansa äärellisellä summalla, koska voiton odotusarvo kasvaa äärettömäksi.

Simulaatio

Edellisen pohjalta tuntuu loogiselta odottaa, että jos simuloimme peliä tietokoneella, niin peli kääntyy pelaajalle voitolliseksi, kunhan sisällytämme simulaatioon tarpeeksi monta pelikierrosta.

Luodaan ohjelma, joka simuloi halutun määrän pelikierroksia, joissa kussakin voi olla rajaton määrä heittoja[1]. Ohjelma tulostaa pelatuista pelikierroksista keskimääräisen voiton kierrokselta eli paljonko peli keskimäärin palauttaa pelatulta kierrokselta, sekä pelatun pelin voittosumman. Yhden pelikierroksen osalta voiton odotusarvo on ääretön, joten keskimääräisen toteutuneen voiton voisi olettaa kipuavan kohti ääretöntä, kunhan lisäämme pelikierroksia tarpeeksi. Koska nyt kierroksia voi tulla rajattoman paljon, kannattaa äskeisten laskujen pohjalta pelaajan lähteä peliin mukaan millä tahansa äärellisellä panoksella kierrosta kohti.

Ohessa on taulukoituna lyhyellä C-ohjelmalla tehdyn simulaation tuloksia. Viimeisessä sarakkeessa on pelaajan nettovoitto koko pelistä, kun oletetaan, että hän on maksanut yhdestä pelikierroksesta 20 euroa.

Kierroksia	Keskim. voitto/kierros	Nettovoitto
10	2,8	−172
10^2	4,62	n. −1540
10^3	12,91	n. −7000
10^4	8,73	n. −130000
10^5	19,29	n. −71000
10^6	12,83	n. −7,2M
10^7	11,40	n. −86M
10^8	18,97	n. −100M

Tulokset vaikuttavat hieman epäintuitiivisilta. Laskujen mukaan pelistä kannattaa maksaa mikä tahansa äärellinen summa rahaa per kierros, mutta jo kahdenkymmenen euron panoksella jää tappiolle sitä enemmän mitä pidempään peliä pelaa. Voisi odottaa, että tällaisilla pelimäärillä voittosumma kasvaisi nähtävästi, mutta esimerkiksi sadan miljoonan pelatun kierroksen osalta jäädään tappiolle peräti sata miljoonaa. Tämän kaiken päälle keskimääräinen voitto vaihtelee aika paljon. Peli ei vaikuta oikein kannattavalta. Onko ohjelmassamme vikaa? Tai alun laskuissa?

Lähdetään oletuksesta, että ohjelmassa tai sen ajossa ei ole mitään outoa eli simulaation tulokset sinällään ovat kirjautuneet oikein. Tällöin voidaan päätellä, että viimeisessä pelissä ei ollut yhtään yli kolmenkymmenen kruunun sarjaa, koska jos olisi ollut, niin siitä saatu voitto yksinään olisi isompi kuin nyt saatu koko voittosumma (koska $2^{31} \approx 2{,}15 \cdot 10^9 > 100000000 \cdot 18{,}97 \approx 1{,}9 \cdot 10^9$).

Tämä antaa syytä pohtia, kuinka todennäköistä ylipäätään on saada tietyn pituisia heittosarjoja, kun pelissä pelataan jokin määrä kierroksia. Todennäköisyys saada yli k:n heiton kierros on

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=k+1}^{N} (1/2)^i = ((1/2)^{k+1})/(1-1/2) = (1/2)^k.$$

Suoraan komplementin todennäköisyydestä seuraa, että todennäköisyys, ettei pelikierroksella saada yli k:ta heittoa, on $1-(1/2)^k$, joten jos pelataan n pelikierrosta, niin todennäköisyys p, ettei yhdelläkään kierroksella tule yli k:ta heittoa, on

$$p = (1-(1/2)^k)^n. \tag{8}$$

Lasketaan nyt, mikä on pisin esiintyvä heittosarja todennäköisyydellä p, kun pelikierrosten lukumäärä n tunnetaan. Tämä edellyttää, että ratkaisemme edellisen yhtälön k:n suhteen, ja pienellä algebrallisella pyörittelyllä saammekin

$$k = \frac{\ln(1-\sqrt[n]{p})}{\ln 0{,}5}.$$

Asetetaan nyt $p = 0{,}95$ ja lasketaan k edellisessä simulaatiossa ajetuille kierroslukumäärille, jolloin saadaan oheinen taulukko.

Pelikierroksia n	Pisin heittosarja k tn:llä $p = 0{,}95$
10	7,6
10^2	10,9
10^3	14,3
10^4	17,6
10^5	20,9
10^6	24,2
10^7	27,5
10^8	30,9

Huomaamme, että vaikka pelaisimme sata miljoonaa kierrosta, niin todennäköisyydellä 0,95 jokaisella kierroksella jäädään alle 31 peräkkäisen heiton. Tästä seuraa, että todennäköisyydellä 0,95 voittosumma sadan miljoonan kierroksen pelissä on alle 2^{31}, joka tekee noin $2^{31}/10^8 \approx 21{,}5$ euroa per kierros. Siis todennäköisyydellä 0,95 jää pelissä tappiolle, jos sijoittaa yli 21,5 euroa kierrosta kohti. Tätä vasten simulaation tulos rupeaakin tuntumaan järkevältä.

Simulaation aluksi paradoksaaliselta vaikuttaneet tulokset osoittautuvat näin lähemmässä tarkastelussa loogisiksi. Peli ei vaikutakaan enää (ainakaan ajankäytöllisesti) kovinkaan houkuttelevalta. Vaikka siinä on

[1] Periaatteessa rajaton määrä. Käytännössä tietokoneella laskettaessa on käytössä aina rajallinen määrä resursseja (esim. aika). Tässä tapauksessa nämä rajat eivät kuitenkaan tule lähellekään ja on mielekästä puhua rajattomasta määrästä kierroksia.

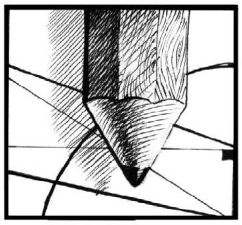
mahdollista voittaa huimia summia, niiden todennäköisyys on hyvin pieni. Odotusarvoa laskettaessa tämä jää helposti huomaamatta, koska näille epätodennäköisille pelikierroksille kasattu voitto on vastaavasti hyvin suuri, jolloin ne odotusarvoa laskiessa tietyssä mielessä kumoavat toisensa.

Lopuksi

Alussa esitetyt laskut antoivat kuvan, että Bernoullin esittämää peliä kannattaa pelata millä tahansa äärellisellä panoksella. Kuitenkin tietokonesimulaatiossa kävi ilmi, että jo pienellä kierroskohtaisella panoksella tappiota kertyi huimasti. Tämä on hyvä esimerkki siitä, miten simulointi ja puhtaasti teoreettinen tarkastelu tukevat toisiaan; simulaatiossa saatu hieman yllättävä tulos pakotti miettimään tilannetta tarkemmin. Tämän tarkastelun jälkeen kävikin ilmi, että pelkän odotusarvon laskeminen antoi pelistä ja sen luonteesta harhaanjohtavan kuvan.

Tulosta koulusi ilmoitustaululle Solmun etusivulta `http://solmu.math.helsinki.fi`

– Solmun juliste
– Monikielisen matematiikkaverkkosanakirjan juliste



Tutkijavaihdossa Berkeleyssä

Vesa Julin
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Olin jo jatko-opintojeni alkuaikoina keskustellut ohjaajani Petri Juutisen kanssa opintomatkatkasta Yhdysvaltoihin. Ohjaajani painotti, että tämä olisi erittäin tärkeää mahdollista tutkijanuraa ajatellen, erityisesti siitä syystä, että oman alani, epälineaaristen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ja erityisesti ääretön harmonisten funktioiden, tutkimuksen huippu oli jo pitkään tullut uudelta mantereelta. Vierailun ajankohdaksi suunnittelimme neljännen jatko-opintovuoteni alkua eli syyslukukautta 2009.

Yhdysvalloista minulla oli mielessäni vain yksi paikka: UC Berkeley, Kalifornia. Berkeleyn yliopisto on kansainvälisesti arvostettu, ja sen matematiikan laitos legendaarinen. Haaveenani oli päästä kuuluisan Lawrence Craig Evansin oppeihin. Samalla voisin toteuttaa pitkäaikaisen unelmani, eli surffauksen opettelun Kalifornian aalloissa. Mikä tahansa muu vaihtoehto olisi siis pettymys. Olinkin todella iloinen, kun Craig Evans suostui ottamaan minut vastaan. Vähänpä osasin aavistaa, miten tuskallinen ja vaikea syksy minulla oli edessä.

Ensinnäkin jo pelkän viisumin haku oli pitkä ja vaivalloinen prosessi. Myös asunnon etsiminen tuntui välillä toivottomalta Suomesta käsin, sillä minulla ei ollut mitään auttavia kontakteja Berkeleyhin. Lopulta pitkällisten taistelujen jälkeen löysin itselleni asunnon, otin viisumiongelmista selkävoiton ja pääsin matkustamaan San Franciscoon heinäkuun lopulla 2009.

Ensimmäiset viikot Berkeleyn huippuyliopistossa olivatkin sitten nuorelle jyväskyläläiselle matematiikan opiskelijalle totaalinen kulttuurishokki. Hyvin nopeasti minulle selvisi, että amerikkalaisten menestyksen salaisuus on yksinkertaisesti ja ainostaan kova työnteko. Matematiikkaa tehdään intohimoisesti ja mikä tärkeintä, koko ajan. Joka päivä amerikkalaiset kollegani tapasivat toisensa puolelta päivin jossain kampuksen läheisessä kahvilassa ja aloittivat työnteon, eivätkä lopettaneet ennen kuin ilta pimeni ja kahvilat sulkeutuivat. Sama toistui joka päivä, lauantait ja sunnuntait mukaan luettuna. Tilanne näytti surffaamisen kannalta erittäin pahalta.

Toinen amerikkalaisten jatko-opiskelijoiden erityispiirre on heidän erittäin laaja matemaattinen yleissivistyksensä. Sainkin useammin kuin kerran kuulla suoraa palautetta siitä, miten omat matemaattiset perustietoni olivat aivan liian puutteelliset, ja että minun on mahdotonta saada selkeää kokonaiskuvaa ääretön harmonisten funktioiden teoriasta, jos en modernin osittaisdifferentiaaliyhtälöiden (ODY) teorian lisäksi vähintään tunne Fourier-analyysia, stokastiikkaa ja differentiaaligeometriaa. Näitä vaikeuksia säesti vielä paikallisten ”hyväntahtoinen” vitsailu Suomen matematiikkakulttuurin kustannuksella, kuten vihjaileva kysymys ”Tutkitaanko Suomessa jo muutakin kuin kvasikonformikuvauksia?” Erikoistuminen ei ilmeisesti ollut Amerikassa muotia, toisin kuin meillä Suomessa.

Myöskään itse Berkeleyn kaupunki ei loistollaan vakuuttanut. Berkeley on sadantuhannen asukkaan kaupunki aivan San Franciscon lähistöllä. Sen kulta-aika si-

joittui 60-luvulle, jolloin hippiliike ja Jefferson Airplane olivat vielä kova juttu. Tästä ajasta muistona on enää maan korkein määrä asunnottomia ihmisiä, joita paikkakunnalle houkuttelee lämmin ilmasto ja kaupungin verrattaen korkea sosiaalituki. Tämän kurjuuden groteskina vastapainona ovat parin sadan metrin päässä ylhäällä kukkuloilla sijaitsevat ylemmän keskiluokan huvilat. On sanomattakin selvää, ettei oma tuhannen dollarin budjettini riittänyt asuntoon Berkeley Hillsin kukkuloilla, vaan sain kokea miten karvaalta elämä maistuu, kun amerikkalainen unelma jää toteutumatta.

Kaikesta tästä huolimatta alkoivat asiat pikkuhiljaa sujua. Hautasin heti haaveet surffaamisesta ja aloin opiskella matematiikkaa kokopäiväisesti paikalliseen tyyliin päivittäin 10-12 tuntia. Kaksi ensimmäistä kuukautta olivat varmasti jatko-opintoaikani rankimmat. Yritin jotenkin pysyä mukana yhteisissä jatko-opiskelijaseminaareissa, ja samaan aikaan paikkailin matematiikan yleissivistyksessäni olevia aukkoja opiskelemalla intensiivisesti differentiaaligeometriaa. Sinnikäs työnteko palkittiin, ja jo parin kuukauden jälkeen sain juonen päästä kiinni. Jatko-opiskelijaseminaarit eivät enää tuntuneet täysin käsittämättömiltä, ja mikä tärkeintä, oma tutkimukseni alkoi saada tuulta alleen. Kiitokset tästä kuuluvat Craig Evansin loistaville jatko-opiskeljoille Scott Armstrongille ja Charles Smartille, jotka varauksetta ottivat minut mukaansa tutkimusprojekteihinsa, ja tartuttivat minuun oman innostuksensa matematiikan opiskeluun. Tajusin kuinka tärkeää yhteistyö muiden jatko-opiskelijoiden ja kollegojen kanssa on. Näin jälkeenpäin tuntuu itse asiassa uskomattomalta, etten tätä ennen ollut keskustellut ohjaajaani lukuun ottamatta kenenkään kanssa omasta tutkimusalastani tai edes sen mielekkyydestä. Mukavana bonuksena oli myös se, että yhteistyö Armstrongin ja Smartin kanssa poiki yhden artikkelin, ja näin väitöskirjanikin tuli kuin sattumalta valmiiksi.

Loppujen lopulta syksyni Berkeleyssä onnistui yli odotusten. Tutkijana itsenäistymisen kannalta kokemus oli erittäin tärkeä. En myöskään voi lakata ihmettelemästä amerikkalaisten intohimoista asennetta työntekoon, oli sitten kyse matematiikasta tai muusta. Oma työ koetaan merkitykselliseksi, eikä siihen ole tarvetta suhtautua eurooppalaisen sarkastisesti.

Matemaattisista aineista potkua ympäristöuralle

Kaisa-Reeta Koskinen

Ympäristöasioiden opiskelun suosio on kasvanut viime vuosina. Yhä useampi opiskelija hakeutuu opiskelemaan nimenomaan kestävää kehitystä tai ympäristönsuojelua. Myös matemaattisten aineiden opiskelu voi avata ovet ympäristöalalle. Lisäksi ne tarjoavat sellaista erikoisosaamista, jonka avulla unelmien työpaikan löytyminen voi helpottua.

Luonnontieteiden opiskelu antaa vahvan pohjan suuntautua ympäristöaloille. Useiden ympäristöhankkeiden taustalla on hyvinkin yksityiskohtaisia teknisiä standardeja, joiden ymmärtäminen edellyttää kykyä arvioida säädösten vaikutuksia pitkälle prosesseihin ja eri sektoreille. Uskallan jopa väittää, että ydinvoimakeskustelun taso olisi ollut eduskunnassa korkeampi, tai ainakin tieteellisesti argumentoidumpi, jos kansanedustajilla olisi ollut parempi luonnontieteellinen koulutus!

Ympäristöalan keskustelu on suurelta osin hyvin teknistä ja asioiden ymmärtäminen yksinkertaisesti vaatii vahvaa luonnontieteiden osaamista. Esimerkiksi haitallisten aineiden pitoisuuksien tarkkailu edellyttää hyvää ymmärrystä aineiden mittaamisesta sekä ymmärrystä siitä, miten tiettyjä aineita voidaan korvata. Kierrätysprosessien parantamiseen puolestaan tarvitaan kykyä ymmärtää eri materiaalien ominaisuuksia, jotta voidaan pohtia keinoja niiden tehokkaaseen hyödyntämiseen ja erotteluun prosessissa. Pelkästään riskiarvioinnit edellyttävät suurusluokkien arvioimista, joka yllättäen näyttää olevan vaikea laji maallikoille.

Luonnontieteet antavat niin kovan metodologisen koulutuksen, että sen pohjalta on helppoa perehtyä myös muihin teknisiin, luonnontieteitä soveltaviin aihealueisiin. Vaikka työssä ei ehkä suoranaisesti vaadittaisikaan integroimista tai aaltoyhtälöiden ratkaisutaitoja, on luonnontieteellisen koulutuksen antamasta kyvystä hahmottaa asioiden yhteyksiä, tulkita tutkimusten tuloksia sekä suunnitella ja arvioida koeasetelmia varmasti hyötyä alalla kuin alalla.

Luonnontieteellisellä koulutuksella on hyvä maine ja matemaattisista aineista valmistuneita pidetään yleisesti kovina osaajina. Monen rekrytoijan suulla on todistettu, että luonnontieteellistä osaamista on lähes mahdoton hankkia työn ohessa. Muut työn aspektit sen sijaan yleensä pystyy oppimaan. On siis helpompaa palkata luonnontieteilijä oppimaan EU:n toimintaperiaatetta kuin alkaa opettaa valtiotieteilijälle matemaattista ajattelua.

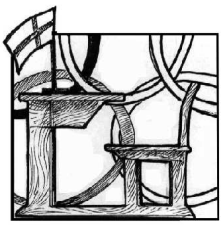
Jos luonnontieteilijä haluaa suuntautua ympäristöalalle, hänen kannattaa jo opintojensa aikana valita aihetta tukevia kursseja ja opintokokonaisuuksia. Mittaustekniikka, prosessien ymmärtämistä tukevat opinnot sekä kaikki kemikaalivaikutusten arviointiin liittyvät opinnot ohjaavat työllistymään ympäristötehtäviin. Toisaalta ympäristökysymykset ovat niin laajoja ja kaikkialle levittäytyviä, että lähes minkä tahansa sivuaineen opiskelusta on hyötyä. Viestintää, ympäristöbiologiaa, kehitysmaatutkimusta, valtio-oppia –

Kirjoittaja on Oulun yliopistosta valmistunut fyysikko ja opettaja, joka on työskennellyt teollisuuden ympäristöasiantuntijana yli 10 vuotta. Hän on ollut aina kiinnostunut sekä materiaalifysiikasta että maailman parantamisesta.

ihan kaikesta on etua työllistymisessä. Sivuaineopintoja kannattaakin miettiä suhteessa siihen, millaisiin tehtäviin haluaisi suuntautua. Jos tähtäimessä on esimerkiksi ura lainsäädäntötyössä tai EU-instituutioissa, kannattaa luonnontieteellistä osaamista vahvistaa esimerkiksi valtio-opin sivuaineella. Jos taas mieli palaa ympäristöasioista tiedottamisen pariin, kannattaa harkita viestintäaineiden opiskelua. Maailmalla on jatkuva tarve viestintään koulutetuista luonnontieteen ammattilaisista, jotka pystyvät kertomaan tieteen saavutuksista suurelle yleisölle.

Varsinaisten opintosuoritusten lisäksi oma harrastuneisuus ja halu ottaa asioista selvää on myös tärkeä. Ympäristötehtävissä ei tarvitse olla viherpipertäjä tai puunhalaaja – toisaalta tehtävissä auttaa, jos asioihin on aitoa kiinnostusta.

Matemaattisia aineita lukemalla voi siis suuntautua monelle alalle. Suorinta tietä unelmien työhön ei ehkä takaa kaikkein itsestään selvin valinta ja joskus vaihtoehtoisia reittejä valinnut voi saada jopa etuja erikoistumisestaan. Omaa osaamistaan kannattaa myös mainostaa työnantajille. Matemaatikko voi tehdä muutakin kuin sijoittua matemaatikoksi. Ympäristöalan työpaikkoja siis kannattaa hakea, vaikkei ilmoituksessa suoraan etsittäisikään matemaattista lahjakkuutta. Luonnontieteellisestä koulutuksesta voi olla ylpeä ja sen antamia taitoja rohkeasti hyödyntää. Kuten vanha professorini kerran totesi: ”Presidentiksi on päästy pienemmilläkin ansioilla kuin olemalla fyysikko tai matemaatikko”.



Matematiikan asemasta perusopetuksen uudessa tuntijaossa

Hyvästä Pisa-menestyksestä huolimatta peruskoulunsa päättävien matemaattiset tiedot ja taidot ovat varsin vaatimattomia. Murtolukujen peruslaskutoimituksia ei osata, saatetaan sekoittaa yhteenlasku ja kertolasku keskenään, laskutoimitusten suoritusjärjestys on tuntematon asia ja alkeellisimmatkin prosenttilaskut ovat ylivoimaisia. Yläkoulun oppikirjoissa ei esitetä juuri minkään matemaattisen väittämän perustelua, mikä on johtanut katekismusmaiseen ulkolukuun. Opitaan jäljittelemään mekaanisia suorituksia, mitkä kokeen jälkeen unohtuvat, koska sisältöä ei ole ymmärretty.

Surkea tilanne on suora seuraus tunnetuista poliittisista päätöksistä. Vuonna 1985 yläkoulun tasokurssit poistettiin, mikä antoi välittömästi aiheen opetussuunnitelmien keventämiseen, sillä kaikki eivät todellakaan opi kaikkea. Näin myös oppimaan halukkaat ja kykenevät oppilaat latistettiin samalle tasolle kaikkein heikoimpien kanssa. Käytännössä vähintään neljäsosaa ikäluokasta kiellettiin oppimasta kykyjensä mukaan. Näiden päätösten seurauksena yläkoulun matematiikka on muuttunut lähes pelkäksi laskimen kanssa leikkimiseksi. Kaikki jatko-opinnoissa tarvittava oikea matematiikka on siirtynyt lukion pitkän matematiikan oppimäärään. *Siis kaikki se matematiikka, jonka opiskeluun esimerkiksi keskikoulun ja lukion käynyt pääsykokein valikoitu osa ikäluokasta sai käyttää* 5,5 *vuotta, opiskellaan nyt kauhealla kiireellä lukion pitkässä ma-*

tematiikassa 2,5 *vuodessa.* On selvää, että oppiminen jää suurelta osin pinnalliseksi. Ylioppilaskokeesta päästään suhteellisen arvostelun takia läpi osaamatta edes yhtä tehtävää kokonaan oikein. Korkeakoulujen opettajat joutuvatkin jatkuvasti ihmettelemään uusien opiskelijoiden heikkoja matematiikan taitoja. Ammattikorkeakoulun aloittava ei välttämättä osaa laskea yhteen kahta murtolukua ja teknilliset korkeakoulut joutuvat antamaan tukiopetusta matematiikan alkeissa. Näin ei pitäisi olla sivistysvaltiossa.

Lukion pitkän matematiikan oppimäärän osaaminen ja ymmärtäminen on välttämätön edellytys monien alojen korkeakouluopiskelulle. Oppimäärää ei voi supistaa, mutta sen opiskelu voidaan aloittaa aikaisemmin. Perusopetuksen tuntijakoa nyt uudistettaessa tulee varata mahdollisuus matematiikan valinnaisen syventävän oppimäärän opiskeluun peruskoulun 8. luokalta alkaen. Se sisältäisi mm. peruslaskutoimitukset polynomeilla ja yksinkertaisilla rationaalilausekkeilla sekä deduktiivista geometriaa, siis asioita, joita opiskeltiin keskikoulussa ja peruskoulussakin vielä tasokurssien aikaan. Näiden toimenpiteiden seurauksena oppilailla olisi enemmän aikaa työstää matematiikkaa mielessään sen sijaan että nykyisin esimerkiksi koko geometrian oppimäärä opiskellaan lukiossa 5 viikossa. Jokainen ymmärtää, mikä laadullinen parannus oppimistuloksissa näin saavutettaisiin.

Rationaalilausekkeiden käsittely edellyttää murtolukujen ja niiden laskutoimitusten ymmärtämistä. Se onkin tärkein yksittäinen asiakokonaisuus, joka ratkaisee oppilaan menestymisen lukion pitkän matematiikan opinnoissa. Siksi on outoa, että tämän avainkäsitteen opettaminen on jätetty vain vähän matematiikkaa tunteville luokanopettajille. Tällä hetkellä he vastaavat kahdesta kolmasosasta peruskoulun matematiikanopetuksesta. Lehtori Liisa Näverin väitöskirjassaan esiintuoman tutkimusmateriaalin mukaan ainoastaan alle 10 % peruskoulun päättäneistä lopulta ymmärtää, mistä murtoluvuissa on kysymys. Tämä onneton tilanne johtuu pääosin siitä, että koko asia on alusta alkaen opittu huonosti tai väärin. Matematiikkaa ymmärtämättömien opettajien kielteiset asenteet oppiainetta kohtaan heijastuvat oppimistuloksissa. Uusiin opetussuunnitelmiin, lakiin ja asetukseen tulee kirjata, että peruskoulussa matematiikan opetuksen hoitavat 5. luokalta alkaen aineenopettajat. Ainoastaan matemaattisen koulutuksen saanut opettaja ymmärtää murtolukujen, rationaalilausekkeiden ja tiettyjen lukiossa opittavien korkeamman matematiikan käsitteiden välisen yhteyden, ja osaa siksi opettaa murtoluvut asian tärkeyden edellyttämällä huolellisuudella. Keskikoulun ykkös- ja kakkosluokilla aineenopettajat vastasivat niiden opettamisesta.

Myös matematiikan oppituntien määrä on nostettava kansainväliselle tasolle. Suomen peruskoulussa matematiikan opiskeluun käytetään keskimäärin 2,6 viikkotuntia, kun eurooppalainen keskiarvo on 4,3 viikkotuntia. Kuvittelemmeko olevamme muita eurooppalaisia etevämpiä matematiikassa?

Tällainen opetuksen uudistus vaatii päättäjiltä ennakkoluulotonta tosiasioiden tunnustamista. Sitä helpottaisi, jos tutkittaisiin, millaisten opetussuunnitelmien vallitessa maamme metsäteollisuuden, laivanrakennus- ja muun metalliteollisuuden sekä Nokian luoneet insinöörit matematiikkansa opiskelivat. Nokian kehitykseen merkittävästi vaikuttanut Commodore-64-sukupolvi käsittää viimeiset peruskoulussa kunnollista matematiikan opetusta saaneet ikäluokat.

Mäntässä, Espoossa, Kiimingissä ja Pirkkalassa 28. huhtikuuta 2010

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Heikki Pokela
Tapiolan lukio

Saini Sorsa
Pirkkalan yhteislukio

Maija-Liisa Spangar
Kiimingin lukio

Marjukka Suihko
Pirkkalan yhteislukio

Matti Tuomi
Pirkkalan yhteislukio