Mongoliassa on matematiikkakilpailu alakoulunopettajillekin

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Solmun numerossa 3/2007 kerrottiin Mongolian opettajien matematiikkakilpailusta ja julkaistiin kilpailun tehtävät suomalaisten opettajien ja muiden Solmun lukijoiden ratkaistaviksi. Tehtävät olivat vaativia ja palaute niukkaa: ratkaisuja lähetti vain Uudenkaupungin lukion silloinen oppilas Janne Junnila.

Mongolian matematiikkaolympialaisten lajivalikoimaan kuuluu myös alakoulunopettajien matematiikkakilpailu. Se on järjestetty jo 15 vuoden ajan. Kilpailussa menestyminen tuottaa opettajille merkittävää taloudellista etua, ja siihen osallistutaan innokkaasti. Ystäväni Ulan Batorin yliopiston matematiikan professori **Dashdorj Tsherendorj** kertoo, että kilpailu on merkittävästi kohottanut Mongolian opettajien matemaattista tasoa. Edellä viitatussa kirjoituksessa kysäisin, kuka järjestäisi matematiikkakilpailun Suomenkin opettajille. Ehdokkaita ei ole kuulunut, kenttä on siis yhä avoin.

Mongolian vuoden 2010 alakoulunopettajien matematiikkakilpailu pidettiin Mongolian kansallisten matematiikkaolympialaisten yhteydessä toukokuussa Ulan Batorissa, ja tehtävät ovat ohessa. Julkaisemme lukijoiden ratkaisuja, jos saamme niitä. Lähettäkää ratkaisujanne suoraan toimittajalle osoitteeseen Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu tai sähköpostitse osoitteeseen matti.lehtinen@helsinki.fi.

1. Matematiikkakilpailussa oli 25 osallistujaa ja kolme tehtävää A, B ja C. Jokainen osallistuja ratkaisi ainakin yhden tehtävän. Niissä osallistujissa, jotka eivät ratkaisseet tehtävää A, oli kaksi kertaa niin paljon sellaisia, jotka ratkaisivat B:n kuin sellaisia, jotka ratkaisivat C:n. Osallistujia, jotka ratkaisivat vain tehtävän A oli yksi enemmän kuin muita tehtävän A ratkaisseita. Niistä osallistujista, jotka ratkaisivat vain yhden tehtävän, puolet ei ratkaissut tehtävää A. Kuinka moni osallistuja ratkaisi vain tehtävän B?

2. Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $m^2 < a$, $b < m^2 + m$ ja $a \neq b$. Määrittäkää kaikki ne luonnolliset luvut c, joille c on luvun ab tekijä ja $m^2 < c < m^2 + m$.

3. Olkoot A ja C neliön $XOBD$ sisäpisteitä niin, että $\angle AXC = \angle ABC = 45°$. Merkitään kolmion PQR alaa symbolilla S_{PQR}. Osoittakaa, että

$$S_{AXO} + S_{ABC} + S_{CXD} = S_{ACX} + S_{AOB} + S_{CBD}.$$

4. Määrittäkää kaikki positiiviset kokonaisluvut N, joille on olemassa positiivinen kokonaisluku M seuraavin ominaisuuksin:

a) M:n ensimmäiset numerot muodostavat luvun N.

b) Jos S on se luku, joka saadaan, kun M:n ne ensimmäiset numerot, jotka muodostavat luvun N, siirretään M:n viimeisiksi numeroiksi, niin $S \cdot N = M$.

(Esimerkiksi kun $N = 46$, luku $M = 4601000217438573602956716$ toteuttaa ehdon.)

5. Todistakaa, että jokainen parillinen kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin $2n(4n+1)$, voidaan kirjoittaa muotoon

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 4n,$$

missä kunkin $\pm$-merkin kohdalle kirjoitetaan joko $+$ tai $-$.

6. Merkintä (a, b) tarkoittaa lukujen a ja b suurinta yhteistä tekijää. Olkoot m ja n sellaisia luonnollisia lukuja, että $(2m+1, 2n+1) = 1$. Määrittäkää

$$\left(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1,\ 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right).$$

Verkko Solmun matematiikkadiplomiosio osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` karttuu, I, II, III, IV ja V tehtävät ovat valmiit.