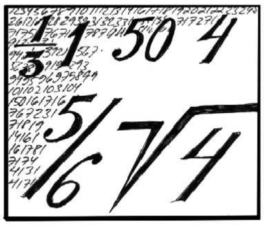


Matematiikan loppukilpailutehtävät 2010

Matemaattisten aineiden opettajien liitto MAOLin lukuvuoden 2009–10 valtakunnallisten matematiikkakilpailujen loppukilpailut pidettiin Helsingissä, Munkkiniemen yhteiskoulussa 29. tammikuuta. Kilpailuja oli kaksi, toinen peruskoulun, toinen lukion oppilaille.

Peruskoulukilpailun tehtävät

Peruskoulukilpailu käytiin kolmessa jaksossa ja tehtäviä oli kaikkiaan 19. Ne olivat tällaisia (Solmun toimitus on hiukan muotoillut muutamien tehtävien sanamuotoa.)

Osa 1

1. Mikä on suurin kokonaisluku, joka toteuttaa seuraavat ehdot: Se on suurempi kuin 100, se on pienempi kuin 200 ja kun se pyöristetään satojen tarkkuuteen, se on 20 suurempi, kuin jos se pyöristetään kymmenten tarkkuuteen.

2. Korvaa kirjaimet numeroilla niin, että eri kirjaimet vastaavat eri numeroita.

$$\begin{array}{r} S\ I\ M\ A \\ +\ S\ I\ K\ A \\ \hline M\ A\ K\ S\ A \end{array}$$

3. Kolmiot ABC ja DBC, missä D on sivun AB piste, ovat tasakylkisiä, $AC = AB = 9$ ja $CD = CB = 6$. Kuinka pitkä on sivu BD?

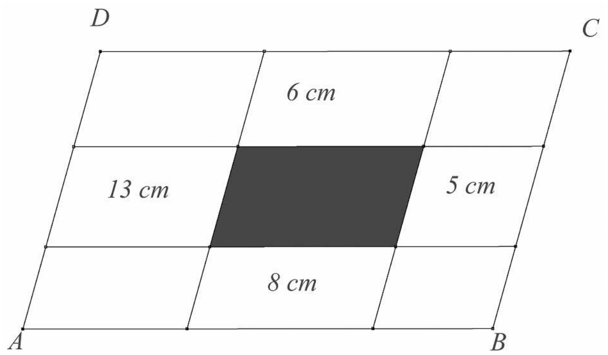
4. A ja B ovat kuution sivutahkon vastakkaiset kärjet ja B ja C ovat kuution toisen sivutahkon vastakkaiset kärjet. Määritä $\angle ABC$.

5. Mikä numero on ykkösten paikalla luvun 2^{2010} kymmenjärjestelmäesityksessä?

6. Onko mahdollista, että positiivisen luvun neliö on yhtä suuri kuin kaksi kertaa saman luvun kuutio? Anna esimerkki, jos tämä on mahdollista, tai perustele, miksi ei ole mahdollista.

7. Mikä on pienin arvo, jonka neljän kokonaisluvun tulo voi saada, kun luvut ovat peräkkäisiä kahden välein?

8. Suunnikas $ABCD$ on jaettu sivujen suuntaisilla suorilla yhdeksäksi pienemmäksi suunnikkaaksi. $ABCD$:n piiri on 25 ja neljän pikkusuunnikkaan piirit ovat kuvioon merkityt. Kuinka pitkä on keskimmäisen, tummennetun pikkusuunnikkaan piiri?



9. Vuosiluvuista 2009 ja 2010 saadaan pienin muutoksin luvut 200^9 ja 20^{10}. Kumpi luvuista on suurempi ja kuinka moninkertainen se on pienempään verrattuna?

10. Onko mahdollista piirtää tasoon yhdeksän janaa niin, että jokainen niistä leikkaa tasan kolme janaa?

Osa 2

Kilpailun toinen osa suoritettiin *geolauta*-nimisen askarteluvälineen avulla. Laite havainnollistaa tason kokonaislukukoordinaattisten pisteiden osajoukkoa $\mathbb{Z}^2$. Tehtävät on Solmuun muunnettu niin, että geolaudan sijasta puhutaan tästä joukosta, jota voi havainnollistaa myös esimerkiksi ruutupaperilla. Kutsumme joukkoon kuuluvia pisteitä *hilapisteiksi*.

1. Kuinka monella eri tavalla voi jakaa kahteen keskenään yhtenevään osaan neliön, jonka kärjet ovat hilapisteitä ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, kun jakajana on jana, jonka päätepisteet ovat neliön sivuilla olevia hilapisteitä? Neliön sivun pituus on a) 3, b) 4, c) $n-1$. Entä jos jaettavana on suorakaide, jonka kärjet ovat joukossa a ja jonka sivut ovat $m-1$ ja $n-1$ ja $m \neq n$. Kiertämällä tai peilaamalla saatuja ratkaisuja ei lasketa eri ratkaisuiksi.

2. Neliö, jonka kärjet ovat hilapisteitä, sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja jonka sivun pituus on a) 3, b) 4, jaetaan kahdeksi yhteneväksi osaksi murtoviivalla, jonka kärjet ovat neliön sisällä olevia hilapisteitä. Monenko neliön sisällä olevan hilapisteen kautta murtoviiva kulkee silloin, kun monikulmioilla on mahdollisimman monta kärkeä?

3. Tarkastellaan neliötä, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, sivun pituus on 10 ja kärjet ovat hilapisteitä. Muodosta neliön osa, jonka kärjet ovat hilapisteitä, ja joka on mahdollisimman suuri. Jaa tämä osa kahdeksi monikulmioksi janalla, jonka päätepisteet ovat hilapisteitä, ja jaa toinen syntyneistä monikulmioista edelleen kahdeksi osaksi janalla, jonka päätepisteet ovat hilapisteitä. Montako kärkeä näin syntyneillä kolmella monikulmiolla voi olla, kun yllä mainittu osa on a) nelikulmio, b) viisikulmio? Entä montako kärkeä monikulmioilla on enintään, kun osa on c) seitsenkulmio, d) n-kulmio? Piirrä ratkaisu tai selitä perustelu.

4. Muodosta edellisen tehtävän neliön osamonikulmio, jossa on mahdollisimman monta kärkeä. Monikulmion kärkien tulee olla hilapisteitä. Piirrä ratkaisu ja ilmoita monikulmion ala.

Osa 3

1. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille $z = \dfrac{198}{4n+3}$ on positiivinen kokonaisluku.

2. Mitä on x, jos

$$\left(1-\frac{1}{2}^2\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2010^2}\right)=\frac{x}{2\cdot 2010}?$$

3. Säännöllisestä tetraedrista (nelitahokkaasta) leikataan särmien keskipisteiden kautta kulkevilla tasoilla pois neljä pientä tetraedria, yksi kunkin kärjen puolelta. a) Montako särmää on jäljelle jääneessä keskiosassa? b) Montako tahkoa on jäljelle jääneessä osassa? c) Kuinka suuri on jäljelle jääneen tetraedrin tilavuus alkuperäiseen verrattuna?

4. *Pelasta maailma* -tietokonepelissä maailmaa kuvataan kolmiulotteisessa koordinaatistossa, jonka origona on planeetan pinnalla oleva havaitsija. Koordinaatiston x-akseli osoittaa pohjoiseen, y-akseli länteen ja z-akseli kohtisuoraan ylös. Alkutilanteessa vieras avaruuslaiva pudottaa myrkkyräjähteen kohdassa, jonka koordinaatit ovat $x = 15000$, $y = 20000$ ja $z = 10000$ (yksikkö on metri). Räjähde liikkuu niin, että sen koordinaatit ovat $x = 15000 - 200t$, $y = 20000 + 200t$ ja $z = 10000 - 100t$, kun t on sekunneissa ilmaistu aika. a) Paljonko aikaa pelaajalla on, ennen kuin räjähde osuu planeetan pintaan? b) Mihin ilmansuuntaan räjähde liikkuu? c) Kuinka kaukana havaitsijasta räjähde osuu planeetan pintaan?

5. Swahilia käytetään yleiskielenä Itä-Afrikassa, jossa sitä puhuu toisena kielenään noin 50 miljoonaa ihmistä. Äidinkielisiä swahilin puhujia on noin viisi miljoonaa. Swahilin kielen sanojen **mtu**, **mbuzi**, **mgeni**, **jito**, **jitu** ja **kibuzi** vastineet ovat **jättiläinen**, **kili** (pieni vuohi), **vieras**, **vuohi**, **ihminen** ja **iso joki**, ei kuitenkaan samassa järjestyksessä. Päättele, mikä on kunkin swahilin sanan oikea vastine.

Lukiokilpailun tehtävät

1. Todista, että suorakulmaisen kolmion keskijanojen neliöiden summa on $\frac{3}{4}$ kolmion sivujen neliöiden summasta.

2. Määritä pienin n, jolle luvulla $n!$ on ainakin 2010 eri tekijää.

3. Olkoon $P(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi, jolla on juuret 1997 ja 2010. Oletetaan lisäksi, että $|P(2005)| < 10$. Mitä kokonaislukuarvoja $P(2005)$ voi saada?

4. Parillinen määrä, n jalkapallojoukkuetta pelaa yksinkertaisen sarjan, ts. kukin joukkue pelaa kerran kutakin toista vastaan. Osoita, että sarja voidaan ryhmitellä $n-1$ kierrokseksi siten, että kullakin kierroksella jokainen joukkue pelaa tasan yhden pelin.

5. Olkoon S jokin tason pistejoukko. Sanomme, että piste P *näkyy* pisteestä A, jos kaikki janan AP pisteet kuuluvat joukkoon S ja että joukko S näkyy pisteestä A, jos jokainen S:n piste näkyy pisteestä A. Oletetaan, että S näkyy kolmion ABC jokaisesta kolmesta kärjestä. Todista, että joukko S näkyy jokaisesta muustakin kolmion ABC pisteestä.

Peruskoulukilpailun tehtävien ratkaisuja

Osa 1

1. Tehtävän ehtojen mukaan luku on $x = 100 + y$, $1 \leq y \leq 99$. Koska $x > 100$ ja x on pienempi kuin x pyöristettynä satoihin, x pyöristettynä satoihin on 200 ja x pyöristettynä kymmeniin on 180. Suurin nämä pyöristysehdot toteuttava luku on 184.

2. Koska $2A = A$ tai $2A = A + 10$ ja $0 \leq A \leq 9$, on oltava $A = 0$. Huomataan seuraavaksi, että $2S = 10 \cdot M + A = 10 \cdot M$ tai $2S + 1 = 10 \cdot M$. Jälkimmäinen vaihtoehto merkitsee parittoman ja parillisen luvun yhtäsuuruutta, eikä siis ole mahdollinen. Koska $S \neq A = 0$, on oltava $M = 1$, $S = 5$. Nyt $M + K = 1 + K = 5$ ($1 + K = 15$ ei ole mahdollista, koska $K \leq 9$). Siis $K = 4$ ja $2 \cdot I = 4$ ja $I = 2$. (Edellä todettiin jo, että ei voi olla $2 \cdot I = 10 + K$.)

3. Tasakylkisillä kolmioilla on yhteinen kantakulma $\angle ABC$. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoisia ja vastinsivujen suhde on $9 : 6 = 3 : 2$. Pienemmän kolmion kantasivu DB on siis $\frac{2}{3}$ isomman kolmion kantasivusta $CB = 6$, eli $DB = 4$.

4. Myös A ja C ovat erään kuution sivutahkon vastakkaiset kärjet. AB, BC ja CA ovat siis kaikki kuution sivutahkon lävistäjinä yhtä pitkät. Kolmio ABC on tasasivuinen kolmio, joten $\angle ABC = 60°$.

5. Koska $2^4 = 16$ ja kahden kuutoseen päättyvän luvun tulo päättyy aina kuutoseen, $2^{2008} = (2^4)^{502}$ päättyy kuutoseen. Koska $4 \cdot 6$ päättyy neloseen, myös $2^{2010} = 4 \cdot 2^{2008}$ päättyy neloseen.

6. Kysytyn luvun x on toteutettava yhtälö $x^2 = 2x^3$. Koska $x \neq 0$, yhtälö on sama kuin $1 = 2x$. Luku voi olla vain $x = \frac{1}{2}$. Luku $\frac{1}{2}$ ilmeisesti toteuttaa ehdon.

7. "Kahden välein" tarkoittaa, että peräkkäiset luvut valitaan niin, että niiden erotus on kaksi. Tulo on siis $(x - 4)(x - 2)x(x + 2)$. On luonnollista etsiä pienintä arvoa negatiivisten lukujen joukosta. Tulo on negatiivinen, kun siinä on yksi tai kolme negatiivista tekijää. Yksi negatiivinen tekijä on silloin, kun $x-4 < 0 < x-2$ eli kun $x = 3$. Tulon arvo on silloin -15. Kolme negatiivista tekijää on silloin, kun $x = -1$. Tulon arvo on silloinkin -15.

8. Olkoot pikkusuunnikkaiden sivun AB suuntaisten sivujen pituudet a, b ja c ja sivun BC suuntaisten sivujen pituudet d, e ja f. Silloin $2(a+b+c+d+e+f) = 25$, $2(a+e) = 13$, $2(b+d) = 6$, $2(c+e) = 5$ ja $2(b+f) = 8$. Nyt $2(a + b + c + d + e + f) - 2(a + e) - 2(b + d) - 2(c + e) - 2(b + f) = -2(b + e)$, joten kysytty piiri on $2(b + e) = 13 + 6 + 5 + 8 - 25 = 32 - 25 = 7$.

9. Lasketaan:

$$\frac{200^9}{20^{10}} = \frac{2^9 \cdot 10^{18}}{2^{10} \cdot 10^10} = \frac{10^8}{2} = 5 \cdot 10^7.$$

Edellinen luku on suurempi, 50000000-kertainen.

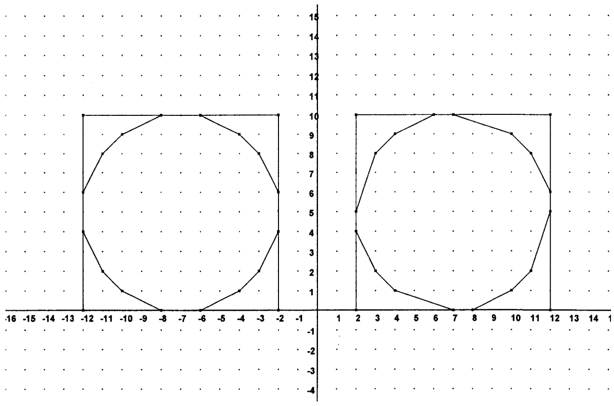
10. Jokaiseen yhdeksästä janasta liittyy kolme leikkauspistettä, joten leikkauspisteitä on 27. Nyt kuitenkin sama leikkauspiste lasketaan ainakin kahdesti. Jos jokaisen leikkauspisteen kautta kulkee janoista tasan kaksi, tulee jokainen leikkauspiste lasketuksi tasan kahdesti. Jos leikkauspisteitä on a kappaletta, saadaan $2a = 27$, mikä on mahdotonta, kun a on kokonaisluku. Oletetaan sitten, että joidenkin leikkauspisteiden kautta kulkee kolme janaa. Tällainen leikkauspiste tulee lasketuksi kuudesti. (Janapareja on 3, ja piste tulee lasketuksi parin kummankin osapuolen mukana) Jos tällaisia leikkauspisteitä on b kappaletta, mutta minkään pisteen kautta ei kulje neljää janaa, saadaan yhtälö $2a + 6b = 27$, mikä on edelleen mahdoton parillisuustarkastelun vuoksi. Jos taas jonkin pisteen kautta kulkee 4 janaa, tulee tämä piste lasketuksi 12 kertaa. Saadaan yhtälö $2a + 6b + 12c = 27$, joka on edelleen parillisuustarkastelun vuoksi mahdoton.

Osa 2

1. Olkoon neliö $ABCD$. Lävistäjä jakaa neliön kahdeksi yhteneväksi kolmioksi. Tämän lisäksi jaossa voi syntyä yhteneviä nelikulmioita. Kohdissa a), b) ja c) tällaisen nelikulmion kaksi vierekkäistä kärkeä ovat nelikulmion jakavan janan päätepisteet vastakkaisilla neliön sivuilla. Voidaan olettaa, että nämä sivut ovat AB ja CD ja että AB-sivulla oleva kärki on lähempänä tai yhtä kaukana pisteestä A kuin pisteestä B. Mahdollisia valintoja on a)-kohdassa 1, b)-kohdassa 2 ja c)-kohdassa $\dfrac{n-1}{2}$, kun $n-1$ on parillinen, ja $\dfrac{n-2}{2}$, kun $n-1$ on pariton. Kohdissa a), b) ja c) yhteneviä kuvioita voi siis olla 2, 3 tai n:n parittomuuden tai parillisuuden mukaan $\dfrac{n+1}{2}$ tai $\dfrac{n}{2}$. Suorakaiteen tapauksessa vastaava tarkastelu on tehtävä molempien sivuparien suhteen. Yhtenevien kuvioiden lukumäärä on $\dfrac{m+n}{2}$, jos m ja n ovat molemmat parittomia, $\dfrac{m+n-2}{2}$, jos m ja n ovat molemmat parillisia, ja $\dfrac{m+n-1}{2}$, jos luvuista m ja n tasan toinen on pariton.

2. Kun $n = 3$, neliön sisällä on 4 hilapistettä. Murtoviiva saadaan tehtävän ehtojen mukaan kulkemaan näistä jokaisen kautta. Kun $n = 4$, neliön sisällä on 9 A:n pistettä. Murtoviiva voidaan nytkin piirtää jokaisen pisteen kautta, mutta neliön keskipiste ei ole murtoviivan aito kärki. (Osien tulee olla joko symmetriset neliön keskipisteen suhteen tai symmetriset keskipisteen kautta kulkevan suoran suhteen; kummassakaan tapauksessa keskipiste ei voi olla murtoviivan aito kärki.)

3. Jos ensimmäisen jakoviivan päätepisteet ovat A ja B ja toisen jakoviivan päätepisteet C ja D, niin syntyneiden kolmen monikulmion kärkinä ovat alkuperäisen monikulmion kärjet ja kukin pisteistä A, B, C ja D kahdesti. Jos jokin näistä jakopisteistä osuu alkuperäisen monikulmion kärkeen, alkuperäisen monikulmion kärkimäärää vähennetään. Näin ollen n-kulmiosta syntyvien kolmen monikulmion kärkimäärä on ainakin $n+4$ ja enintään $n+8$. Nelikulmion tapauksessa pisteistä A, B, C ja D enintään kolme voi olla nelikulmion kärkiä, joten a-kohdan vastaus on 9, 10, 11 tai 12. Seuraavasta tehtävästä ilmenee, että suurin mahdollinen n on 16 ja että tällöinkin pisteet A, B, C ja D voidaan valita niin, että niistä yksikään ei ole alkuperäisen 16-kulmion kärki. d-kohdan vastaus on siis $n+8$.



4. Selvästi ainakin oheisen kuvion mukaiset 16-kulmiot voidaan muodostaa. Laskemalla monikulmion ulkopuoliset neliöt ja kolmiot nähdään helposti, että vasemmanpuoleisen ala on 76 ja oikeanpuoleisen 78. – Sen täsmällinen todistaminen, että vaaditun n-kulmion piirtäminen ei ole mahdollista, kun $n > 16$, vaikuttaa haastavalta ongelmalta. Solmu palaa asiaan. Lähettäkää ehdotuksianne!

Osa 3

1. Koska $198 = 9 \cdot 22 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$, z on kokonaisluku täsmälleen silloin, kun pariton luku $4n+3 \geq 7$ on jokin luvuista 9, 11, 33, 99. Näistä luvuista vain 11 ja 99 ovat muotoa $4n+3$, n:n arvoilla 2 ja 24.

2. Koska

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

tulossa jokaisen termin osoittajan tulon tekijät supistavat viereisten tekijöiden nimittäjästä yhden tekijän. Ensimmäisen tekijän nimittäjän kakkosista vain toinen supistuu, samoin viimeisen termin nimittäjästä vain toinen 2010. Viimeisen termin $k+1$ eli 2011 jää myös supistumatta. Se on siis x.

3. a) Särmiä on $4 \cdot 3 = 12$: kunkin leikkauskuvion kolme särmää. Alkuperäiset särmät leikkautuvat kokonaan pois. b) Tahkoja on kahdeksan: alkuperäisistä neljästä tahkosta jää jokaisesta keskiosaan kolmio ja leikkauskuvioista tulee neljä lisää. c) Jokainen pois leikattu tetraedri on säännöllinen, ja näiden tetraedrien särmät ovat puolet alkuperäisestä. Kukin pois leikattu tetraedri on siten tilavuudeltaan kahdeksasosa alkuperäisestä. Kun pois leikattuja tetraedreja on neljä, poistetuksi tulee tasan puolet tilavuudesta, ja toinen puoli jää jäljelle.

4. a) Räjähde on planeetan pinnassa, kun $z = 10000 - 100t = 0$ eli kun $t = 100$. b) x vähenee ja y kasvaa samalla nopeudella, joten räjähde liikkuu lounaaseen. c) Kun $t = 100$, niin $x = 15000 - 200 \cdot 100 = -5000$ ja $y = 20000 + 200 \cdot 100 = 40000$. Räjähdyspiste on origosta 5 km etelään ja 40 km länteen. Pythagoraan lauseen perusteella pisteen etäisyys origosta on kilometreinä $\sqrt{5^2+40^2} = \sqrt{1625} \approx 40{,}3$.

5. Sanat jakautuvat kahdeksi osaksi; osien esiintymisestä yhdessä voi muodostaa seuraavan taulukon:

	buzi	geni	to	tu
ji			×	×
ki	×			
m	×	×		×

Sanojen suomalaisissa vastineissa esiintyy neljä objektia, ’vieras’, ’vuohi’, ’joki’ ja ’ihminen’, ja näillä määreet ’suuri’, ’pieni’ ja ’määreetön’ eli neutraali. Näiden yhdistelmät voidaan myös taulukoida:

	vieras	vuohi	joki	ihminen
pieni		×		
neutraali	×	×		×
suuri			×	×

Kun taulukoita verrataan, huomataan, että m vastaa riviä ’neutraali’, jolloin **geni** on ’vieras’, **ki** ’pieni’, **buzi** ’vuohi’, **to** ’joki’ ja **tu** ’ihminen’. Ja viimein **ji** ’suuri’.

Lukiokilpailun tehtävien ratkaisuja

1. Olkoon ABC suorakulmainen kolmio ja $\angle ABC$ suora kulma, $BC = a$, $CA = b$ ja $AB = c$. Olkoot D, E ja F sivujen BC, CA ja AB keskipisteet. Olkoot vielä keskijanat $AD = m_a$, $BE = m_b$ ja $CF = m_c$.

1. ratkaisu. Kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävä jana on kolmion kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaan puolet siitä. Siis $ED \| AB$ ja $ED = \frac{1}{2}AB$. Siis kolmio BDE on suorakulmainen. Pythagoraan lauseen perusteella saadaan suorakulmaisista kolmioista ABD, FBC ja BDE

$$m_a^2 = AD^2 = AB^2 + BD^2 = c^2 + \frac{1}{4}a^2,$$

$$m_c^2 = CF^2 = BC^2 + BF^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2,$$

$$m_b^2 = BD^2 + DE^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2.$$

Siis $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{2}(a^2 + c^2) = \frac{3}{4}(2a^2 + 2c^2) = \frac{3}{4}(a^2 + c^2 + b^2)$; viimeinen yhtälö perustuu Pythagoraan lauseeseen sovellettuna kolmioon ABC.

2. ratkaisu. Tunnetun (ja Pythagoraan lauseen nojalla helposti todistettavan) *suunnikaslauseen* mukaan suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa. Kolmio ABC voidaan kolmella eri tavalla täydentää suunnikkaaksi: sivut a ja b, lävistäjät c ja $2m_c$; sivut b ja c, lävistäjät a ja $2m_a$; sivut c ja a, lävistäjät b ja $2m_b$. Näihin kolmeen suunnikkaaseen sovelletaan kuhunkin suunnikaslausetta. Siis $c^2 + 4m_c^2 = 2(a^2 + b^2)$, $a^2 + 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2)$ ja $b^2 + 4m_b^2 = 2(a^2 + b^2)$. Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen ja ratkaistaan $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$, saadaan heti väite. Oletusta kolmion ABC suorakulmaisuudesta ei tarvita. – Olennaisesti suunnikaslauseesta on kysymys myös silloin, kun käytetään tunnettua ja kaavakokoelmistakin löytyvää kolmion keskijanan pituuden lauseketta $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$. Johdutaan samoihin yhtälöihin kuin yllä.

3. ratkaisu. Olkoon $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Kosinilause sovellettuna kolmioihin ADC, BEA ja CFB antaa $m_a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab\cos\gamma$, $m_b^2 = c^2 + \frac{1}{4}b^2 - bc\cos\alpha$ ja $m_c^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2 - ac\cos\beta$ Toisaalta kosinilause sovellettuna kolmion ABC antaa yhtälöt $2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$, $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$ ja $2ac\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2$. Kun jälkimmäisistä yhtälöistä sijoitetaan kosinitermit edellisiin ja lasketaan yhtälöt yhteen, saadaan väite.

2. Jos luvun n alkutekijähajotelma on $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, niin n:n tekijöiden määrä on $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)\cdots(a_k + 1)$. Kun $m < n$, niin jokainen $m!$:n tekijä on $n!$:n tekijä, mutta $n!$:lla on tekijöitä, jotka eivät ole $m!$:n tekijöitä (esimerkiksi $n!$). $d(n!)$ on siis n:n aidosti kasvava funktio. Kokeillaan: 16!:ssa on tekijänä $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ kakkosta, $5 + 1 = 6$ kolmosta ja 3 viitosta ja 2 seitsemää, 11 ja 13. Tekijöitä siis $16 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 \cdot 21 = 21 \cdot 256 > 5000$, 15!:ssa kakkosia vain 11; tekijöiden lukumaarä $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ kertaa 16!:n tekijöiden lukumäärä, mutta siis yli 3000, 14!:ssa viitoset ja kolmoset vähenevät yhdellä, siis tekijöitä $12 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60 \cdot 36 = 2160 > 2010$. Kun mennään 13!:aan, seitsemäisiä on yksi vähemmän, joten tekijämäärän ilmaisevassa tulossa ainakin yksi 3 muuttuu kahdeksi, ja tulo putoaa alle 2000:n. Vastaus on siis $n = 14$.

3. Jos $P(x_0) = 0$, niin $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. Jos erityisesti P:n kertoimet ovat kokonaislukuja ja x_0 on kokonaisluku, niin Q:kin on kokonaislukukertoiminen. [Todistus: Jos $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ ja $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$, niin $a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - x_0b_{n-1}$, $a_{n-2} = b_{n-3} - x_0b_{n-2}$, $\ldots$, $a_1 = b_0 - x_0b_1$. Kun näistä yhtälöistä ratkaistaan järjestyksessä b_{n-1}, b_{n-2}, $\ldots$, b_0, nähdään, että kaikki ovat kokonaislukuja.] Tämän perustuloksen mukaan tehtävän polynomi voidaan kirjoittaa muotoon $P(x) = (x-1997)(x-2010)Q(x)$, missä Q on kokonaislukukertoiminen polynomi. Siis erityisesti $|P(2005)| = |2005 - 1997| \cdot |2005 - 2010| \cdot |Q(2005)| = 40|Q(2005)|$. $Q(2005)$ on kokonaisluku. Jos olisi $Q(2005) \neq 0$, olisi $|P(2005)| \geq 40 > 10$, vastoin oletusta. Siis $Q(2005) = 0$ ja $P(2005) = 0$.

4. Numeroidaan joukkueet numeroin 1, 2, $\ldots$, n. Tarkastellaan kierrosta i, $1 \leq i \leq n - 1$, ja joukkuetta x, $x < n$. Asetetaan joukkueen x vastustajaksi se joukkue y, jolle $x + y + i$ on jaollinen luvulla $n - 1$ ja $1 \leq y < n$. Jos $x + x + i = 2x + i$ on jaollinen $n - 1$:llä, asetetaan x:n vastustajaksi joukkue n. On osoitettava, että kaikki joukkueet pelaavat joka kierroksella ja että jokainen joukkue tulee pelanneeksi jokaista muuta vastaan. Todetaan ensin, että joukkue n pelaa joka kierroksella. Jos luvuilla $2x_1 + i$ ja $2x_2 + i$ on sama jakojäännös $(n-1)$:llä jaettaessa, olisi $2(x_1 - x_2)$ parittoman luvun $n - 1$ monikerta, mutta koska $|x_1 - x_2| < (n-1) - 1 < n - 1$, on $x_1 = x_2$. Jakojäännökset ovat eri lukuja, niitä on $n - 1$ kappaletta ja ne ovat välin $[0, n - 2]$ kokonaislukuja, joten tasan yksi niistä on 0. n saa aina vastustajan. Samoin osoitetaan, että jos $2x + i$ ei ole jaollinen $n - 1$:llä, on tasan yksi $y \neq x$, jolle $x + y + i$ on $n - 1$:n monikerta. Näin ollen jokaisella joukkueella on vastustaja kierroksella i, ja jos x saa vastustajakseen y:n, niin y saa vastustajakseen x:n. On vielä osoitettava, että jokaiset kaksi joukkuetta tulevat pelaamaan. Jos $x \neq y$, niin lukujen $x + y + 1$, $x + y + 2$, $\ldots$, $x + y + (n-1)$ jakojäännökset $n - 1$:llä jaettaessa ovat eri lukuja (todistus samoin kuin edellä); tasan yksi niistä, sanokaamme luvun $x + y + i$ jakojäännös, on nolla. x ja y pelaavat siis keskenään kierroksella i ja vain kierroksella i. Lisäksi luvuista $2x + 1$, $2x + 2$, $\ldots$, $2x + (n-1)$ tasan yksi, esimerkiksi $2x + i$, on $n - 1$:n monikerta. x ja n pelaavat siis kierroksella i.

5. Osoitetaan ensin, että jos joukko S näkyy pisteistä P ja Q, niin jana PQ sisältyy joukkoon S ja S näkyy jokaisesta janan PQ pisteestä. Näkymisen määritelmästä seuraa, että pisteet P ja Q kuuluvat joukkoon S. Koska Q näkyy P:stä, niin jana PQ sisältyy joukkoon S. Olkoon nyt X mielivaltainen janan PQ piste ja Y mielivaltainen joukon S piste. Silloin janat PY ja QY sisältyvät joukkoon S. Jos Y on suoralla PQ ja janan PQ ulkopuolella, niin jana XY sisältyy joko janaan PY tai janaan QY, jotka puolestaan sisältyvät joukkoon S. Oletetaan, että PQY on (aito) kolmio, mutta janalla XY on piste Z, joka ei kuulu joukkoon S. Puolisuora PZ leikkaa janan QY pisteessä T. Koska T on S:n piste, se näkyy pisteestä P, joten Z onkin joukon S piste. Ristiriita osoittaa, että Y näkyy pisteestä X. Oletuksen mukaan S:n jokainen piste näkyy pisteistä A, B ja C. Edellä sanotun perusteella kolmion sivut AB, BC ja CA sisältyvät joukkoon S ja S näkyy jokaisesta näiden janojen pisteestä. Mielivaltainen kolmion ABC piste X on (usealla) sellaisella janalla, jonka päätepisteet ovat kolmion sivuilla. Edellä osoitetun mukaan S:n jokainen piste näkyy siis myös pisteestä X.