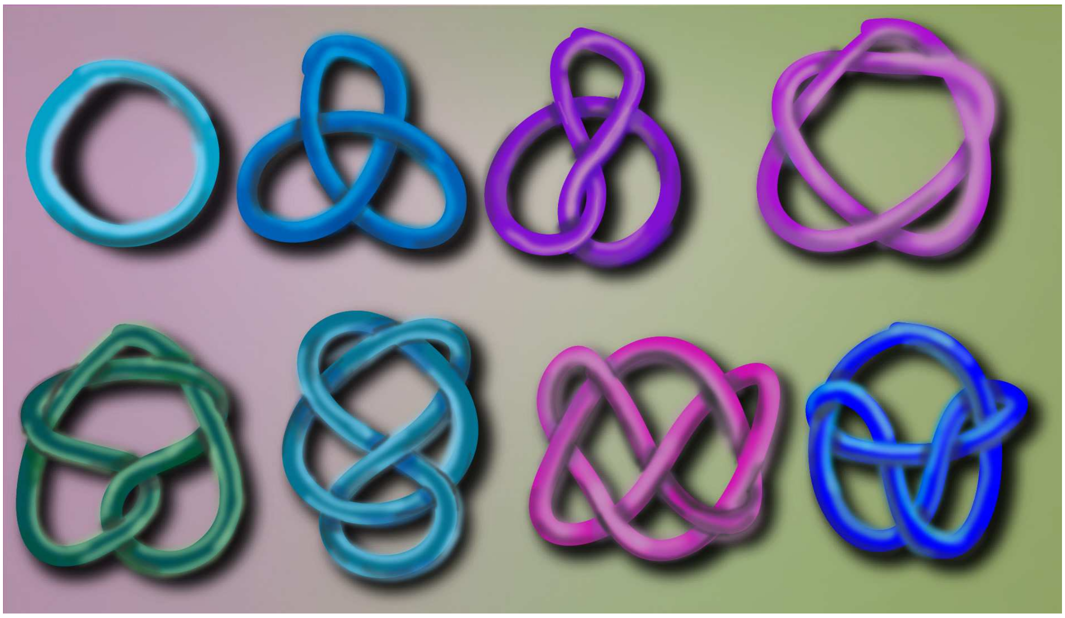
Solmu

Matematiikkalehti
2/2010

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 2/2010

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

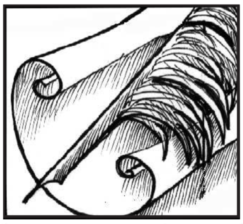
http://solmu.math.helsinki.fi/

Numeroon 3/2010 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 12.9.2010 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys



Matematiikan opetuksesta, taas

Solmu on lukuisia kertoja esittänyt käsityksiä matematiikanopetuksesta, yleensä siinä hengessä, että Suomen matematiikanopetuksessa ei kaikki ole niin kuin pitäisi. Jottei tämä, samanhenkinen kirjoitus olisi vain negatiivinen, lainaan aluksi *Siméon-Denis Poissonia*, 1800-luvun alun Ranskassa vaikuttanutta matematiikan monitoimimiestä, jonka nimi elää vaikkapa Poissonin jakaumassa, Poisson-prosessissa ja Poissonin differentiaaliyhtälössä $\Delta u = p$. Näin Poisson: "Elämä kelpaa vain kahteen asiaan: matematiikan tutkimiseen ja matematiikan opettamiseen." Mutta samaisen Poissonin tiedetään myös syvästi surreen sitä, että hänenkin aikanaan opettajiksi pyrkivät nuoret olivat kiinnostuneita saamaan hyviä virkoja, mutta eivät rakastaneet tiedettä.

Tällä kertaa matematiikan opetuksesta kirjoittamisen kimmokkeena ovat muutamat oireelliset yksityistapaukset. Ystäväni, ansioitunut matematiikan opettaja, oli saanut tehtävän: tuttavan lapsi oli abiturientti ja aikeissa kirjoittaa pakollisen matematiikan. Isä arveli pojan ehkä tarvitsevan pari kannustavaa oppituntia ystävältäni ennen kirjoituksia. Opettajan ja yksityisoppilaan keskusteluissa oli vastaan tullut oudonnäköinen olio, $\sqrt{1}$? Mutta ei huolta, oppilaalla oli laskin, ja sen avulla selvisi, että $\sqrt{1} = 1$. Toisen tehtävän kohdalla oli merkitystä tietää, kumpi luvuista 1 ja $\frac{3}{2}$ on suurempi. Ongelma! Mutta onneksi oli laskin. Sen mukaan $\frac{3}{2} = 1{,}5$, ja suuruusvertailu onnistui. Laskin auttoi myös ongelman $1 \cdot 4 \cdot (-1) = ?$ oikeaan ratkaisuun.

Toinen ystäväni, matemaatikko, oli joutunut samanlaiseen tehtävään, viimeistelemään sukulaistytön valmistautumista pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitukseen. Ystäväni kertoi yhä kauhistuneena joutuneensa toteamaan, että opetettava ei ollenkaan erottanut käsitteitä derivaatta ja integraali toisistaan.

Pilkkaaminen on rumaa. En halua siihen syyllistyä. On ihmisiä, joille yksinkertainenkin laskento on ylivoimainen haaste. Ja varmaan edellä kuvattu nuori henkilö selviää elämänsä läpi laskin tukenaan. Ehkäpä yleissivistykseksi riittää, että edes tietää derivaatalla ja integraalilla olevan jotain tekemistä keskenään. Mutta sitä ihmettelen, että näillä tiedoilla varustetut nuoret ovat kuitenkin viettäneet ainakin 12 vuotta koulussa ja istuneet monen monilla matematiikan tunneilla sekä suorittaneet hyväksyttävästi ylioppilastutkintoon osallistumiseen oikeuttavan määrän matematiikan kursseja. Miksi hälytyskellot eivät ole soineet? Miksi oppilaat siirtyvät joustavasti kurssilta toiselle, vaikka yksinkertaisimmatkaan asiat eivät ole jääneet mieleen? Ovatko opettajat kenties noita Poissonin visioimia matematiikan leipäpappeja?

Opetusministerimme esitti hiljattain kuningatarajatuksen yliopistojen ja ammattikorkeakoulujen pääsykokeiden korvaamisesta ylioppilastutkinnolla. Sehän olisi sinänsä paluuta vanhoihin hyviin aikoihin: ylioppilastutkinto on saanut nimensäkin siitä, että se oli aikoinaan Helsingin yliopiston pääsytutkinto. Ja paljon kritisoidut sanomalehtien julkaisemat koulujen ylioppilasarvosanojen paremmuuslistat nousisivat arvoon arvaamattomaan. Mutta niin kauan kun ylioppilastutkinto

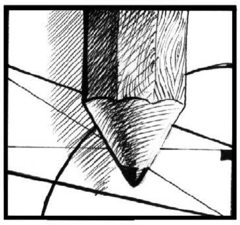
Pääkirjoitus

perustuu suhteelliseen arvosteluun ja kun arvosteluasteikkoon ovat vaikuttamassa kaikki edellä kuvattujen esimerkkien tapaiset ”osaajat”, niin läpäisyrima on perin matalalla. Esimerkiksi matematiikan hyväksytty arvosana ei todellakaan sinänsä kerro mitään positiivista matematiikan osaamisesta.

Jotta ministeri Virkkusen malli voisi toimia, olisi tutkinnon ja myös lukio-opetuksen ryhdistyttävä. Taitaa kuitenkin olla aika epärealistinen toive se, että ylioppilastutkinnon tärkeyden lisääminen todella lisäisi myös lukio-opiskelijoiden opiskelutarmoa. Eikä lukio voi sitä korvata, mikä jo peruskoulussa on menetetty. Jo siellä on matematiikan osaamiselle rakennettava oikea pohja, ja se ei ole pelkkä *laskinto*. (Tuo sana on oikein kirjoitettu; sen merkityksen lukija avatkoon.)

Matti Lehtinen

Pääkirjoitus

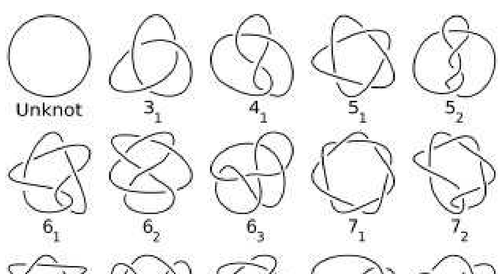


Solmuja taiteessa ja matematiikassa

Vadim Kulikov
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Why knot?

Modernien matemaattisten ongelmien ratkaisut ovat usein saavuttamattomia suurelle yleisölle. Jopa kuuluisa geometrialuonteinen Poincarén hypoteesin ratkaisu on sisällöltään varmaankin pysynyt mysteerinä monelle uutisten seuraajalle. Ratkaisusta puhumattakaan usein jo itse ongelman ymmärtäminen vaatii matemaattista ammattitaitoa. Toisaalta jos ongelma on yksinkertaisesti esitettävissä, sen ratkaisukin on yleensä pinnallinen. Pinnallisella en tarkoita välttämättä helppoa, vaan sellaista, joka ei tuo mukanaan uusia menetelmiä, ideoita tai syvällisempää ymmärrystä.



Kuva 1: Solmuja.

Solmuteoria on mielestäni erilainen. Se on kuin matematiikan poikkileikkaus useassa suunnassa. Solmuteorian ongelmat ovat helposti esitettävissä: alkuvaiheessa ei tarvita juuri minkäänlaisia matemaattisia valmiuksia. Sen sijaan solmuteorian ongelmien ratkaisuja löytyy usein vain syvällisistä matematiikan osa-alueista kuten algebra, topologia, differentiaaligeometria, analyysi, verkkoteoria ja jopa laskettavuuden teoria ja tietojenkäsittelytiede. Niin kuin matematiikalla yleensä, solmuteorialla on sovelluksia; sovellusaloja ovat mm. biologia (DNA- ja proteiinimolekyylien solmuttuminen) ja fysiikka [12, 8].

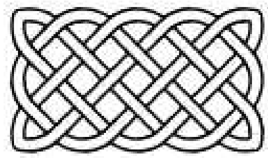
Tässä artikkelissa esitän erään solmuteorian menetelmän, väritysinvariantin. Ennen sitä kuitenkin leikitään vähän solmuilla. Lukija voi hypätä suoraan kappaleeseen *Solmut ja kysymykset*, jos haluaa.

Miten keltit piirsivät solmunsa?

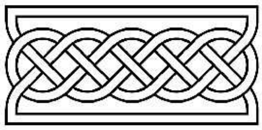
Nykyisessä Isossa-Britanniassa varhaiskeskiajalla eläneet keltit olivat kiinnostuneita solmuista ja käyttivät niitä paljon kirjojensa ja arvoesineittensä koristeluun. Heidän motiivinsa oli ilmeisesti esteettinen.[1] Kuvissa 2–5 on esimerkkejä kelttien piirtämistä solmuista ja niiden jäljennöksistä.

[1] Kelttien kulttuuri juontaa juurensa jo pronssikauteen. Lisää kelteistä ja heidän taiteestaan löydät viitteistä [2, 5, 6] ja tietenkin Wikipediasta.

Kuva 2: Kelttisolmu.



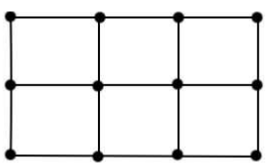
Kuva 3: Kelttien solmuja (a).



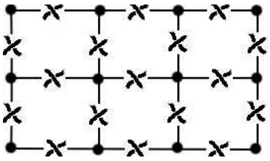
Kuva 4: Kelttien solmuja (b).

Kuva 5: Kelttien solmuja (c).

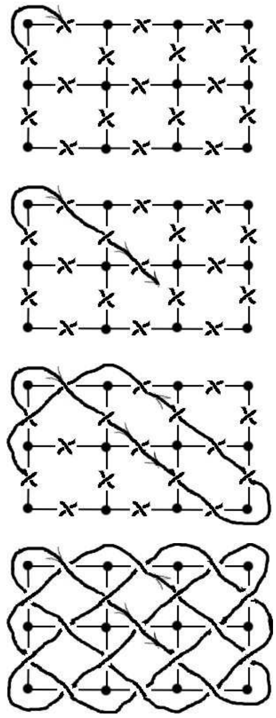
Esitän seuraavaksi algoritmin, jonka avulla voi piirtää kelteille tyypillisiä solmuja. Todennäköisesti keltit itse käyttivät muiden muassa tällaistakin algoritmia. Etenen esimerkin kautta. Tätä varten otetaan mikä tahansa tasoverkko:



Piirretään tasoverkon jokaiseen särmään pieni risteys kuvan  osoittamalla tavalla. Saadaan tämän näköinen kuvio:

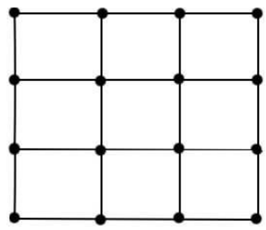


Sen jälkeen lähdetään kynällä yhdistämään näitä risteyksiä vuoron perään. Aina kun lähdetään risteyksestä, etsitään lähin seuraava risteys ja mennään sen läpi:



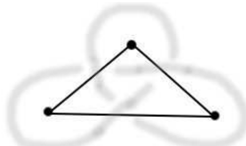
Huomaa tämän ja kuvan 3 solmun yhdenkasvoisuus.

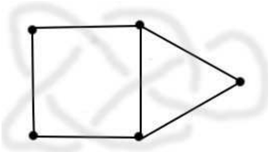
Tällä menetelmällä saadaan lopulta solmu. Voi kuitenkin käydä niin, että kaikki risteykset eivät tule ensimmäisellä kiertokerralla käytyä läpi. Silloin täytyy vain nostaa kynää ja jatkaa jostakin toisesta kohdasta. Näin tulee useampikomponenttinen punos. Jos kynää joutuu nostamaan kerran, kyseessä on *kahden komponentin punos*, jos joutuu nostamaan kaksi kertaa, niin kolmen jne. Tietysti kynää pitää myös nostaa aina, kun menee risteyksen läpi, jottei sotkisi sitä, mutta näitä kynännostoja ei tässä lasketa. Esimerkiksi kuvan 4 solmussa on kaksi komponenttia.

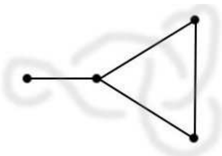


Kuva 6: Monenko komponentin punos tulee tästä verkosta?

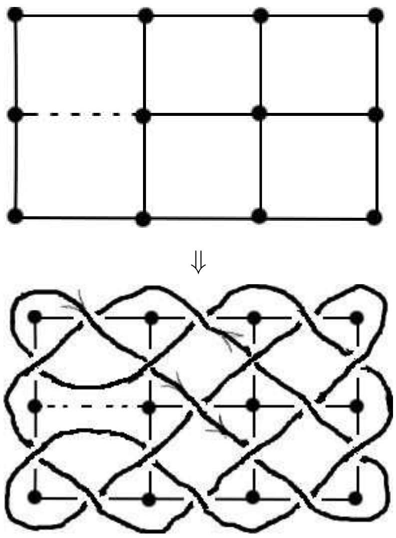
Kun on oppinut piirtämään solmuja yksinkertaisista verkoista, voi kokeilla mutkikkaampia verkkoja:







Ja toisaalta verkkoihin voi asettaa ”peilejä”. Tämä tarkoittaa, että solmun viiva ei saa koskaan ylittää peiliä. Seuraavassa on peili merkitty katkoviivalla:

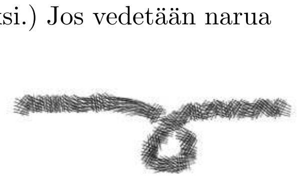


Tehtäviä:

- Monenko komponentin punos tulee 3×3-kokoisesta ruudukkoverkosta kuvassa 6? Yllä nähtiin, että 3×2-kokoisesta tulee 1-komponenttinen.
- Kuinka monen komponentin solmu tulee $m \times n$-kokoisesta ruudukkoverkosta?
- Anna vinkkejä kuvataiteen opettajalle.

Solmut ja kysymykset

Matemaattinen teoria solmuista keskittyy seuraavanlaiseen kysymykseen: mistä voimme päätellä, ovatko kaksi annettua solmua sama solmu vai eri solmuja? Esimerkiksi jos vedän narun päistä eri suuntiin, niin jääkö se solmuun vai avautuuko se? (Narun kitka oletetaan olemattomaksi.) Jos vedetään narua



molemmista päistä, niin se suoristuu. Tämä ei ole yhtä selvää tilanteissa

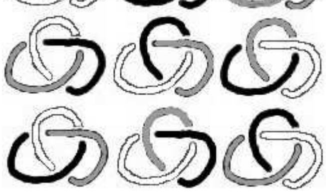
joskin lukija pienen miettimisen jälkeen näkee, miten nämäkin solmut aukeavat. Nämä solmut ovat *ekvivalentteja* triviaalin solmun kanssa (artikkelin alussa olevassa kuvan 1 taulukossa *Unknot* $= 0_1$). Sen sijaan solmu 4_1 ei aukea:

Solmuteoriassa yleensä ajatellaan, että narun päät ovat kiinni toisissaan sen sijaan, että ne sorottaisivat eri suuntiin niin kuin äskeisissä kuvissa. Se ei oleellisesti muuta tarkastelua.

Kun halutaan todistaa, että kaksi solmua ovat eri, mukaan tulee matemaattinen päättely. Kaikki edellisessä kappaleessa esiintyneet solmut ovat keskenään eiekvivalentteja (lukuun ottamatta taulukon solmua 3_1): tämä voidaan todistaa erilaisilla solmuteorian menetelmillä. Esitän yhden.

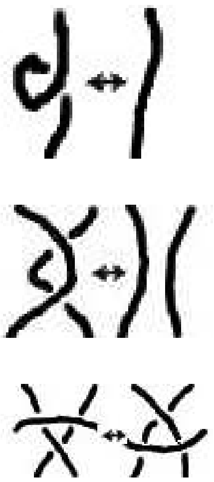
Solmujen värittäminen

Otetaan solmu ja kolme väriä: m=musta, h=harmaa ja v=valkoinen. Kun solmu on piirretty paperille risteyksineen, koostuu kuva (kaavio) yhtenäisistä paloista, kaarista, jotka menevät alituksesta alitukseen. Väritetään solmun kaavion kaaret väreillä m, h ja v. Sanotaan, että väritys on *hyvä*, jos jokaisessa risteyksessä törmää joko kolme eri väriä tai vain yksi väri. Annettuun solmukaavioon k liitetään luku $v(k)$, joka kertoo, kuinka monta hyvää väritystä solmulla on. Esimerkiksi kolmiapilasolmulla niitä on yhdeksän:



Luku $v(k)$ siis lasketaan kaaviosta k, joka esittää jotakin solmua s. Entä jos otetaan saman solmun toinen kaavio k_0 ja lasketaan $v(k_0)$? Matemaatikko Ralph Hartzler Fox, joka ensimmäisenä määritteli solmujen värityksen, todisti, että silloin saadaan aina sama luku kunhan kaaviot esittävät samaa solmua[2], eli $v(k) = v(k_0)$. Siis kaaviolla  on myös yhdeksän hyvää väritystä. Tämä antaa tavan todistaa, milloin kaksi solmua ovat eri: jos kahdesta kaaviosta k_1 ja k_2 saadaan eri väritysluvut, $v(k_1) \neq v(k_2)$, niin tiedetään, että kaaviot k_1 ja k_2 esittävät eri solmuja. Triviaalilla solmulla on vain kolme hyvää väritystä: se voidaan värittää vain yhdellä värillä kerrallaan. Koska $3 \neq 9$, seuraa tästä, että kolmiapilasolmu on epätriviaali.

Nyt jää todistettavaksi, että väritysluku tosiaan pysyy samana saman solmun eri kaavioissa. Tutkitaan aluksi kolmea tapaa muuttaa solmun kaaviota muuttamatta itse solmua:

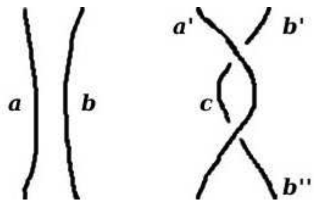


Kuvissa on esitetty solmukaavion jokin pieni osa-alue, ja ajatuksena on, että koko muu kaavio pysyy siirrossa muuttumattomana ja alueen sisällä oleva osa muuttuu siirron osoittamalla tavalla. Näitä siirtoja kutsutaan Reidemeisterin siirroiksi keinon 1920-luvulla esittäneen saksalaisen topologin Kurt Reidemeisterin mukaan. Viittaamme niihin siirtoina Ω_1, Ω_2 ja Ω_3 samassa järjestyksessä kuin kuvassa. Nämä vaikuttavat ehkä satunnaisesti valituilta siirroilta, jotka solmulle voi tehdä ("ilman saksia ja liimaa"), mutta todellisuudessa ne ovat vähän enemmän: saman solmun *mitkä tahansa* kaksi kaaviota voidaan muuttaa toisikseen käyttämällä pelkästään näitä kolmea siirtoa. Lukija voi vakuuttua tästä intuitiivisesti katsomalla sähköjohdon varjoa. Alkuperäinen saksankielinen todistus tälle löytyy artikkelista [9], ja vähän selkeämpi, modernimpi ja englanninkielinen esitys kirjasta [3].

Näytetään, että kaavioilla, jotka eroavat toisistaan yhdellä tällaisella siirrolla, on aina sama määrä hyviä värityksiä.

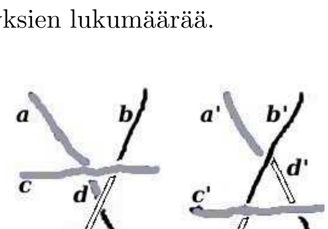
Jos kaaviossa esiintyy lenkki, joka on Reidemeisterin siirron Ω_1 mukainen, niin siinä esiintyvät kaaret (kaksi kappaletta) ovat saman väriset, koska risteyksessä kohtaa vain kaksi eri kaarta. Siis jos kaavio D on saatu kaaviosta D' tällä siirrolla, niin jokainen D:n väritys vastaa yksikäsitteisesti sitä D':n väritystä, jossa lenkki on väritetty sillä värillä, jolla vastaava kaari on väritetty D:ssä, ja toisin päin.

Oletetaan, että D on saatu kaaviosta D' siirrolla Ω_2 siten, että D':n risteyksiä on enemmän kuin D:n. Kaaviossa D' on myös enemmän kaaria kuin kaaviossa D. Kuvassa 7 on esitetty tämä tilanne. Kaari c on uusi. Oletetaan, että D:n väritys on annettu ja yritetään määrätä D':n väritys. Väritetään ne solmun kaaret, jotka eivät osallistu siirtoon, samalla tavalla molemmissa kaavioissa, kaari a' väritetään samalla värillä kuin a, ja b' sekä b'' väritetään molemmat samalla värillä kuin b. Tällöin myös c:n väri määräytyy yksikäsitteisesti. Toisaalta jos on annettu D':n väritys, huomataan, että väistämättä b' ja b'' ovat saman värisiä (seuraa hyvän värityksen määritelmästä). Tällä värillä voidaan värittää b ja a':n värillä a. Näin saadaan molemminsuuntainen yksi yhteen -vastaavuus (bijektio) D:n värityksien ja D':n värityksien välille, mistä seuraa, että niitä on yhtä monta.



Kuva 7: Reidemeisterin siirto Ω_2 säilyttää värityksien lukumäärän.

Kuvassa 8 on esitetty kolmannen siirron tapaus. En selitä sitä tässä sen enempää, vaan haastan lukijan todistamaan itse, että tällainen muutos kaaviossa ei muuta hyvien värityksien lukumäärää.



Kuva 8: Reidemeisterin siirto Ω_3 säilyttää värityksien lukumäärän.

Osoitimme, että hyvien värityksien määrä ei muutu Reidemeisterin siirroissa, mistä seuraa, että väritysten määrä ei muutu, vaikka kaavioon sovellettaisiin mikä tahansa äärellinen määrä Reidemeisterin siirtoja, mikä

[2] Tällaisia funktioita niin kuin v kutsutaan *solmuinvarianteiksi*, eng. invariant tarkoittaa muuttumatonta.

tarkoittaa ylempänä mainitun tuloksen valossa, että saman solmun millä tahansa kahdella kaaviolla on sama määrä hyviä värityksiä.

Tehtäviä:

- Täydennä yllä oleva todistus.
- Laske $v(3_1)$ ja $v(4_1)$ (katso kuva 1) osoittaaksesi, että solmut 3_1 ja 4_1 ovat eri solmuja. Tee sama solmuille 7_5 ja 7_7.
- Voikoväritysinvariantin avulla todistaa, että 4_1 ja 0_1 ovat eri solmuja? Entä 5_1 ja 5_2?
- Osoita, että aina pätee $v(k) = 3^n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$.

Viiteluettelossa on viitattujen kirjojen lisäksi hyviä kirjoja solmuteoriassa alkuun pääsemiseksi ja kiinnostavia popularisoituja artikkeleja.

Viitteet

[1] Colin C. Adams: *The Knot Book – An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, AMS 2004.

[2] George Bain: *Celtic Art: The Methods of Construction*, Dover Publishing, New York, 1973, ISBN 0-486-22923-8.

[3] G. Burde and H. Zieschang: *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics 5, Berlin, New York, 1985.

[4] R. H. Crowell, R. H. Fox: *Introduction to knot theory*, Springer; 1st edition (October 8, 1984).

[5] Miranda Green: *Symbol and Image in Celtic Religious Art*, Published 1989 by Routledge.

[6] Simon James: *Keltit. (Exploring the world of the celts, 1993.)* Suomennos: Tarja Kontro. Helsingissä: Otava, 2005, ISBN 951-1-19271-X.

[7] Louis H. Kauffman: *On Knots*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.

[8] Louis H. Kauffman: *Knots and Physics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1993.

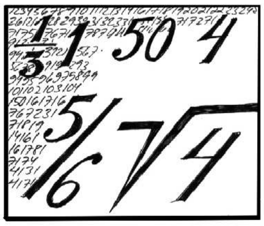
[9] Kurt Reidemeister: *Elementare Begründang der Knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1926), 24–32.

[10] C. Dietrich-Buchecker and J.-P. Sauvage: *A synthetic molecular trefoil knot*, Angew. Chem. 28(2):189–192.

[11] Alexei Sossinsky: *Solmut. Erään matemaattisen teorian synty* (Suom. Osmo Pekonen).

[12] De Witt Sumners: *Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes* `http://www.ams.org/notices/199505/sumners.pdf`

Erkki Luoma-ahon Matematiikan peruskäsitteiden historia on ilmestynyt Solmun verkkoversiossa osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/2010/kasitehist.html`



Epäyhtälöistä, osa 1

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Tässä kirjoituksessa tarkastellaan eräitä koulumatematiikan keinoin todistuvia epäyhtälöitä. Erityisesti keskitytään niihin, joiden oikeaksi todistaminen perustuu neliön ei-negatiivisuuteen. Kirjoitukseen sisältyy muutama lukijan aktivoimiseksi tarkoitettu harjoitustehtävä. Myöhemmin ehkä ilmestyvässä toisessa osassa tarkastellaan yhden muuttujan konvekseja funktioita, jolloin saadaan menetelmiä hieman hankalampien epäyhtälöiden käsittelyyn.

Neliön ei-negatiivisuus

Viimeistään lukio-opiskelun alussa käy selväksi, että $x^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $x = 0$. Tämän perusepäyhtälön avulla voidaan esimerkiksi todistaa, että positiivisen luvun ja sen käänteisluvun summa on vähintään 2, mikä ei ole aivan ilmeinen asia, jos tarkasteltava luku on lähellä ykköstä. Seuraavassa esimerkissä todistetaan tämä väite.

Esim. Osoita, että jos u ja v ovat positiivisia lukuja, niin

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2,$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u = v$.

Ratk. Epäyhtälöt

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2 \ \mid \cdot uv \quad (uv > 0, \text{kertominen sallittu})$$

$$u^2 + v^2 \geq 2uv$$

$$u^2 - 2uv + v^2 \geq 0$$

$$(u - v)^2 \geq 0$$

ovat keskenään yhtäpitäviä, ja koska viimeinen niistä on tosi, ovat kaikki tosia. Selvästi yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u = v$.

Epäyhtälön todistaminen tapahtuu usein niin, että johdetaan todistettavan epäyhtälön kanssa yhtäpitäviä epäyhtälöitä, kunnes päästään sellaiseen, mikä nähdään todeksi esimerkiksi neliön ei-negatiivisuuden perusteella. Näin meneteltiin edellisessä esimerkissä. Joskus voidaan epäyhtälön toista puolta sieventämällä päästä lopulta sellaiseen epäyhtälöön, mikä nähdään todeksi jonkin tunnetun asian perusteella. Seuraavissa harjoituksissa sovelletaan näitä periaatteita.

Harjoituksia

1. Kahden positiivisen luvun harmoninen, geometrinen, aritmeettinen ja kontraharmoninen keskiarvo määritellään yhtälöillä

$$\mathcal{H} = \frac{2}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}},\ \mathcal{G} = \sqrt{uv},\ \mathcal{A} = \frac{u+v}{2} \text{ ja } \mathcal{C} = \frac{u^2+v^2}{u+v}.$$

Todista keskiarvojen suuruusjärjestys $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{C}$. Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

2. Osoita, että jos u_1 ja u_2 ovat positiivisia lukuja, joille $u_1 + u_2 = 1$, niin

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \geq 4.$$

Milloin vallitsee yhtäsuuruus?

3. Osoita, että jos u_1, u_2 ja u_3 ovat positiivisia lukuja, joille $u_1 + u_2 + u_3 = 1$, niin

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \geq 9.$$

Milloin vallitsee yhtäsuuruus?

4. Yleistä tehtävien 2. ja 3. epäyhtälöt mielivaltaiselle määrälle positiivisia lukuja, ja todista näin saamasi epäyhtälö yhtäsuuruusehtoineen.

Cauchyn-Bunjakovskin-Schwarzin epäyhtälö

Matemaattiset teoreemat on tapana nimetä löytäjänsä mukaan. Jos useat henkilöt päätyvät toisistaan riippumatta samoihin tuloksiin, on oikeudenmukaista nimetä tulos kaikkien keksijöiden mukaan. Cauchy[1] löysi ensimmäisenä nyt tarkasteltavan epäyhtälön, ja Schwarz[2] yleisti sen integraaleja koskevaksi. Siitä puhutaan yleisesti Cauchyn ja Schwarzin nimillä. Myöhemmin on osoittautunut, että Bunjakovski[3] oli todistanut epäyhtälön integraalimuodon 25 vuotta ennen Schwarzia, ks. [3]. Siksi on oikein käyttää otsikossa olevaa nimihirviötä, mikä jatkossa lyhennetään CBS-epäyhtälöksi. Tämä tärkeä epäyhtälö voidaan todistaa lukion pitkän matematiikan kakkoskurssin tiedoilla.

Lause. *CBS-epäyhtälö.* Reaaliluvut $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ toteuttavat epäyhtälön

$$|u_1v_1 + \ldots + u_nv_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}, \tag{1}$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos on olemassa t_0, jolle $u_\imath t_0 = v_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tai kaikki u-luvut ovat nollia tai kaikki v-luvut ovat nollia.

Todistus. On selvää, että (1):ssä vallitsee yhtäsuuruus, jos kaikki u-luvut tai kaikki v-luvut ovat nollia. Olkoot $u_1, \ldots, u_n$ ja $v_1, \ldots, v_n$ reaalilukuja, joista kaikki eivät ole nollia. Voidaan rajoituksetta olettaa, että vähintään yksi u-luku on nollasta eroava. Tällöin funktio

$$g(t) = (u_1t - v_1)^2 + \ldots + (u_nt - v_n)^2 \tag{2}$$

voidaan kehittää toisen asteen polynomiksi

$$g(t) = t^2 \sum_{\imath=1}^{n} u_\imath^2 - 2t \sum_{\imath=1}^{n} u_\imath v_\imath + \sum_{\imath=1}^{n} v_\imath^2.$$

Sillä on enintään yksi nollakohta, sillä neliöt $(u_\imath t - v_\imath)^2$ ovat ei-negatiivisia. Diskriminanttitarkastelulla saadaan

$$\left(\sum_{\imath=1}^{n} u_\imath v_\imath\right)^2 \leq \sum_{\imath=1}^{n} u_\imath^2 \sum_{\imath=1}^{n} v_\imath^2,$$

mistä (1) seuraa. Selvästi yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos kaikki neliöt (2):ssa häviävät samalla t:n arvolla, eli jos ja vain jos on olemassa t_0, jolle $u_\imath t_0 = v_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Muussa tapauksessa yhtäsuuruus on voimassa ainoastaan, jos kaikki u-luvut tai kaikki v-luvut ovat nollia.

Harjoitus

5. Jos kaikki u-luvut ovat nollasta eroavia, niin CBS-epäyhtälön yhtäsuuruusehto voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \ldots = \frac{v_n}{u_n}.$$

Osoita, että jos u-lukujen summa ei ole nolla, niin

$$\frac{v_\imath}{u_\imath} = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}$$

kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sovellus

Ensinäkemältä (1) vaikuttaa sekavalta, mutta jos oikealla puolella olevat neliösummat ovat positiivisia, niin se voidaan kirjoittaa kaksoisepäyhtälöksi

$$-1 \leq \frac{u_1v_1 + \ldots + u_nv_n}{\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}} \leq 1, \tag{3}$$

missä näkyy tuttuja piirteitä. Jos $n = 2$ tai $n = 3$, niin keskellä oleva lauseke esittää kahden vektorin välisen kulman γ kosinia, ja kaksoisepäyhtälö kertoo sen, että $-1 \leq \cos\gamma \leq 1$. Voiko tällaista tulkintaa tehdä, jos $n > 3$? Kaksi- ja kolmiulotteisen avaruuden vektorit voidaan samastaa lukupareihin ja lukukolmikoihin,

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} = (u_1, u_2)$$

[1] Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), ranskalainen matemaatikko.

[2] Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), saksalainen matemaatikko.

[3] Viktor Jakovlevitš Bunjakovski (1804 – 1889), venäläinen matemaatikko.

ja

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = (v_1, v_2, v_3).$$

Mikään ei estä määrittelemästä yleisesti n-ulotteisen avaruuden vektoria pistämällä yksinkertaisesti n kappaletta reaalilukuja jonoon. Siis esimerkiksi

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Kaikkien tällaisten vektorien joukko on tulojoukko

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{kpl}} = \mathbb{R}^n.$$

Nollavektorissa on n kappaletta nollia, ja kaksi vektoria ovat samat, jos niillä on samat koordinaatit. Yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen määritellään samalla tavalla kuin 2- ja 3-ulotteisissa tapauksissa. Kantavektorit $\mathbf{i} = (1{,}0)$ jne. yleistyvät vektoreiksi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1{,}0{,}0, \ldots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0{,}1{,}0, \ldots, 0), \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \\ \mathbf{e}_n &= (0{,}0, \ldots, 0{,}1), \end{aligned}$$

ja jokaisella $\mathbb{R}^n$:n vektorilla on yksikäsitteinen esitys tässä kannassa. Esimerkiksi

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \ldots + u_n\mathbf{e}_n.$$

Skalaaritulo on

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n,$$

ja se noudattaa samoja laskusääntöjä kuin $\mathbb{R}^2$:n ja $\mathbb{R}^3$:n vektorien skalaaritulo. Vektorin pituus on $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$. Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma γ määritellään asettamalla

$$\cos\gamma = \frac{u_1v_1 + \ldots + u_nv_n}{\sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}}.$$

CBS-epäyhtälön (3) perusteella tämä määritelmä on mielekäs. Kosini määrää vektorien välisen kulman γ yksikäsitteisesti, sillä $\gamma \in [0°, 180°]$. Itse CBS-epäyhtälö on vektorimuodossa hyvin yksinkertainen:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|.$$

Sen avulla voidaan todistaa mm. kolmioepäyhtälö, ks. teht. 7.

Harjoituksia

6. a) Sijoita yksikkökuutio $\mathbb{R}^3$:n positiivisten akselien rajaamaan soppeen siten, että yksi kärki tulee origoon ja kolme siitä lähtevää särmää yhtyy koordinaattiakseleihin. Määritä kuution kärkipisteiden koordinaatit. Laske samasta kärjestä lähtevän särmän ja avaruuslävistäjän välinen kulma.

b) Sijoita yksikkökuutio $\mathbb{R}^4$:n positiivisten akselin osien raajaamaan osaan siten, että yksi kärki tulee origoon ja neljä siitä lähtevää särmää yhtyy koordinaattiakseleihin. Määritä kuution kärkipisteiden koordinaatit. Laske samasta kärjestä lähtevän särmän ja avaruuslävistäjän välinen kulma.

7. a) Olkoon $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, ja $\gamma_\imath$ sen sekä kantavektorin $\mathbf{e}_\imath$ välinen kulma kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Osoita, että

$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \ldots + \cos^2\gamma_n = 1.$$

b) Osoita, että $\mathbb{R}^n$:n vektorit toteuttavat kolmioepäyhtälön

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

Ohje: Sovella vektorimuotoista CBS-epäyhtälöä.

Sovelluksen sovellus

Mihin moniulotteisia avaruuksia ja niiden vektoreita tarvitaan? Useamman muuttujan funktioiden teoria perustuu oleellisesti niihin, ja näihin funktioihin puolestaan perustuvat monet matematiikan sovellukset. Tässä katsotaan lyhyesti yhtä tilastotieteen sovellusta, jossa tarvitaan vain vektoreita.

Oletetaan, että halutaan selvittää, onko ylipainoisilla henkilöillä keskimäärin muita korkeampi verenpaine (alapaine). Valitaan satunnaisesti n henkilöä käsittävä koeryhmä. Esittäkööt $u_1, u_2, \ldots, u_n$ heidän painoindeksejään ja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ verenpaineitaan. Siis $u_\imath$ ja $v_\imath$ ovat samaa henkilöä koskevat mittaustulokset. Olkoot painoindeksien keskiarvo on $\bar{u}$ ja keskimääräinen verenpaine $\bar{v}$. Muodostetaan *havaintovektorit* asettamalla

$$\mathbf{u} = (u_1 - \bar{u}, \ldots, u_n - \bar{u})$$

ja

$$\mathbf{v} = (v_1 - \bar{v}, \ldots, v_n - \bar{v}).$$

Jos koehenkilöiden enemmistöllä molemmat arvot ovat keskiarvon samalla puolella, niin silloin pieni painoindeksi useimmiten yhdistyy matalaan verenpaineeseen ja suuri korkeaan. Tällöin tulot $(u_\imath - \bar{u})(v_\imath - \bar{v})$ ovat enimmäkseen positiivisia, havaintovektorien skalaaritulo on positiivinen, ja havaintovektorit ovat lähempänä saman- kuin vastakkaissuuntaisuutta. Jos taas usean henkilön arvot ovat keskiarvojen eri puolilla, niin skalaaritulon termit ovat negatiivisia ja skalaaritulokin on negatiivinen. Tällöin havaintovektorit ovat lähempänä vastakkais- kuin samansuuntaisuutta, ja suurta painoindeksiä vastaa matala verenpaine ja päin vastoin. Jos tulojen $(u_\imath - \bar{u})(v_\imath - \bar{v})$ merkit jakautuvat tasaisesti positiivisiin ja negatiivisiin, niin skalaaritulo on todennäköisesti lähellä nollaa, eikä tutkittavien ilmiöiden välillä ei ole havaittavissa selvää riippuvuutta. Havaintovektorit ovat tällöin lähellä keskinäistä kohtisuoruutta.

Jos ylipainon lisäksi halutaan tutkia jotakin toista selittävää tekijää korkealle verenpaineelle, muodostetaan uudesta tekijästä havaintovektori $\mathbf{w}$. Skalaaritulot $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$ eivät kuitenkaan välttämättä ole vertailukelpoisia, sillä mitattavien suureiden lukuarvot voivat olla aivan eri suuruusluokissa. Miten saadaan nämä skalaaritulot vertailukelpoisiksi? Muodostamalla havaintovektorien suuntaisten yksikkövektorien väliset skalaaritulot. Ne ovat alkuperäisten vektorien pituuksista riippumattomia, ja ne esittävät niiden välisten kulmien kosineita. Tilastotieteessä tätä kosinia kutsutaan *korrelaatiokertoimeksi*, ja se merkitään r-kirjaimella, ks. [2], s. 53. Siis

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = r.$$

Jos r on lähellä ykköstä, niin ylipainon katsotaan olevan yhteydessä kohonneeseen verenpaineeseen. Tämä ei kuitenkaan *todista* näiden ilmiöiden välistä syy-seuraus-suhdetta, vaan ainoastaan sen, että ilmiöt esiintyvät usein samalla yksilöllä.

Moni tilastomatematiikan peruskurssin suorittanut pitää korrelaatiokerrointa käsittämättömän monimutkaisena ulkoa opeteltavana kaavarumiluksena. Vektoritulkinnan kautta se on kuitenkin täysin selvä ja luonnollinen käsite.

Useamman luvun keskiarvoista

Keskiarvot yleistyvät useammalle positiiviselle luvulle yhtälöillä

$$\mathcal{H} = \frac{n}{\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_n}},$$

$$\mathcal{G} = \sqrt[n]{u_1\ldots u_n},$$

$$\mathcal{A} = \frac{u_1+\ldots+u_n}{n} \quad \text{ja}$$

$$\mathcal{C} = \frac{u_1^2+\ldots+u_n^2}{u_1+\ldots+u_n}.$$

Ne ovat lukujen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ symmetrisiä funktioita, ja jokainen niistä sijaitsee pienimmän ja suurimman u-luvun välissä. Myös epäyhtälöketju

$$\mathcal{H} \le \mathcal{G} \le \mathcal{A} \le \mathcal{C}$$

on voimassa. Siinä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos kaikki u-luvut ovat keskenään yhtäsuuria. Tämän todistamisen jätetään harjoitustehtäviksi.

Harjoituksia

8. Osoita, että keskiarvot $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{C}$ sijaitsevat pienimmän ja suurimman u-luvun välissä.

9. Todista epäyhtälö $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ yhtäsuuruusehtoineen. Ohje: Tälle epäyhtälölle löytyy useita erilaisia todistuksia, mutta teoksessa [1] esitetään seuraava erityisen nerokas ajatus. Voidaan rajoituksetta olettaa, että $u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_n$. Geometrinen keskiarvo $\mathcal{G}$ sijaitsee pienimmän ja suurimman u-luvun välissä, joten on olemassa k, jolle $u_k \le \mathcal{G} \le u_{k+1}$. Koska

$$\sum_{\imath=1}^{k}\int_{u_\imath}^{\mathcal{G}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\mathcal{G}}\right)\mathrm{d}t + \sum_{\imath=k+1}^{n}\int_{\mathcal{G}}^{u_\imath}\left(\frac{1}{\mathcal{G}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \ge 0, \qquad (1)$$

ja koska integroitavat ovat ei-negatiivisia, on yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $u_\imath = \mathcal{G}$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Osoita, että (1) sievenee epäyhtälöksi $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$.

10. a) Todista epäyhtälö $\mathcal{H} \le \mathcal{G}$ yhtäsuuruusehtoineen. Ohje: Sovella epäyhtälöä $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$ sopivasti valittuihin lukuihin.

b) Todista epäyhtälö $\mathcal{A} \le \mathcal{C}$ yhtäsuuruusehtoineen. Ohje: Sovella CBS-epäyhtälöä sopivasti valittuihin lukuihin.

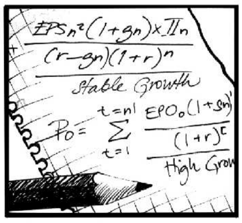
Kiitän dosentti Jorma Merikoskea kirjoitustani koskeneista kommenteista.

Lähdeluettelo

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Proofs from the Book*, Springer, 2004.

[2] Raimo Seppänen, Martti Kervinen, Irma Parkkila, Lea Karkela, Pekka Meriläinen, *Maol taulukot*, Otava, 2006.

[3] The MacTutor History of Mathematics archive, `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`



Finanssimatematiikka – kestävää vai kestämätöntä kehitystä?

Esko Valkeila

Tämä artikkeli on hieman laajennettu versio puheenvuorosta, joka pidettiin Tekniikan Akateemisten Liiton TEK:n marraskuussa 2009 järjestämässä seminaarissa **Tekniikka – kestävän kehityksen kivijalka.** Kirjoittaja on matematiikan professori Aalto-yliopiston teknillisen korkeakoulun Matematiikan ja systeemianalyysin laitoksessa. Hän on opettanut ja tutkinut matemaattista rahoitusteoriaa runsaat kymmenen vuotta.

Kestävästä kehityksestä

Kestävän kehityksen luonnehdinta. Mitä tarkoitetaan kestävällä kehityksellä? Asia selviää Ympäristöministeriön kestävää kehitystä käsitteleviltä www-sivuilta. Siellä luonnehditaan kestävää kehitystä näin:

Taloudellinen kestävyys on sisällöltään ja laadultaan tasapainoista kasvua, joka ei perustu pitkällä aikavälillä velkaantumiseen tai varantojen hävittämiseen. Kestävä talous on edellytys yhteiskunnan keskeisille toiminnoille. Siihen pitkäjänteisesti tähtäävä talouspolitiikka luo otolliset olosuhteet kansallisen hyvinvoinnin vaalimiselle ja lisäämiselle.

Kestävällä pohjalla oleva talous helpottaa myös kohtaamaan vastaan tulevia uusia haasteita, kuten väestön ikääntymisestä aiheutuvia kasvavia sosiaaliturva- ja terveysmenoja. Kestävä talous on sosiaalisen kestävyyden perusta. Sosiaalista kestävyyttä vaalivat mekanismit taas auttavat osaltaan lievittämään niitä vaikeuksia, joita nopeasti muuttuvassa maailmantaloudessa voi syntyä.

Ei varmaan synny erimielisyyttä siitä, että nykyinen (Yhdysvalloista alkanut) finanssikriisi, johon liittyvät pankkien konkurssit ja varallisuuden sulaminen pankkien ja maiden toimijoiden peleissä, ei täytä kestävän kehityksen piirteitä.

Matemaatikot finanssipeleissä. Tarkastelen matemaatikon roolia näissä peleissä. Asenteeni on samantapainen kuin australialaisella ekonomistilla *Steve Keenillä* kirjassa *Debunking Economics: The Naked Emperor of the Social Sciences.* Keen on sitä mieltä, että teorian matematisointi auttaa jäsentämään teorian paremmin. Ongelma on siinä, että matematiikkaa käytetään usein huonosti ja väärin. (Myös matemaatikot voivat syyllistyä samantapaisiin virheisiin, jos he eivät ymmärrä sovellusta kokonaisuudessaan, vaan vain joitakin sen osia.) Keen kiteyttää matematisointiin liittyvän ongelman matematiikan kannalta seuraavasti: *Jos asiat menevät pieleen, älkää ampuko minua, koska olen piano. Ampukaa sen sijaan pianisti*. Pianolla Keen tietysti tarkoittaa matematiikkaa ja pianistilla taloustieteilijää.

Kestävä kehitys pääomakäsittein. Kestävää kehitystä on myös luonnehdittu taloudenpidon kannalta. Lainataan edelleen Ympäristöministeriön materiaalia:

1990-luvun lopulta lähtien Maailmanpankin pääjohta-

ja Ismail Serageldin muotoili kestävän kehityksen määritelmän talouspoliitikoille ymmärrettävään muotoon: Kestävä kehitys tarkoittaa sitä, että jätämme tuleville sukupolville yhtä paljon mahdollisuuksia kuin meillä on ollut, ellei jopa enemmän. Mahdollisuudet voidaan tulkita varallisuudeksi, vauraudeksi, pääomaksi, jota voidaan konkretisoida ja mitata neljän pääomalajin avulla. Suomessa tätä ajattelua on kehitellyt Valtion taloudellinen tutkimuslaitos.

Neljä pääomalajia ovat

(1) inhimillinen pääoma (esim. osaaminen, tiede, tutkimus ja kehitys, patentit)

(2) fyysinen pääoma (esim. tuotantokoneistot: infrastruktuuri, rakennettu ympäristö)

(3) sosiaalinen pääoma (esim. lainsäädäntö, hallinto, sosiaaliset verkostot, luottamus ja legitimiteetti)

(4) luontopääoma (uusiutuvat ja uusiutumattomat luonnonvavat)

Kestävän kehityksen kannalta on tärkeää vahvistaa erityisesti inhimillistä ja sosiaalista pääomaa eli yhteiskunnan ja kansalaisten innovaatio- ja muutoksenhallintakykyä [ja] fyysistä pääomaa niin, ettei luontopääoma vähene, vaan se tuottaa ihmisille luontopalveluja sukupolvesta toiseen.

Finanssimaailmaa ei ole mainittu erikseen edellä esitetyssä listassa. Onko se osa esimerkiksi inhimillisestä tai sosiaalisesta pääomasta? Sosiaalista pääomaa luonnehditaan sellaisilla käsitteillä kuin luottamus ja legitimiteetti – ainakin näiden kahden asian puute liitetään usein sellaisiin analyyseihin, joissa tarkastellaan viime aikojen tapahtumia finanssimarkkinoilla. Ehkä emme voi pitää finanssialaa osana sosiaalista pääomaa. Inhimillistä pääomaa puolestaan luonnehditaan sellaisilla määreillä, joiden voisi ajatella liittyvän finanssialan tutkimukseen, rahoitusteoriaan, ja sen matemaattiseen pikkuserkkuun, finanssimatematiikkaan.

Tarkastellaan aluksi yhtä rahoitusteoriaan liittyvää teoreettista käsitettä.

Finassimatematiikasta tehokkailla markkinoilla

Tehokkaat markkinat. Tehokkaiden markkinoiden teorian mukaan osaketuotot noudattavat *satunnaiskulkua.* Satunnaiskulku on sellainen stokastinen prosessi, missä kullakin ajanhetkellä todennäköisyydellä puoli siirrytään yksi askel ylöspäin, tai todennäköisyydellä puoli yksi askel alaspäin. Tämän teorian mukaan osakkeen nykyinen hinta kuvastaa osakkeen arvoon vaikuttavia tekijöitä. Hinnat muuttuvat tällöin uuden tiedon tullessa markkinoille. Koska uutisen sisältö ja julkistamishetki ovat ennalta tuntemattomia, ovat hinnanmuutokset satunnaisia. Edelleen teorian mukaan epänormaalien sijoitustuottojen saaminen säännönmukaisesti on julkista tietoa hyväksikäyttäen mahdotonta. Sijoittaja voi saada sijoitustuottoa vain kantamansa markkinariskin suhteessa. Suurempaa tuottoa tavoittelevan on hyväksyttävä suurempi riski. Teoria on verifioitu kolmekymmentä vuotta sitten tehdyillä perusteellisilla ekonometrisilla tutkimuksilla.

Tehokkaat markkinat ja finanssimatematiikka. Tehokkaiden markkinoiden teoria on ollut taustana sille kehitykselle, mikä finanssimatematiikassa on ollut viimeisen kolmen vuosikymmenen aikana. Matematiikan avulla teoria on kirjoitettu siten, että eräillä keskeisillä rahoituksen teorian aksioomilla on matemaattinen vastineensa. Markkinoiden tehokkuudelle on löydetty matemaattinen vastike käyttämällä stokastisten prosessien teoriaa, erityisesti ns. martingaaliteoriaa. Toinen hämmästyttävä matemaattinen tulos on se, että vaikka tulevaisuutta ei voida ennustaa, niin tulevaisuudessa tapahtuville sitoumuksille voidaan laskea hinta jo tänään – tietysti tekemällä eräitä lisäoletuksia.

Näin siis tulevat riskit voidaan hinnoitella jo tänään. Esimerkkeinä voi mainita *futuurit.* Ne ovat sopimuksia, joissa myyjä lupaa myydä tietyn tuotteen ostajalle vaikkapa puolen vuoden kuluttua sovittuun hintaan. Näin esimerkiksi leipuri voisi ostaa ensi toukokuuksi vehnäfutuurin, ja hän tietäisi jo tänään, mitä hän joutuu ensi toukokuussa vehnästä maksamaan. Futuurin myyjä puolestaan joko voittaa tai häviää, riippuen siitä, mitä hän joutuu ensi toukokuussa vehnästä maksamaan. Futuurille on tyypillistä myös se, että sopimus on sitova. Futuureja on kaupattu jo satojen vuosien ajan.

Tuoreempi esimerkki finanssimarkkinoilla myytävästä sopimuksesta on optio. Esimerkiksi myyntioption ostajalla on oikeus myydä tuote tiettyyn hintaan, ja myyjän on tämä hinta maksettava. Tällainen optio voisi kiinnostaa esimerkiksi telakkaa, joka on tehnyt sopimuksen laivan rakentamisesta. Hinta maksetaan dollareissa laivan valmistuttua kolmen vuoden kuluttua, ja telakka haluaa varmuuden siitä, että vaikka dollarin hinta putoaisi, niin se saa tarpeeksi euroja kolmen vuoden kuluttua. Mikäli dollarin kurssi on tarpeeksi korkea, niin telakka ei käytä optiota, mutta jos kurssi on alhaalla, niin telakka käyttää option ja turvaa saatavansa euroissa. (Näitä optioita ei tule sekoittaa johtajille annettuihin optioihin. Ne ovat lähinnä palkan osia.)

Valtaosa finanssimaailmaa koskevasta matemaattisesta mallinnuksesta olettaa, että markkinat ovat tehokkaat, ja mahdolliset pienet poikkeamat tästä tasapainotilasta korjautuvat nopeasti. Matematiikan kannalta viimeisen kolmenkymmenen vuoden aikana tehty tutkimus on ollut menestystarina. Ja tutkimusta tekevillä on se käsitys, että tutkimustyö on lähellä käytäntöä, vaikka se olisikin melko teoreettista. Mielestäni voidaan todeta, että mikäli markkinat ovat pysyvästi tehokkaat, niin finanssimatematiikan tuloksia voidaan käyttää kestävän kehityksen ideologian mukaisesti: tulevaisuuden epävarmuuden pienentämiseksi, optimaalisen talousstrategian harjoittamiseksi pitkällä tähtäimellä... Aina on kuitenkin tehtävä se varaus, että matemaattisia menetelmiä soveltavien pitää ymmärtää, mitä he ovat tekemässä.

Tehottomat markkinat

Tehokkaiden markkinoiden hypoteesi on viime aikoina menettänyt kannattajiaan. Tämä liittyy mm. Yhdysvaltojen asuntoluottokriisiin, ja tapahtumille on etsitty syyllisiä eri puolilta. Syyllisiksi on julistettu esimerkiksi amerikkalaiset, kiinalaiset, George W. Bush, Alan Greenspan, ahneet ja epärehelliset pankkiirit ja muut finanssimarkkinoilla toimivat henkilöt... sekä matemaatikot.

Kun lukee selostuksia asuntoluottokriisiin johtaneista syistä, niin hiukset nousevat pystyyn. Esimerkiksi lainanottajan luottokelpoisuus nousee, jos velaksi ostetun asunnon arvo nousee, ja hänelle saatetaan tarjota tämän perusteella uutta lainaa. Tästä puolestaan seuraa, että aluksi asuntojen hinnat nousevat voimakkaasti, koska yhä uusia ostajia houkutellaan ostamaan velaksi asuntoja. Muutaman vuoden kuluttua kupla kuitenkin puhkeaa, ja asunnon ostaja ei enää pysty vastaamaan lyhennyksistään eikä velkojen koroista. Lainan alunperin myöntänyt pankki on jo kuitenkin ehtinyt myydä lainapakettinsa eteenpäin, eikä ehkä ole alunperinkään ollut kiinnostunut siitä, kuinka lainan ottaneet pystyvät suoriutumaan lainaan liittyvistä velvoitteista.

Paketoitujen lainojen riskejä pyrittiin mallintamaan jakamalla lainan ottavat ryhmiin riskialttiuden mukaan sekä arvioimalla mahdollisten luottotappioiden todennäköisyyttä niiden korrelaatioihin perustuvalla matemaattisella kaavalla. Ehkä juuri tämän kaavan käytön takia matemaatikkoja on jopa syytetty talouteen liittyvien joukkotuhoaseiden suunnittelusta. Tämän kaavan käyttämistä, ehkä kuitenkin hieman rauhallisemmin, on selitetty talousjournalisti *Felix Salmonin Wired*-lehdessä maaliskuussa 2009 julkaisemassa artikkelissa *Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street*. Edellä mainitun kaavan avulla pyrittiin ottamaan huomioon se, että jos Pekka ei pysty vastaamaan lainansa sitoumuksista, niin todennäköisyys sille, että Paavo ei pysty myöskään vastaamaan oman lainansa sitoumuksista, kasvaa. Kaavan tarkempi tutkimus kuitenkin osoitti, että kaava ei myöskään onnistu kuvaamaan riippuvuutta kovin hyvin juuri sillä alueella, missä luottotappiot syntyvät.

Salomonin artikkelissa todetaan, että matemaatikot varoittivat koko ajan tällaisten kaavojen käytön vaarallisuudesta, kun heiltä älyttiin tätä kysyä. Varoituksia ei kuunneltu kahdesta syystä: päätöksiä tekevät johtajat eivät ymmärtäneet argumentointia, ja toiminta kannatti aluksi erinomaisesti.

Epästabiilien finanssimarkkinoiden teoriaa ei ole juuri kehitelty, ja niihin liittyvä matematiikka on ilmeisesti vielä lapsenkengissä. Toisaalta voi käydä myös niin, että kriisistä selvitään melko nopeasti, ja alan toimijoiden mielenkiinto selvittää epästabiiliuden syitä voi loppua nopeasti. Tällä hetkellä tätä kiinnostusta ilmeisesti vielä on. Monissa viimeistä finanssikriisiä käsittelevissä kirjoissa on kuitenkin mainittu amerikkalaisen taloustieteilijän *Hyman P. Minskyn* vuonna 1986 julkaisema teos *Stabilizing an Unstable Economy* lähestymistapa, jolla voisi teoreettisemmin selostaa nykyisen kriisin syitä. Minskyn perusteesinä on juuri se, että finanssimarkkinat ovat luonteeltaan epästabiilit.

Ja joku voisi ajatella myös toisin: jos korrelaatiokaava todella onnistuisi hävittämään Wall Streetin, niin eikö tämä juuri olisi kestävää kehitystä, koska Wall Street on esimerkki kestämättömästä kehityksestä. Kaavan kehittäjä ei kuitenkaan suunnitellut juuri tätä lopputulosta.

Kritiikin vaikeudesta

Finanssimaailman operaatioiden volyymit ovat valtavia. Esimerkiksi maailmassa käytävän valuuttakaupan yhden päivän volyymi on sunnilleen sama kuin koko maailman bruttokansantuote. Finanssialalla ajatellaan ilmeisesti siten, että työstä saatu korvaus on jossain suhteessa päivittäin liikuteltuihin rahamääriin. Tästä puolestaan seuraa, että keskeisten toimijoiden palkkiot ja bonukset ovat vähintään satakertaiset tavallisiin palkkoihin verrattuna (nämä luvut koskevat ainakin Yhdysvaltoja). Alasta hyötyvien asiantuntijoiden voi olla vaikea tästä syystä kritisoida alalla tapahtuvia väärinkäytöksiä tai ylilyöntejä. Lisäksi ajatellaan usein siten, että jos kritiikki tulee alan ulkopuolelta, niin se ei voi olla asiantuntevaa.

Matematiikka kestävää kehitystä tukemassa

Eräänä ratkaisuna nykyisiin ongelmiin on ehdotettu, että finanssimalleihin tulee ottaa selvemmin mukaan säätely ja valvonta. Tämä ajatus sopii huonosti vapaan kilpailukapitalismin ideologiaan. Säätelyn ja valvonnan lisääminen finanssimarkkinoilla saattaa olla vaikea toteuttaa. Seuraavassa muutama esimerkki sellaisista tilanteista, joissa matemaatikot voisivat auttaa kestävän kehityksen tavoitteiden toteuttamisessa.

(1) Väestön ikääntyessä kasvaa tarve arvioida pitkän aikavälin eläke- ja terveysmenoja. Tässä voi

käyttää esimerkiksi vakuutusmatematiikan menetelmiä yhdessä väestötieteen tilastollisten menetelmien kanssa.

(2) Viime aikojen matemaattinen tutkimus on pyrkinyt kehittämään tapoja mitata erilaisia finanssimaailman riskejä. Rahoitusalaa saattaisi olla mahdollista vakaannuttaa näitä tuloksia käyttämällä.

(3) Monissa muissa tekniikan sovelluksissa ohjataan ja/tai säädetään tuotantoprosessia. Finanssiteollisuus tarvitsee myös ohjausta, etenkin jos sen toivotaan toteuttavan kestävän kehityksen periaatteita.

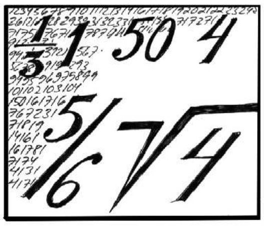
Edustamani laitos on mukana Euroopan tiedesäätiölle tehdyssä hakemuksessa, jossa korostetaan kestävän kehityksen periaatteiden tärkeyttä myös finanssimatematiikan tutkimuksessa.

Lopuksi

Onko finanssimatematiikka esimerkki kestämättömästä kehityksestä? Vastaus on kyllä ja ei, riippuen vastaajasta. Matematiikan avulla kehitetään uusia menetelmiä finanssimaailmalle, ja niiden avulla voi yrittää tehdä pikavoittoja. Tässä joko onnistutaan tai sitten ei. Toisaalta matemaatikkojen kehittämillä menetelmillä voidaan myös vahvistaa kestävää kehitystä finanssimarkkinoilla. Se, kuinka hyvin tässä onnistutaan, ei kuitenkaan riipu enää matemaatikoista, vaan koko yhteiskunnasta.

Yksi finanssikriisin opetuksia meille matemaatikoille on, että finanssimatematiikan opetuksessa on otettava huomioon se, että finanssimaailmaa koskevat taloustieteen mallit saattavat olla puutteellisia, eikä tällaisen mallin matematisointi poista mallin puutteita.

Verkko Solmun matematiikkadiplomiosio osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` karttuu, I, II, III, IV tehtävät ovat valmiit, V tehtävät valmistuvat toukokuussa. Diplomiosion oheislukemistoon on lisätty kirjoitukset Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?, Murtolukujen laskutoimituksia, Äärettömistä joukoista sekä Gaussin jalanjäljissä.



Matematiikan loppukilpailutehtävät 2010

Matemaattisten aineiden opettajien liitto MAOLin lukuvuoden 2009–10 valtakunnallisten matematiikkakilpailujen loppukilpailut pidettiin Helsingissä, Munkkiniemen yhteiskoulussa 29. tammikuuta. Kilpailuja oli kaksi, toinen peruskoulun, toinen lukion oppilaille.

Peruskoulukilpailun tehtävät

Peruskoulukilpailu käytiin kolmessa jaksossa ja tehtäviä oli kaikkiaan 19. Ne olivat tällaisia (Solmun toimitus on hiukan muotoillut muutamien tehtävien sanamuotoa.)

Osa 1

1. Mikä on suurin kokonaisluku, joka toteuttaa seuraavat ehdot: Se on suurempi kuin 100, se on pienempi kuin 200 ja kun se pyöristetään satojen tarkkuuteen, se on 20 suurempi, kuin jos se pyöristetään kymmenten tarkkuuteen.

2. Korvaa kirjaimet numeroilla niin, että eri kirjaimet vastaavat eri numeroita.

$$\begin{array}{r} SIMA \\ +\,SIKA \\ \hline MAKSA \end{array}$$

3. Kolmiot ABC ja DBC, missä D on sivun AB piste, ovat tasakylkisiä, $AC = AB = 9$ ja $CD = CB = 6$. Kuinka pitkä on sivu BD?

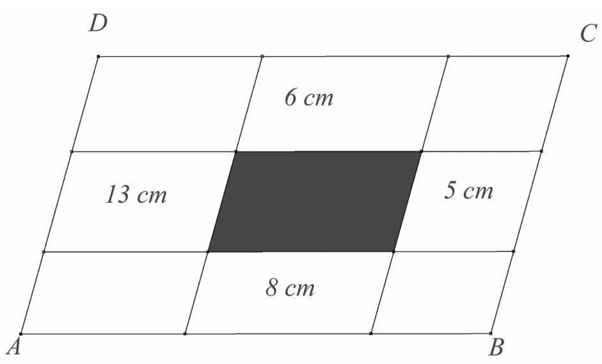
4. A ja B ovat kuution sivutahkon vastakkaiset kärjet ja B ja C ovat kuution toisen sivutahkon vastakkaiset kärjet. Määritä $\angle ABC$.

5. Mikä numero on ykkösten paikalla luvun 2^{2010} kymmenjärjestelmäesityksessä?

6. Onko mahdollista, että positiivisen luvun neliö on yhtä suuri kuin kaksi kertaa saman luvun kuutio? Anna esimerkki, jos tämä on mahdollista, tai perustele, miksi ei ole mahdollista.

7. Mikä on pienin arvo, jonka neljän kokonaisluvun tulo voi saada, kun luvut ovat peräkkäisiä kahden välein?

8. Suunnikas $ABCD$ on jaettu sivujen suuntaisilla suorilla yhdeksäksi pienemmäksi suunnikkaaksi. $ABCD$:n piiri on 25 ja neljän pikkusuunnikkaan piirit ovat kuvioon merkityt. Kuinka pitkä on keskimmäisen, tummennetun pikkusuunnikkaan piiri?



9. Vuosiluvuista 2009 ja 2010 saadaan pienin muutoksin luvut 200^9 ja 20^{10}. Kumpi luvuista on suurempi ja kuinka moninkertainen se on pienempään verrattuna?

10. Onko mahdollista piirtää tasoon yhdeksän janaa niin, että jokainen niistä leikkaa tasan kolme janaa?

Osa 2

Kilpailun toinen osa suoritettiin *geolauta*-nimisen askarteluvälineen avulla. Laite havainnollistaa tason kokonaislukukoordinaattisten pisteiden osajoukkoa $\mathbb{Z}^2$. Tehtävät on Solmuun muunnettu niin, että geolaudan sijasta puhutaan tästä joukosta, jota voi havainnollistaa myös esimerkiksi ruutupaperilla. Kutsumme joukkoon kuuluvia pisteitä *hilapisteiksi*.

1. Kuinka monella eri tavalla voi jakaa kahteen keskenään yhtenevään osaan neliön, jonka kärjet ovat hilapisteitä ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, kun jakajana on jana, jonka päätepisteet ovat neliön sivuilla olevia hilapisteitä? Neliön sivun pituus on a) 3, b) 4, c) $n-1$. Entä jos jaettavana on suorakaide, jonka kärjet ovat joukossa a ja jonka sivut ovat $m-1$ ja $n-1$ ja $m \neq n$. Kiertämällä tai peilaamalla saatuja ratkaisuja ei lasketa eri ratkaisuiksi.

2. Neliö, jonka kärjet ovat hilapisteitä, sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja jonka sivun pituus on a) 3, b) 4, jaetaan kahdeksi yhteneväksi osaksi murtoviivalla, jonka kärjet ovat neliön sisällä olevia hilapisteitä. Monenko neliön sisällä olevan hilapisteen kautta murtoviiva kulkee silloin, kun monikulmioilla on mahdollisimman monta kärkeä?

3. Tarkastellaan neliötä, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, sivun pituus on 10 ja kärjet ovat hilapisteitä. Muodosta neliön osa, jonka kärjet ovat hilapisteitä, ja joka on mahdollisimman suuri. Jaa tämä osa kahdeksi monikulmioksi janalla, jonka päätepisteet ovat hilapisteitä, ja jaa toinen syntyneistä monikulmioista edelleen kahdeksi osaksi janalla, jonka päätepisteet ovat hilapisteitä. Montako kärkeä näin syntyneillä kolmella monikulmiolla voi olla, kun yllä mainittu osa on a) nelikulmio, b) viisikulmio? Entä montako kärkeä monikulmioilla on enintään, kun osa on c) seitsenkulmio, d) n-kulmio? Piirrä ratkaisu tai selitä perustelu.

4. Muodosta edellisen tehtävän neliön osamonikulmio, jossa on mahdollisimman monta kärkeä. Monikulmion kärkien tulee olla hilapisteitä. Piirrä ratkaisu ja ilmoita monikulmion ala.

Osa 3

1. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $z = \dfrac{198}{4n+3}$ on positiivinen kokonaisluku.

2. Mitä on x, jos

$$\left(1-\frac{1}{2}^2\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2010^2}\right) = \frac{x}{2\cdot 2010}?$$

3. Säännöllisestä tetraedrista (nelitahokkaasta) leikataan särmien keskipisteiden kautta kulkevilla tasoilla pois neljä pientä tetraedria, yksi kunkin kärjen puolelta. a) Montako särmää on jäljelle jääneessä keskiosassa? b) Montako tahkoa on jäljelle jääneessä osassa? c) Kuinka suuri on jäljelle jääneen tetraedrin tilavuus alkuperäiseen verrattuna?

4. *Pelasta maailma* -tietokonepelissä maailmaa kuvataan kolmiulotteisessa koordinaatistossa, jonka origona on planeetan pinnalla oleva havaitsija. Koordinaatiston x-akseli osoittaa pohjoiseen, y-akseli länteen ja z-akseli kohtisuoraan ylös. Alkutilanteessa vieras avaruuslaiva pudottaa myrkkyräjähteen kohdassa, jonka koordinaatit ovat $x = 15000$, $y = 20000$ ja $z = 10000$ (yksikkö on metri). Räjähde liikkuu niin, että sen koordinaatit ovat $x = 15000 - 200t$, $y = 20000 + 200t$ ja $z = 10000 - 100t$, kun t on sekunneissa ilmaistu aika. a) Paljonko aikaa pelaajalla on, ennen kuin räjähde osuu planeetan pintaan? b) Mihin ilmansuuntaan räjähde liikkuu? c) Kuinka kaukana havaitsijasta räjähde osuu planeetan pintaan?

5. Swahilia käytetään yleiskielenä Itä-Afrikassa, jossa sitä puhuu toisena kielenään noin 50 miljoonaa ihmistä. Äidinkielisiä swahilin puhujia on noin viisi miljoonaa. Swahilin kielen sanojen **mtu**, **mbuzi**, **mgeni**, **jito**, **jitu** ja **kibuzi** vastineet ovat **jättiläinen**, **kili** (pieni vuohi), **vieras**, **vuohi**, **ihminen** ja **iso joki**, ei kuitenkaan samassa järjestyksessä. Päättele, mikä on kunkin swahilin sanan oikea vastine.

Lukiokilpailun tehtävät

1. Todista, että suorakulmaisen kolmion keskijanojen neliöiden summa on $\frac{3}{4}$ kolmion sivujen neliöiden summasta.

2. Määritä pienin n, jolle luvulla $n!$ on ainakin 2010 eri tekijää.

3. Olkoon $P(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi, jolla on juuret 1997 ja 2010. Oletetaan lisäksi, että $|P(2005)| < 10$. Mitä kokonaislukuarvoja $P(2005)$ voi saada?

4. Parillinen määrä, n jalkapallojoukkuetta pelaa yksinkertaisen sarjan, ts. kukin joukkue pelaa kerran kutakin toista vastaan. Osoita, että sarja voidaan ryhmitellä $n-1$ kierrokseksi siten, että kullakin kierroksella jokainen joukkue pelaa tasan yhden pelin.

5. Olkoon S jokin tason pistejoukko. Sanomme, että piste P *näkyy* pisteestä A, jos kaikki janan AP pisteet kuuluvat joukkoon S ja että joukko S näkyy pisteestä A, jos jokainen S:n piste näkyy pisteestä A. Oletetaan, että S näkyy kolmion ABC jokaisesta kolmesta kärjestä. Todista, että joukko S näkyy jokaisesta muustakin kolmion ABC pisteestä.

Peruskoulukilpailun tehtävien ratkaisuja

Osa 1

1. Tehtävän ehtojen mukaan luku on $x = 100 + y$, $1 \leq y \leq 99$. Koska $x > 100$ ja x on pienempi kuin x pyöristettynä satoihin, x pyöristettynä satoihin on 200 ja x pyöristettynä kymmeniin on 180. Suurin nämä pyöristysehdot toteuttava luku on 184.

2. Koska $2A = A$ tai $2A = A + 10$ ja $0 \leq A \leq 9$, on oltava $A = 0$. Huomataan seuraavaksi, että $2S = 10 \cdot M + A = 10 \cdot M$ tai $2S + 1 = 10 \cdot M$. Jälkimmäinen vaihtoehto merkitsee parittoman ja parillisen luvun yhtäsuuruutta, eikä siis ole mahdollinen. Koska $S \neq A = 0$, on oltava $M = 1$, $S = 5$. Nyt $M + K = 1 + K = 5$ ($1 + K = 15$ ei ole mahdollista, koska $K \leq 9$). Siis $K = 4$ ja $2 \cdot I = 4$ ja $I = 2$. (Edellä todettiin jo, että ei voi olla $2 \cdot I = 10 + K$.)

3. Tasakylkisillä kolmioilla on yhteinen kantakulma $\angle ABC$. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoisia ja vastinsivujen suhde on $9 : 6 = 3 : 2$. Pienemmän kolmion kantasivu DB on siis $\frac{2}{3}$ isomman kolmion kantasivusta $CB = 6$, eli $DB = 4$.

4. Myös A ja C ovat erään kuution sivutahkon vastakkaiset kärjet. AB, BC ja CA ovat siis kaikki kuution sivutahkon lävistäjinä yhtä pitkät. Kolmio ABC on tasasivuinen kolmio, joten $\angle ABC = 60°$.

5. Koska $2^4 = 16$ ja kahden kuutoseen päättyvän luvun tulo päättyy aina kuutoseen, $2^{2008} = (2^4)^{502}$ päättyy kuutoseen. Koska $4 \cdot 6$ päättyy neloseen, myös $2^{2010} = 4 \cdot 2^{2008}$ päättyy neloseen.

6. Kysytyn luvun x on toteutettava yhtälö $x^2 = 2x^3$. Koska $x \neq 0$, yhtälö on sama kuin $1 = 2x$. Luku voi olla vain $x = \frac{1}{2}$. Luku $\frac{1}{2}$ ilmeisesti toteuttaa ehdon.

7. "Kahden välein" tarkoittaa, että peräkkäiset luvut valitaan niin, että niiden erotus on kaksi. Tulo on siis $(x - 4)(x - 2)x(x + 2)$. On luonnollista etsiä pienintä arvoa negatiivisten lukujen joukosta. Tulo on negatiivinen, kun siinä on yksi tai kolme negatiivista tekijää. Yksi negatiivinen tekijä on silloin, kun $x-4 < 0 < x-2$ eli kun $x = 3$. Tulon arvo on silloin -15. Kolme negatiivista tekijää on silloin, kun $x = -1$. Tulon arvo on silloinkin -15.

8. Olkoot pikkusuunnikkaiden sivun AB suuntaisten sivujen pituudet a, b ja c ja sivun BC suuntaisten sivujen pituudet d, e ja f. Silloin $2(a+b+c+d+e+f) = 25$, $2(a+e) = 13$, $2(b+d) = 6$, $2(c+e) = 5$ ja $2(b+f) = 8$. Nyt $2(a + b + c + d + e + f) - 2(a + e) - 2(b + d) - 2(c + e) - 2(b + f) = -2(b + e)$, joten kysytty piiri on $2(b + e) = 13 + 6 + 5 + 8 - 25 = 32 - 25 = 7$.

9. Lasketaan:

$$\frac{200^9}{20^{10}} = \frac{2^9 \cdot 10^{18}}{2^{10} \cdot 10^10} = \frac{10^8}{2} = 5 \cdot 10^7.$$

Edellinen luku on suurempi, 50000000-kertainen.

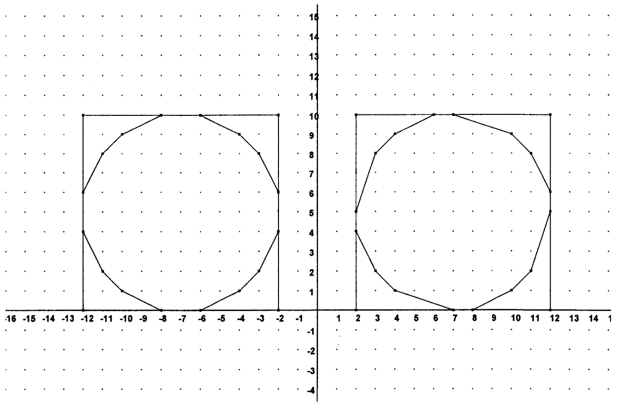
10. Jokaiseen yhdeksästä janasta liittyy kolme leikkauspistettä, joten leikkauspisteitä on 27. Nyt kuitenkin sama leikkauspiste lasketaan ainakin kahdesti. Jos jokaisen leikkauspisteen kautta kulkee janoista tasan kaksi, tulee jokainen leikkauspiste lasketuksi tasan kahdesti. Jos leikkauspisteitä on a kappaletta, saadaan $2a = 27$, mikä on mahdotonta, kun a on kokonaisluku. Oletetaan sitten, että joidenkin leikkauspisteiden kautta kulkee kolme janaa. Tällainen leikkauspiste tulee lasketuksi kuudesti. (Janapareja on 3, ja piste tulee lasketuksi parin kummankin osapuolen mukana) Jos tällaisia leikkauspisteitä on b kappaletta, mutta minkään pisteen kautta ei kulje neljää janaa, saadaan yhtälö $2a + 6b = 27$, mikä on edelleen mahdoton parillisuustarkastelun vuoksi. Jos taas jonkin pisteen kautta kulkee 4 janaa, tulee tämä piste lasketuksi 12 kertaa. Saadaan yhtälö $2a + 6b + 12c = 27$, joka on edelleen parillisuustarkastelun vuoksi mahdoton.

Osa 2

1. Olkoon neliö $ABCD$. Lävistäjä jakaa neliön kahdeksi yhteneväksi kolmioksi. Tämän lisäksi jaossa voi syntyä yhteneviä nelikulmioita. Kohdissa a), b) ja c) tällaisen nelikulmion kaksi vierekkäistä kärkeä ovat nelikulmion jakavan janan päätepisteet vastakkaisilla neliön sivuilla. Voidaan olettaa, että nämä sivut ovat AB ja CD ja että AB-sivulla oleva kärki on lähempänä tai yhtä kaukana pisteestä A kuin pisteestä B. Mahdollisia valintoja on a)-kohdassa 1, b)-kohdassa 2 ja c)-kohdassa $\dfrac{n-1}{2}$, kun $n-1$ on parillinen, ja $\dfrac{n-2}{2}$, kun $n-1$ on pariton. Kohdissa a), b) ja c) yhteneviä kuvioita voi siis olla 2, 3 tai n:n parittomuuden tai parillisuuden mukaan $\dfrac{n+1}{2}$ tai $\dfrac{n}{2}$. Suorakaiteen tapauksessa vastaava tarkastelu on tehtävä molempien sivuparien suhteen. Yhtenevien kuvioiden lukumäärä on $\dfrac{m+n}{2}$, jos m ja n ovat molemmat parittomia, $\dfrac{m+n-2}{2}$, jos m ja n ovat molemmat parillisia, ja $\dfrac{m+n-1}{2}$, jos luvuista m ja n tasan toinen on pariton.

2. Kun $n = 3$, neliön sisällä on 4 hilapistettä. Murtoviiva saadaan tehtävän ehtojen mukaan kulkemaan näistä jokaisen kautta. Kun $n = 4$, neliön sisällä on 9 A:n pistettä. Murtoviiva voidaan nytkin piirtää jokaisen pisteen kautta, mutta neliön keskipiste ei ole murtoviivan aito kärki. (Osien tulee olla joko symmetriset neliön keskipisteen suhteen tai symmetriset keskipisteen kautta kulkevan suoran suhteen; kummassakaan tapauksessa keskipiste ei voi olla murtoviivan aito kärki.)

3. Jos ensimmäisen jakoviivan päätepisteet ovat A ja B ja toisen jakoviivan päätepisteet C ja D, niin syntyneiden kolmen monikulmion kärkinä ovat alkuperäisen monikulmion kärjet ja kukin pisteistä A, B, C ja D kahdesti. Jos jokin näistä jakopisteistä osuu alkuperäisen monikulmion kärkeen, alkuperäisen monikulmion kärkimäärää vähennetään. Näin ollen n-kulmiosta syntyvien kolmen monikulmion kärkimäärä on ainakin $n+4$ ja enintään $n+8$. Nelikulmion tapauksessa pisteistä A, B, C ja D enintään kolme voi olla nelikulmion kärkiä, joten a-kohdan vastaus on 9, 10, 11 tai 12. Seuraavasta tehtävästä ilmenee, että suurin mahdollinen n on 16 ja että tällöinkin pisteet A, B, C ja D voidaan valita niin, että niistä yksikään ei ole alkuperäisen 16-kulmion kärki. d-kohdan vastaus on siis $n+8$.



4. Selvästi ainakin oheisen kuvion mukaiset 16-kulmiot voidaan muodostaa. Laskemalla monikulmion ulkopuoliset neliöt ja kolmiot nähdään helposti, että vasemmanpuoleisen ala on 76 ja oikeanpuoleisen 78. – Sen täsmällinen todistaminen, että vaaditun n-kulmion piirtäminen ei ole mahdollista, kun $n > 16$, vaikuttaa haastavalta ongelmalta. Solmu palaa asiaan. Lähettäkää ehdotuksianne!

Osa 3

1. Koska $198 = 9 \cdot 22 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$, z on kokonaisluku täsmälleen silloin, kun pariton luku $4n + 3 \geq 7$ on jokin luvuista 9, 11, 33, 99. Näistä luvuista vain 11 ja 99 ovat muotoa $4n + 3$, n:n arvoilla 2 ja 24.

2. Koska

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

tulossa jokaisen termin osoittajan tulon tekijät supistavat viereisten tekijöiden nimittäjästä yhden tekijän. Ensimmäisen tekijän nimittäjän kakkosista vain toinen supistuu, samoin viimeisen termin nimittäjästä vain toinen 2010. Viimeisen termin $k+1$ eli 2011 jää myös supistumatta. Se on siis x.

3. a) Särmiä on $4 \cdot 3 = 12$: kunkin leikkauskuvion kolme särmää. Alkuperäiset särmät leikkautuvat kokonaan pois. b) Tahkoja on kahdeksan: alkuperäisistä neljästä tahkosta jää jokaisesta keskiosaan kolmio ja leikkauskuvioista tulee neljä lisää. c) Jokainen pois leikattu tetraedri on säännöllinen, ja näiden tetraedrien särmät ovat puolet alkuperäisestä. Kukin pois leikattu tetraedri on siten tilavuudeltaan kahdeksasosa alkuperäisestä. Kun pois leikattuja tetraedreja on neljä, poistetuksi tulee tasan puolet tilavuudesta, ja toinen puoli jää jäljelle.

4. a) Räjähde on planeetan pinnassa, kun $z = 10000 - 100t = 0$ eli kun $t = 100$. b) x vähenee ja y kasvaa samalla nopeudella, joten räjähde liikkuu lounaaseen. c) Kun $t = 100$, niin $x = 15000 - 200 \cdot 100 = -5000$ ja $y = 20000 + 200 \cdot 100 = 40000$. Räjähdyspiste on origosta 5 km etelään ja 40 km länteen. Pythagoraan lauseen perusteella pisteen etäisyys origosta on kilometreinä $\sqrt{5^2 + 40^2} = \sqrt{1625} \approx 40{,}3$.

5. Sanat jakautuvat kahdeksi osaksi; osien esiintymisestä yhdessä voi muodostaa seuraavan taulukon:

	buzi	geni	to	tu
ji			×	×
ki	×			
m	×	×		×

Sanojen suomalaisissa vastineissa esiintyy neljä objektia, ’vieras’, ’vuohi’, ’joki’ ja ’ihminen’, ja näillä määreet ’suuri’, ’pieni’ ja ’määreetön’ eli neutraali. Näiden yhdistelmät voidaan myös taulukoida:

	vieras	vuohi	joki	ihminen
pieni		×		
neutraali	×	×		×
suuri			×	×

Kun taulukoita verrataan, huomataan, että m vastaa riviä ’neutraali’, jolloin **geni** on ’vieras’, **ki** ’pieni’, **buzi** ’vuohi’, **to** ’joki’ ja **tu** ’ihminen’. Ja viimein **ji** ’suuri’.

Lukiokilpailun tehtävien ratkaisuja

1. Olkoon ABC suorakulmainen kolmio ja $\angle ABC$ suora kulma, $BC = a$, $CA = b$ ja $AB = c$. Olkoot D, E ja F sivujen BC, CA ja AB keskipisteet. Olkoot vielä keskijanat $AD = m_a$, $BE = m_b$ ja $CF = m_c$.

1. ratkaisu. Kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävä jana on kolmion kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaan puolet siitä. Siis $ED \| AB$ ja $ED = \frac{1}{2}AB$. Siis kolmio BDE on suorakulmainen. Pythagoraan lauseen perusteella saadaan suorakulmaisista kolmioista ABD, FBC ja BDE

$$m_a^2 = AD^2 = AB^2 + BD^2 = c^2 + \frac{1}{4}a^2,$$

$$m_c^2 = CF^2 = BC^2 + BF^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2,$$

$$m_b^2 = BD^2 + DE^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2.$$

Siis $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{2}(a^2 + c^2) = \frac{3}{4}(2a^2 + 2c^2) = \frac{3}{4}(a^2 + c^2 + b^2)$; viimeinen yhtälö perustuu Pythagoraan lauseeseen sovellettuna kolmioon ABC.

2. ratkaisu. Tunnetun (ja Pythagoraan lauseen nojalla helposti todistettavan) *suunnikaslauseen* mukaan suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa. Kolmio ABC voidaan kolmella eri tavalla täydentää suunnikkaaksi: sivut a ja b, lävistäjät c ja $2m_c$; sivut b ja c, lävistäjät a ja $2m_a$; sivut c ja a, lävistäjät b ja $2m_b$. Näihin kolmeen suunnikkaaseen sovelletaan kuhunkin suunnikaslausetta. Siis $c^2 + 4m_c^2 = 2(a^2 + b^2)$, $a^2 + 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2)$ ja $b^2 + 4m_b^2 = 2(a^2 + b^2)$. Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen ja ratkaistaan $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$, saadaan heti väite. Oletusta kolmion ABC suorakulmaisuudesta ei tarvita. – Olennaisesti suunnikaslauseesta on kysymys myös silloin, kun käytetään tunnettua ja kaavakokoelmistakin löytyvää kolmion keskijanan pituuden lauseketta $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$. Johdutaan samoihin yhtälöihin kuin yllä.

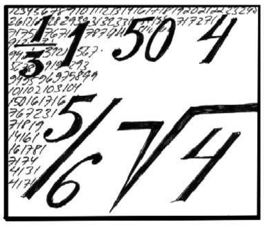
3. ratkaisu. Olkoon $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Kosinilause sovellettuna kolmioihin ADC, BEA ja CFB antaa $m_a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab\cos\gamma$, $m_b^2 = c^2 + \frac{1}{4}b^2 - bc\cos\alpha$ ja $m_c^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2 - ac\cos\beta$ Toisaalta kosinilause sovellettuna kolmion ABC antaa yhtälöt $2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$, $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$ ja $2ac\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2$. Kun jälkimmäisistä yhtälöistä sijoitetaan kosinitermit edellisiin ja lasketaan yhtälöt yhteen, saadaan väite.

2. Jos luvun n alkutekijähajotelma on $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, niin n:n tekijöiden määrä on $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)\cdots(a_k + 1)$. Kun $m < n$, niin jokainen $m!$:n tekijä on $n!$:n tekijä, mutta $n!$:lla on tekijöitä, jotka eivät ole $m!$:n tekijöitä (esimerkiksi $n!$). $d(n!)$ on siis n:n aidosti kasvava funktio. Kokeillaan: 16!:ssa on tekijänä $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ kakkosta, $5 + 1 = 6$ kolmosta ja 3 viitosta ja 2 seitsemää, 11 ja 13. Tekijöitä siis $16 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 \cdot 21 = 21 \cdot 256 > 5000$, 15!:ssa kakkosia vain 11; tekijöiden lukumaarä $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ kertaa 16!:n tekijöiden lukumäärä, mutta siis yli 3000, 14!:ssa viitoset ja kolmoset vähenevät yhdellä, siis tekijöitä $12 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60 \cdot 36 = 2160 > 2010$. Kun mennään 13!:aan, seitsemäisiä on yksi vähemmän, joten tekijämäärän ilmaisevassa tulossa ainakin yksi 3 muuttuu kahdeksi, ja tulo putoaa alle 2000:n. Vastaus on siis $n = 14$.

3. Jos $P(x_0) = 0$, niin $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. Jos erityisesti P:n kertoimet ovat kokonaislukuja ja x_0 on kokonaisluku, niin Q:kin on kokonaislukukertoiminen. [Todistus: Jos $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ ja $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$, niin $a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - x_0b_{n-1}$, $a_{n-2} = b_{n-3} - x_0b_{n-2}$, $\ldots$, $a_1 = b_0 - x_0b_1$. Kun näistä yhtälöistä ratkaistaan järjestyksessä b_{n-1}, b_{n-2}, $\ldots$, b_0, nähdään, että kaikki ovat kokonaislukuja.] Tämän perustuloksen mukaan tehtävän polynomi voidaan kirjoittaa muotoon $P(x) = (x-1997)(x-2010)Q(x)$, missä Q on kokonaislukukertoiminen polynomi. Siis erityisesti $|P(2005)| = |2005 - 1997| \cdot |2005 - 2010| \cdot |Q(2005)| = 40|Q(2005)|$. $Q(2005)$ on kokonaisluku. Jos olisi $Q(2005) \neq 0$, olisi $|P(2005)| \geq 40 > 10$, vastoin oletusta. Siis $Q(2005) = 0$ ja $P(2005) = 0$.

4. Numeroidaan joukkueet numeroin 1, 2, $\ldots$, n. Tarkastellaan kierrosta i, $1 \leq i \leq n - 1$, ja joukkuetta x, $x < n$. Asetetaan joukkueen x vastustajaksi se joukkue y, jolle $x + y + i$ on jaollinen luvulla $n - 1$ ja $1 \leq y < n$. Jos $x + x + i = 2x + i$ on jaollinen $n - 1$:llä, asetetaan x:n vastustajaksi joukkue n. On osoitettava, että kaikki joukkueet pelaavat joka kierroksella ja että jokainen joukkue tulee pelanneeksi jokaista muuta vastaan. Todetaan ensin, että joukkue n pelaa joka kierroksella. Jos luvuilla $2x_1+i$ ja $2x_2+i$ on sama jakojäännös $(n-1)$:llä jaettaessa, olisi $2(x_1 - x_2)$ parittoman luvun $n - 1$ monikerta, mutta koska $|x_1 - x_2| < (n-1) - 1 < n - 1$, on $x_1 = x_2$. Jakojäännökset ovat eri lukuja, niitä on $n - 1$ kappaletta ja ne ovat välin $[0, n - 2]$ kokonaislukuja, joten tasan yksi niistä on 0. n saa aina vastustajan. Samoin osoitetaan, että jos $2x+i$ ei ole jaollinen $n-1$:llä, on tasan yksi $y \neq x$, jolle $x + y + i$ on $n - 1$:n monikerta. Näin ollen jokaisella joukkueella on vastustaja kierroksella i, ja jos x saa vastustajakseen y:n, niin y saa vastustajakseen x:n. On vielä osoitettava, että jokaiset kaksi joukkuetta tulevat pelaamaan. Jos $x \neq y$, niin lukujen $x+y+1$, $x+y+2, \ldots, x+y+(n-1)$ jakojäännökset $n - 1$:llä jaettaessa ovat eri lukuja (todistus samoin kuin edellä); tasan yksi niistä, sanokaamme luvun $x + y + i$ jakojäännös, on nolla. x ja y pelaavat siis keskenään kierroksella i ja vain kierroksella i. Lisäksi luvuista $2x+1$, $2x+2, \ldots, 2x+(n-1)$ tasan yksi, esimerkiksi $2x + i$, on $n - 1$:n monikerta. x ja n pelaavat siis kierroksella i.

5. Osoitetaan ensin, että jos joukko S näkyy pisteistä P ja Q, niin jana PQ sisältyy joukkoon S ja S näkyy jokaisesta janan PQ pisteestä. Näkymisen määritelmästä seuraa, että pisteet P ja Q kuuluvat joukkoon S. Koska Q näkyy P:stä, niin jana PQ sisältyy joukkoon S. Olkoon nyt X mielivaltainen janan PQ piste ja Y mielivaltainen joukon S piste. Silloin janat PY ja QY sisältyvät joukkoon S. Jos Y on suoralla PQ ja janan PQ ulkopuolella, niin jana XY sisältyy joko janaan PY tai janaan QY, jotka puolestaan sisältyvät joukkoon S. Oletetaan, että PQY on (aito) kolmio, mutta janalla XY on piste Z, joka ei kuulu joukkoon S. Puolisuora PZ leikkaa janan QY pisteessä T. Koska T on S:n piste, se näkyy pisteestä P, joten Z onkin joukon S piste. Ristiriita osoittaa, että Y näkyy pisteestä X. Oletuksen mukaan S:n jokainen piste näkyy pisteistä A, B ja C. Edellä sanotun perusteella kolmion sivut AB, BC ja CA sisältyvät joukkoon S ja S näkyy jokaisesta näiden janojen pisteestä. Mielivaltainen kolmion ABC piste X on (usealla) sellaisella janalla, jonka päätepisteet ovat kolmion sivuilla. Edellä osoitetun mukaan S:n jokainen piste näkyy siis myös pisteestä X.



Tekijäfunktio ja muita lukuteoreettisia otuksia

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Ensi silmäyksellä tekijäfunktio

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

ei välttämättä näytä maailman mielenkiintoisimmalta matemaattiselta objektilta. Se on kuitenkin yhteydessä esimerkiksi Riemannin kuuluisaan ζ-funktioon, sillä kun $\Re s > 1$, niin

$$\zeta(s)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}.$$

Tekijäfunktion arvo on varsin helppo laskea, jos luvun alkutekijähajotelma on tiedossa, sillä

$$d\left(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)\,.$$

Valitettavasti luvun alkutekijähajotelmaa ei yleensä voi olettaa tunnetuksi (harvoinpa edes tiedämme, onko luku alkuluku vai ei). Tällöin on varsin hankala sanoa yhtään mitään tekijäfunktion suuruudesta. Onnellista kyllä, tekijäfunktion keskimääräisestä suuruudesta pystymmekin sanomaan aika paljon. Aloitetaan tarkastelemalla summaa

$$\sum_{n=1}^{M} d(n).$$

Huomataan aluksi, että sen sijaan, että laskettaisiin miten monta tekijää jollakin luvulla on, voidaan laskea miten moni luku on kullakin luvulla jaollinen:

$$\sum_{n=1}^{M} d(n) = \sum_{n=1}^{M} \left\lfloor \frac{M}{n} \right\rfloor.$$

Alaspäinpyöristykset hieman häiritsevät elämää yhtälön oikealla puolella, mutta kirjoitetaan nyt

$$\left\lfloor \frac{M}{n} \right\rfloor = \frac{M}{n} - c_n,$$

missä $0 \leq c_n < 1$. Oikea puoli voidaankin nyt kirjoittaa muodossa

$$\sum_{n=1}^{M} \left\lfloor \frac{M}{n} \right\rfloor = \sum_{n=1}^{M} \frac{M}{n} - \sum_{n=1}^{M} c_n = \sum_{n=1}^{M} \frac{M}{n} + O(M),$$

missä $O(M)$ tarkoittaa virhetermiä, joka on korkeintaan jokin vakio kertaa M, kun M on tarpeeksi suuri. Tässä tapauksessa on toki helppo nähdä, että virhetermi on itse asiassa korkeintaan M. Summa on puolestaan varsin helppo arvioida:

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{M}{n} = M \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} \leq M + M \int_1^M \frac{1}{x} dx = M + M \log M$$

ja toisaalta

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{M}{n} = M \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} \geq \int_M^{M+1} \frac{1}{x} dx$$
$$= M \log(M+1) \geq M \log M.$$

Anne-Maria Ernvall-Hytönen toimii Vetenskapsrådetin rahoittamana postdoc-tutkijana Kungliga Tekniska Högskolanissa.

(Tässä artikkelissa log on luonnollinen logaritmi.) Kaiken kaikkiaan siis

$$\sum_{n=1}^{M} d(n) = M \log M + O(M),$$

missä merkinnän O implikoima vakio ei välttämättä ole sama kuin aiemmin. $O(M)$ on sinänsä varsin mukava virhetermi, että se on pienempi kuin $M \log M$, mutta toki voi miettiä, saisikohan tätä virhetermiä runnottua hieman pienemmäksi. Onnellista kyllä, virhetermi suostuu pienenemään varsin alkeellisilla menetelmillä suuruusluokkaan $O(\sqrt{M})$, mutta tällöin pitää ottaa toinenkin päätermi mukaan:

$$\sum_{n \le M} d(n) = M \log M + (2\gamma - 1)M + O(\sqrt{M}),$$

missä $\gamma = \lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n \le x} \frac{1}{n} - \log x\right)$. Todistus jätetään innokkaalle lukijalle harjoitustehtäväksi.

Näiden laskujen tuloksena pääsemme johtopäätökseen, että tekijäfunktion arvo joukossa $\{1, 2, \ldots, M\}$ on keskimäärin $\log M$. Seuraava luonnollinen kysymys on se, kuinka paljon arvot tästä heittelehtivät. Selvästi kaikille alkuluvuille p pätee $d(p) = 2$ ja alkulukujen potensseille $d(p^\ell) = \ell + 1$. Toisin sanoen, todella pieniä arvoja kyllä löytyy, mutta ei välttämättä kovin tiheässä. Toisaalta voidaan arvioida:

$$d(n) = \sum_{d|n} 1 = 2 \sum_{d|n,\ d \le \sqrt{n}} \le 2\sqrt{n}.$$

Pienille luvun n arvoille tämä yläraja ei ole välttämättä kovinkaan huono: Esimerkiksi $d(6) = 4$, ja $2\sqrt{6} < 5$. Suurille luvun n arvoille tämä sen sijaan on jo pahasti pielessä. Tämän todistaminen on jo selvästi hankalampaa ja työläämpää, mutta koska se on kuitenkin tehtävissä alkeellisilla menetelmillä, siirrymme nyt siihen. Tästä lähtien voimme siis olettaa, että luku n on suuri. Kirjoitetaan $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, ja olkoon δ reaaliluku, jolle annetaan arvo myöhemmin. Tarkastellaan aluksi osamäärää

$$\frac{d(n)}{n^\delta} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_i + 1}{p_i^{\alpha_i \delta}} \right).$$

Oikean puolen tuloa voidaan arvioida ylöspäin, jos siitä poistetaan kaikki sellaiset termit, joilla $p_i^\delta > 2$, sillä tällöin $p_i^{\delta\alpha_i} > 2^{\alpha_i} \ge \alpha_i + 1$ (viimeinen vaihe on helppo todistaa vaikka induktiolla), eli $\frac{\alpha_i+1}{p_i^{\alpha_i\delta}} < 1$. Jäljelle jää tulo

$$\prod_{1 \le i \le r,\ p_i^\delta \le 2} \left(\frac{\alpha_i + 1}{p_i^{\alpha_i \delta}} \right).$$

Tämän summan arviointia voidaan taas jatkaa manipuloimalla nimittäjää. Osoitetaan ensin, että

$$p^{\delta\alpha_1} = e^{\alpha_1 \delta \log p_i} > 1 + \delta\alpha_i \log p_i.$$

Yhtäsuuruus on triviaali. Epäyhtälö puolestaan saadaan, kun tarkastellaan funktiota $f(y) = e^y - 1 - y$, ja huomataan, että $f'(y) = e^y - 1 = 0$, kun $y = 0$ ja $f'(1) > 0$, jolloin funktio on kasvava positiivisilla muuttujan y arvoilla. Alkuperäinen epäyhtälö on todistettu, kun vielä huomataan, että $f(0) = 0$, eli positiivisilla muuttujan y arvoilla myös funktion arvo on positiivinen. Kun otetaan luonnollinen logaritmi ehdosta $p_i^\delta \le 2$ molemmilta puolilta, saadaan $\delta p_i \le \log 2 < 1$, ja niinpä

$$1 + \delta\alpha_i \log p_i > \delta \log p_i(\alpha_i + 1).$$

Tämä muotoilu vaikuttaa varsin lupaavalta, sillä nyt voimme hankkiutua eroon osoittajasta. Lauseke siis muokkaantuu seuraavasti:

$$\begin{aligned}\prod_{1 \le i \le r,\ p_i^\delta \le 2} \left(\frac{\alpha_i + 1}{p_i^{\alpha_i \delta}} \right) &\le \prod_{1 \le i \le r,\ p_i^\delta \le 2} \left(\frac{\alpha_i + 1}{(\alpha_i + 1)\delta \log p_i} \right) \\ &= \prod_{1 \le i \le r,\ p_i^\delta \le 2} \left(\frac{1}{\delta \log p_i} \right).\end{aligned}$$

Lauseke ei ainakaan kasva, jos alkuperäisen luvun n alkutekijöiden $p_1, p_2, \ldots, p_k$ joukkoon lisätään ne joukon ulkopuoliset alkuluvut, jotka toteuttavat ehdon $p^\delta \le 2$, eli $p \le 2^{1/\delta}$. Kaikki alkuluvut p ovat suuruudeltaan vähintään ≥ 2, ja korkeintaan luvun $2^{1/\delta}$. Siispä

$$\begin{aligned}\prod_{1 \le i \le r,\ p_i^\delta \le 2} \left(\frac{1}{\delta \log p_i} \right) &\le \prod_{p \le 2^{1/\delta}} \left(\frac{1}{\delta \log p} \right) \\ &\le \prod_{p \le 2^{1/\delta}} \left(\frac{1}{\delta \log 2} \right) \\ &\le \left(\frac{1}{\delta \log 2} \right)^{2^{1/\delta}}.\end{aligned}$$

Olemme nyt päätyneet arvioon

$$\frac{d(n)}{n^\delta} \le \left(\frac{1}{\delta \log 2} \right)^{2^{1/\delta}}.$$

Otetaan tästä logaritmit puolittain, jolloin päädytään lausekkeeseen (jota on ehkä hieman helpompi manipuloida kuin ylläolevaa, vaikka periaatteessa ideat menevät läpi kummassa tahansa tilanteessa)

$$\log d(n) \le \delta \log n + 2^{1/\delta} \log \left(\frac{1}{\delta \log 2} \right).$$

Valitaan nyt

$$\delta = \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \log 2}{\log \log n},$$

missä ε on positiivinen kiinteä reaaliluku, joka voidaan valita niin pieneksi kuin halutaan. Tämän sijoituksen jälkeen voimmekin olla toistaiseksi ihan tyytyväisiä oikean puolen ensimmäiseen termiin. Toinen termi sen sijaan vaatii vielä työtä. Jaetaan toinen termi osiin (tulontekijöihin) ja käsitellään nämä osat erikseen. Ensimmäiseksi työvuorossa on $2^{1/\delta}$:

$$
\begin{aligned}
2^{1/\delta} = 2^{\frac{\log\log n}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\log 2}} &= e^{\frac{\log\log n \log 2}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\log 2}} \\
&= e^{\frac{\log\log n}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}} = (\log n)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}.
\end{aligned}
$$

Tähän arvioon voimme hetken olla aivan tyytyväisiä, ja siirtyä toiseen palikkaan. Kun n on riittävän suuri, pätee varmasti $\log 2 > \delta$, joten $\frac{1}{\delta \log 2} < \frac{1}{\delta^2}$ ja tästä saadaankin

$$
\log\left(\frac{1}{\delta\log 2}\right) < 2\log\frac{1}{\delta}.
$$

Tätä lauseketta onkin jo varsin helppo muokata:

$$
\begin{aligned}
2\log\frac{1}{\delta} &= 2\log\left(\frac{\log\log n}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\log 2}\right) < 2\log\left(\frac{\log\log n}{\log 2}\right) \\
&= 2\log\log\log n - 2\log\log 2.
\end{aligned}
$$

(Tätä lauseketta katsoessa on varmaan helppo arvata miksi vitsaillaan, että hukkuvasta analyyttisestä lukuteoreetikosta lähtevä ääni on logloglog. Metodologisesti tämä vääntö ei tosin ihan analyyttistä lukuteoriaa ole, mutta samankaltaisista ongelmista ja tuloksista on kuitenkin kyse.) Koska $\log 2 < 1$, niin $\log\log 2 < 0$. Arvioidaan nyt ylöspäin: $-\log\log 2 < \log\log\log n$ riittävän suurille n. Päädytään siis tulokseen

$$
\log\left(\frac{1}{\delta\log 2}\right) < 3\log\log\log n.
$$

Seuraavaksi väitetään, että

$$
3\,(\log n)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\log\log\log n \le \frac{\varepsilon\log 2\log n}{2\log\log n}
$$

millä tahansa kiinteällä positiivisella ε. Tämän todistus (sopivan funktion käytöksen, eli käytännössä derivaatan tarkastelu) jätetään epäluuloisille lukijoille harjoitustehtäväksi. Olemme näin vihdoinkin päässeet tulokseen

$$
\log d(n) < \frac{(1+\varepsilon)\log 2\log n}{\log\log n}.
$$

Tämän tuloksen voi kirjoittaa useassakin muodossa, mutta ehkä tätä on helpoin verrata aikaisempaan neliöjuurirajaan, jos yksinkertaisesti kirjoitetaan

$$
d(n) < n^{\frac{(1+\varepsilon)\log 2}{\log\log n}}.
$$

Tämä arvio on itse asiassa todella hyvä, sillä jos eksponentin osoittajan summattavan ε eteen laittaisi miinusmerkin plusmerkin tilalle, niin tulos ei enää pätisi vaan löytyisi äärettömän paljon sellaisia lukuja n, joilla

$$
d(n) > n^{\frac{(1-\varepsilon)\log 2}{\log\log n}},
$$

vaikka ε olisi kuinka pieni kiinteä positiivinen luku. Tämän väitteen todistaminen on varsin helppoa, mutta tarvitaan hieman taustatietoja. Määritellään aluksi funktio $\pi(x)$:

$$
\pi(x) = \sum_{p\le x} 1,
$$

missä p on alkuluku. Funktio $\pi(x)$ siis laskee korkeintaan luvun x suuruiset alkuluvut. Esimerkiksi $\pi(6) = 3$. Alkulukulauseena tunnettu tulos kertoo, että

$$
\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},
$$

missä merkintä $\sim$ tarkoittaa, että tulos ei ole välttämättä tarkka, mutta virhetermit ovat selvästi pienempiä kuin päätermi (joka on siis kirjoitettu oikealle puolelle). Toisaalta voimme myös määritellä toisenlaisen alkulukujen laskemiseen tarkoitetun funktion:

$$
\vartheta(x) = \sum_{p\le x}\log p.
$$

Tälle puolestaan pätee arvio $\vartheta(x) \ge cx$ jollakin vakiolla $0 < c \le 1$. Nyt pääsemmekin asiaan. Tarkastellaan lukua $n = 2\cdot 3\cdot 5\cdots q$, joka on siis tulo alkuluvuista johonkin alkulukuun q saakka. Nyt

$$
\log n = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \cdots + \log q \le \pi(q)\log q.
$$

Nyt

$$
d(n) = 2^{\pi(q)} \ge 2^{\log n/\log q}.
$$

Huomataan toisaalta, että $\vartheta(q) = \log n$, joten voidaan arvioida $\log n \ge cq$, josta saadaan $\log q \le \log\log n - \log c$. Saammekin nyt

$$
d(n) \ge 2^{\frac{\log n}{\log\log n - \log c}} = n^{\frac{\log 2}{\log\log n - \log c}}.
$$

Seuraavaksi pitääkin vain osoittaa, että

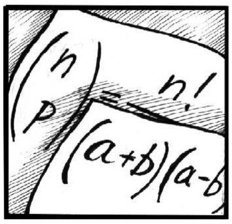
$$
n^{\frac{(1-\varepsilon)\log 2}{\log\log n}} < n^{\frac{\log 2}{\log\log n - \log c}}.
$$

Tätä lauseketta voi jonkin verran yksinkertaistaa, eli itse asiassa riittää osoittaa

$$
\frac{(1-\varepsilon)}{\log\log n} < \frac{1}{\log\log n - \log c},
$$

mutta ristiin kertomalla voidaan tämä todeta paikkansa pitäväksi kunhan luku n on riittävän suuri. Siispä, luvuilla $n = 2\cdot 3\cdot 5\cdots q$ on liikaa alkutekijöitä, jotta luvun ε eteen voisi laittaa miinusmerkin.

Tätä tekstiä kirjoitettaessa on käytetty lähteenä K. Ramachandran teosta Theory of Numbers.



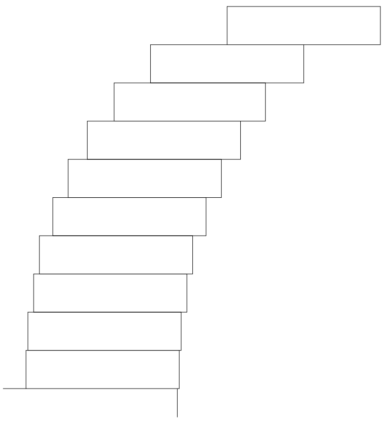
Tiiliä pinoon

Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Aalto-yliopisto

Reunan yli

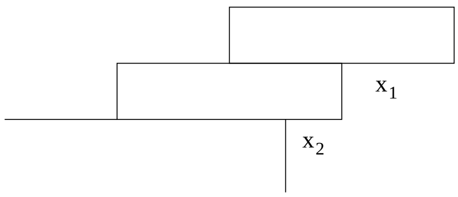
Pöydällä on n kappaletta samanlaisia tiiliä: Kuinka korkea pino niistä voidaan koota, jos jokaisen tiilen tulee olla normaaliasennossa eli suurin pinta alaspäin?

Omituinen kysymys, sillä vastaus on selvästi nh, missä h on yhden tiilen korkeus. Sen sijaan kysymys siitä, kuinka kauas ylin tiili voisi tasapainossa ulottua pöydän reunan yli, onkin jo hankalampi selvittää ilman tarkempaa laskemista. Se on tämän kirjoituksen aiheena.



Kannattaa aloittaa yhden tiilen tapauksella. Selvästi tiili voidaan asettaa niin, että korkeintaan puolet sen omasta pituudesta jää pöydän reunan ulkopuolelle. Sen sijaan jo kahden tiilen tapaus vaatii enemmän pohdintaa: onko edes selvää, että kahdella tiilellä päästään kauemmas pöydän reunasta kuin yhdellä?

Tasapainoehto koostuu nyt kahdesta osasta: ylin tiili ei saa pudota alemman päältä eikä koko systeemi saa kiepsahtaa pöydältä. Oletetaan, että tiilten pituus on 1 pituusyksikkö[1] ja merkitään tiilten ulkonemia symboleilla x_1 ja x_2 kuten alla olevassa kuviossa. Systeemin tasapainoa voidaan tutkia momenttien avulla ja tarvitsemme sen vuoksi fysiikasta seuraavan tiedon: suorakulmaisen särmiön synnyttämän momentin (= voima $\times$ varsi) pystysuora komponentti tietyn tukipisteen suhteen on $mg \cdot \Delta x$, missä m on särmiön massa, $g \approx 9{,}81$ m/s^2 ja Δx särmiön keskipisteen ja tukipisteen välinen vaakasuora etäisyys. Tämä ei ole totta yleisesti, mutta se pätee ainakin niille kappaleille, jotka ovat symmetrisiä peilauksessa massakeskipisteen suhteen.



Sovitaan, että momentin positiivinen suunta on myötäpäivään. Ylemmän tiilen tasapainoehdoksi saadaan

[1] Näin rohkeasta vedosta voi ylioppilaskokeessa menettää yhden pisteen . . .

tällöin $mg \cdot (x_1 - 1/2) \leq 0$, josta seuraa jo yllä todettu tulos $x_1 \leq 1/2$.

Koko systeemin tasapainossa täytyy ottaa huomioon molempien tiilien momentit pöydän reunan suhteen. Koska ylemmän tiilen keskipisteen vaakasuora etäisyys pöydän reunasta on $x_1 + x_2 - 1/2$, niin saadaan ehto

$$\underbrace{mg \cdot (x_2 - 1/2)}_{\text{alempi}} + \underbrace{mg \cdot (x_1 + x_2 - 1/2)}_{\text{ylempi}} \leq 0.$$

Sievennys muotoon

$$x_1 + 2x_2 \leq 2 \cdot \frac{1}{2}$$

auttaa jatkossa yleisen ehdon hahmottamiseen, ja siitä saadaan ratkaisuksi

$$x_2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1.$$

Valitsemalla $x_1 = 1/2$ saadaan $x_2 \leq 1/2 - 1/4 = 1/4$, joten kahden tiilen avulla päästään vähintään $x_1 + x_2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$ pöydän reunan ulkopuolelle. Ainakin kauemmas kuin yhdellä tiilellä!

Tehtävä 1. Osoita, että samalla periaatteella saadaan kolmen tiilen systeemin tasapainoehdoksi

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 3 \cdot \frac{1}{2}.$$

Ratkaise suurin mahdollinen x_3, kun $x_1 = 1/2$ ja $x_2 = 1/4$. Mikä on silloin $x_1 + x_2 + x_3$?

Voisimme jatkaa tällä tavalla lisäämällä yhden tiilen kerrallaan, mutta siirrytään kuitenkin rohkeasti yleiseen tapaukseen. Olkoon siis annettuna n tiiltä, joiden pituus on 1 pituusyksikkö. Oletetaan, että tiiliä ladotaan kuvion 3 esittämällä tavalla päällekkäin niin, että jokainen tiili ulottuu hieman alempana olevan oikealle puolelle. Merkitään ulkonemia ylhäältä laskettuna symboleilla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tarkoituksena on selvittää, kuinka suuria arvoja summa $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ voi saada silloin, kun rakennelma on tasapainossa.

Ensimmäinen tärkeä havainto on se, että ylimpien tiilien tasapainoehdot ovat samat kuin aikaisemmissa tapauksissa, joissa tiiliä on vähemmän. Ainoa uutuus on koko systeemin kiepsahtamista koskeva ehto, jossa momentteja tutkitaan pöydän reunan suhteen. Koska ylhäältä lukien k:nnen tiilen keskipisteen etäisyys pöydän reunasta on $x_n + x_{n-1} + \cdots + x_k - 1/2$, niin aikaisemmista tapauksista mallia ottaen tasapainoehdoksi saadaan (mg supistuu pois)

$$\begin{aligned}(x_n - 1/2) &+ (x_n + x_{n-1} - 1/2) \\ &+ (x_n + x_{n-1} + x_{n-2} - 1/2) + \ldots \\ &+ (x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 - 1/2) \leq 0,\end{aligned}$$

joka sievenee muotoon

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \leq \frac{n}{2}.$$

Näin ollen

$$nx_n \leq n/2 - (x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1})$$

ja edelleen

$$x_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}(x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1}).$$

Tuloksena on siis palautuskaava, jonka avulla annetun pinon ja pöydän väliin voidaan lisätä yksi tiili niin, että tasapaino säilyy. Aloitetaan arvosta $x_1 = 1/2$ ja lasketaan palautuskaavan ylärajan avulla

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot x_1 = \frac{1}{4}, \\ x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2) = \frac{1}{6}, \\ x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot (x_1 + 2x_2 + 3x_3) = \frac{1}{8}, \\ x_5 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) = \frac{1}{10},\end{aligned}$$

jne. Näyttää siltä, että $x_k = 1/2k$ kaikilla $1 \leq k \leq n$. Tämä voidaan todistaa esimerkiksi vähentämällä kaksi peräkkäistä palautuskaavaa puolittain toisistaan, jolloin summan termejä kumoutuu joukoittain: koska

$$\begin{aligned}kx_k &= k/2 - (x_1 + 2x_2 + \ldots \\ &\qquad + (k-2)x_{k-2} + (k-1)x_{k-1}) \\ (k-1)x_{k-1} &= (k-1)/2 - (x_1 + 2x_2 + \ldots \\ &\qquad + (k-2)x_{k-2}),\end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned}kx_k - (k-1)x_{k-1} &= k/2 - (k-1)/2 - (k-1)x_{k-1} \\ &= 1/2 - (k-1)x_{k-1},\end{aligned}$$

josta edelleen $x_k = 1/2k$.

Tehtävä 2. Montako tiiltä tarvitaan, jotta ylin tiili olisi kokonaan pöydän ulkopuolella, ts. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 1$?

Huomattakoon, että valittaessa kaikki ulkonemat mahdollisimman suuriksi, ei syntyvä tasapainotila ole vakaa (stabiili): pienikin häiriö kuten ylimmän tiilen päähän laskeutuva hyttynen rikkoo tasapainon ja romahduttaa koko pinon. Tämä voidaan korjata pienentämällä jokaista ulkonemaa hiuskarvan verran, jolloin saadaan vakaa tasapainotila aavistuksen pienemmällä ulkonemalla.

Vinoon menee

Mutta kuinka kauas pöydän ulkopuolelle voidaan tällä tavalla päästä? Koska

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \frac{1}{2} \ln n$$

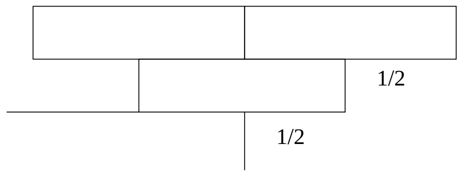
ja $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$, niin mitään kiinteää ylärajaa ei ole, jos vain käytettävissä on riittävän paljon tiiliä (ja sekä pöytä että alimmat tiilet kestävät paineen).

Tehtävä 3. Arvioi yllä olevaa approksimaatiota käyttämällä, kuinka monta 30 cm pitkää tiiltä tarvitaan, jotta ulkonema olisi a) 1 m, b) 10 m, c) 100 m, d) 1 km.

Voidaan osoittaa, että yllä laskettu tapa tiilten latomiseksi tuottaa optimaalisen tuloksen, jos latomisvaiheessa kukin tiili saa koskettaa vain yhtä alempana olevaa. Vasta äskettäin osoitettiin, että tästä vaatimuksesta luopumalla voidaan latoa n tiiltä rykelmäksi niin, että uloin tiili (ei välttämättä ylin) yltää ainakin $c \cdot \sqrt[3]{n}$ verran reunan ulkopuolelle (sopivalla vakiolla $c < 6$, joka ei riipu luvusta n) ja ettei tätä tulosta voida enää parantaa. Koska

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/3}} = 0,$$

niin parannus yllä käsiteltyyn ns. harmoniseen pinoon on huomattava suurilla n. Esimerkiksi kuviossa 4 päästään kolmen tiilen avulla etäisyydelle 1, joka on suurempi kuin harmonisen kolmen tiilen pinon ulkonema $11/12 \approx 0{,}92$. Näitä uusimpia tuloksia selvitetään tarkemmin alla olevissa viitteissä.

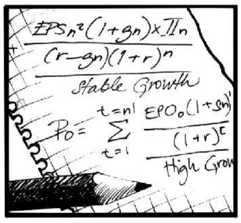


Viitteet

Barry Cipra: The Joys of Longer Hangovers. Science 323, Feb. 2009, s. 875.

M. Paterson, Y. Peres, M. Thorup, P. Winkler, U. Zwick. Maximum Overhang. The American Mathematical Monthly, Vol. 116, Nr. 9, Nov. 2009, ss. 763–787.

Solmun keskustelupalsta on osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl`



Mitä on 98-prosenttinen varmuus?

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Ilta-Sanomien vuoden 2010 pääsiäislauantain numeron Plus-liitteen takasivun täyttää Kiinteistömaailmayhtiön kokosivun mainos, jonka vihreältä pohjalta erottuu viiden ja puolen senttimetrin korkuisena prosenttiluku 98 %. Mainoksen tekstissä ovat virkkeet ”Me tiedämme 98 % varmuudella mitä asunnostasi saa.” ja ”Välittäjiemme antamat hinta-arviot ovat toteutuneet viimeisen kahden vuoden aikana tilastojen mukaan 98 prosenttisesti.” Muuta varsinaista informaatiota mainokseen ei sisälly.

Mainoksen välittämä sanoma on, että Kiinteistömaailman toiminta on asiantuntevaa ja hyvin asiakkaita, siis asuntojaan kauppaavia ihmisiä palvelevaa. En ota tähän kantaa, varsinkaan kielteistä, mutta on mukava miettiä, mitä mainoksen prosenttiluku saattaisi tarkoittaa. Prosessi, jota kuvataan, on olennaisesti kaksiosainen. Ensimmäisessä osassa välittäjä tutustuu myyntikohteeseen ja esittää havaintojensa sekä hallussaan olevan informaation kuten aikaisempia vastaavanlaisten kohteiden kauppoja koskevien tietojen perusteella arvion kohteen hinnasta. Toisessa vaiheessa käydään oikeasti kauppaa. Kohteelle asetetaan nimellishinta ja ostamista harkitsevat esittävät omia, yleensä nimellishintaa alempia tarjouksia, ja neuvottelujen sekä mahdollisen tarjouskilpailunkin jälkeen kauppa päätetään, yleensä kaiketi jonkin verran nimellishintaa alemmasta kauppasummasta.

Miten arviot voivat toteutua 98-prosenttisesti? Kun hinnat ja arviot voivat olla aika lailla erilaisia lukuja, niin tulkinta ”98 % kaupoista, joita edelsi arviomme, oli sellaisia, että arvioimme kohteen hinnaksi a euroa ja kauppahinta oli myös tasan a euroa” ei tunnu kovin uskottavalta. Myyjän kannalta hyvä tulkinta olisi ”98 % kaupoista oli sellaisia, että arvioimme kohteesta saatavan a euroa tai ainakin a euroa, ja toteutunut kauppahinta oli b euroa, missä $b \geq a$”. On myös mahdollista se, että arvio olisi ollut ”enintään a euroa” ja 98 %:ssa kaupoista kauppahinta olisi ollut b euroa, missä $b \leq a$. Näissä tapauksissa sen arvioiminen, onko 98-prosenttinen onnistuminen hyvä saavutus, riippuu olennaisesti siitä, ovatko arviot a kovin pieniä tai arviot b kovin suuria vai ei. – Ei tietenkään ole todennäköistä, että välittäjä tieten tahtoen esittäisi kovin pienen hinta-arvion, koska tällöin asiakas ei olisi halukas solmimaan hänen kanssaan toimeksiantosopimusta. Sen sijaan jälkimmäinen tulkinta sopisi tilanteeseen, jossa välittäjä hankkisi sopimuksia liian hyvin lupauksin.

Tilastolliseen päättelyyn liittyvä konfidenssivälin eli luottamusvälin käsite toimisi tässä tilanteessa seuraavasti. Arvio olisi ainakin a mutta enintään b euroa, ja 98 %:ssa toteutuneita kauppoja kauppahinta olisi c euroa, missä $a \leq c \leq b$. Tällöin mainoksen tarkoittama asiantuntevuus riippuisi olennaisesti välin pituudesta. Jos $b - a$ on vallan suuri, ei ole konstikaan saada lukua c sopimaan väliin $[a, b]$, mutta jos $b - a$ on pieni, osoittaa 98 % onnistuminen hyvää ennustustaitoa.

Muitakin mahdollisuuksia tulkita mainoksen prosentteja löytyy. Kun kaupanteon yhteydessä tapahtuva tinkiminen kuitenkin hiukan laskee hintaa, voisi 98 % tarkoittaa esimerkiksi sitä, että myyntihintojen keskiarvo on ollut 98 % hinta-arvioiden keskiarvosta. Seuraavaksi täytyisi nyt kysyä, miten keskiarvo lasketaan. Tavallisen aritmeettisen keskiarvon kohdalla saattaisi esimerkiksi onnistuminen muutaman huippukalliin kohteen tapauksessa kompensoida suuren määrän epäonnistumisia halvempien kohteiden osalla. Usein korostetaan sitä, että mediaani eli aineiston keskimmäinen on parempi aineiston edustaja kuin aritmeettinen keskiarvo: ihmisten ”tavallista” varallisuutta edustaa paremmin varallisuusvertailun keskimmäisen varallisuus kuin kaikkien yhteen lasketun varallisuuden keskiarvo, johon saattaa vaikuttaa erittäin voimakkaasti yhden huippurikkaan omaisuus. Mutta jos verrataan arvioiden mediaania ja kauppahintojen mediaania, niin jälkimmäinen voi helposti olla 98 % edellisestä, vaikka suurin osa arvioista olisi suurestikin erilaisia kuin toteutuneet kaupat.

Mainonta on mainontaa ja faktat ovat faktoja. Jokin numeroarvo yksinään ei kuitenkaan aina lisää tietoa ja mainoksen luotettavuutta. Ihanneyhteiskunnassani numerolukutaito olisi niin kehittynyttä, että mainostajakin pitäisi itsestään selvänä laittaa esiin myös numeroarvon merkityksen selventämiselle olennaiset lisätiedot, vaikkapa vain pienemmin kirjasimin.