Pitkän matematiikan opetussuunnitelmasta

Yleistä

Matematiikassa uuden asian oppiminen rakentuu aiemmin opitun varaan, ja siksi opetussuunnitelmia laadittaessa opetuksen sisällöt peruskoulun alusta lukion loppuun asti on mietittävä kouluasteittain siten, että ne muodostavat saumattoman kokonaisuuden. Opettajia tulee myös valistaa koko oppimäärän sisällöstä ja siitä, miten kunkin opettama osa liittyy tähän kokonaisuuteen.

Joskus kuulee jopa opettajan väittävän, ettei laskimien ansiosta tarvitse enää opetella yhteen-, vähennys- ja kertolaskua "allekkain" eikä jakokulmassa jakamista. Tämä käsitys on täysin väärä. Näita menetelmiä ei enää opetella siksi, että niitä jouduttaisiin käyttämään arjessa. Niiden kautta sisäistetään kymmenjärjestelmä sekä peruslaskutoimitusten syvin olemus kuten se, että jakolaskussa koko jaettava jaetaan ja jakajana toimii koko jakaja eikä vain sen osa. Ne luovat pohjaa myöhemmin opittavalle polynomilaskennalle, ja niiden ymmärtäminen on siksi aivan välttämätöntä. Ne kehittävät myös päässälaskutaitoa, jota aina tarvitaan.

Laskutoimitusten oppiminen alkaa luonnollisesti esimerkiksi leikkirahoilla. Abstraktiin laskemiseen päästään vasta kun on varmistettu, että muistinumerot ja lainaukset on ymmärretty konkreettisissa rahaoperaatioissa. Luokkatasoilla viisi ja kuusi murtolukujen laskutoimitukset ovat oppilaiden jatko-opiskelun kannalta kaikkein tärkeimpiä asioita, ja niihin on varattava paljon aikaa jättämällä vaikka hehtolitrat ja dekametrit vähemmälle. Murtolukuja ei saa opettaa ulkolukuna, vaan opettajan on havainnollistettava niitä erilaisia kakku-, sauva- tai muita malleja käyttäen. Opetussuunnitelman on *velvoitettava* opettaja havaintovälineiden käyttöön. Oppilas on saatava *ymmärtämään*, miksi kaksi neljäsosaa omenaa on sama kuin puoli omenaa, miksi laventaminen ja supistaminen eivät muuta luvun arvoa, miksi yhteenlaskettavissa murtoluvuissa on oltava sama nimittäjä ja miksi jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla. Erityisen tärkeää on ymmärtää, että murtoluvun ilmoittama osa luvusta saadaan tällä murtoluvulla kertomalla. Siihen perustuu koko prosenttilasku.

Jos tätä konkreettista pohjaa ei ole luotu opintojen alkupuolella, niin peruskoulun ylemmillä luokilla on vaikeuksia esimerkiksi yhtälön $ax = b$ ratkaisemisessa ja lukiovaiheessa on aika toivotonta yrittää oppia rationaalilausekkeiden käsittelyä, derivaatan käsitettä ja yleensä mitään muutakaan matematiikkaan liittyvää.

Luokanopettajalla saattaa olla matematiikasta niin pinnallinen käsitys, että hän ei katso mielekkääksi järjestää opetusta ylläkuvatulla tavalla havaintomateriaaleja käyttäen. Siksi on tarpeen, että viidenneltä luokalta tai mieluummin jo kolmannelta luokalta alkaen matematiikkaa opettaisi alan koulutuksen saanut aineenopettaja. Opettaahan englantiakin aineenopettaja kolmannelta luokalta alkaen, vaikka opetus tapahtuu suomeksi. Kun peruskoulun ala- ja yläasteen välinen raja poistettiin, nämä opettajakysymykset jäivät muilta kuin englanninkielen osalta paikallisesti sovittaviksi. MAOLilla on alan pedagogisena etujärjestönä velvollisuus kamppailla matematiikalle samanlainen asema kuin englanninkielellä on. Tämä vaatimus ei ole ammattiyhdistyspolitiikkaa. Sille on pedagogiset perusteet.

Perusasioiden oppimista on nykyisessä peruskoulun opetussuunnitelmassa systemaattisesti myöhäistetty, ja se on vakava pedagoginen virhe. Esimerkiksi binomikaavat

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{ja} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

opittiin vielä 1980-luvun alussa peruskoulun seitsemännen luokan laajalla tasokurssilla ja nyt vasta lukion pitkän matematiikan toisella kurssilla. Rationaalilausekkeiden peruslaskutoimitukset opittiin ennen keskikoulun viimeisellä luokalla (ks. liite 1) ja nyt lukion kakkosella derivaattakurssin alussa!

Ehkä kaikkein suurin virhe on tehty geometrian opetuksessa. Keskikoulussa geometria aloitettiin kuvailevana kolmannella luokalla, deduktiiviseen ajatteluun perehdyttiin neljännellä luokalla, eli ajatus matemaattisten väittämien todistamisesta pantiin itämään, ja sitten viidennellä luokalla jo *todistettiin*, että esimerkiksi kolmion korkeussuorat leikkaavat samassa pisteessä! Nykyisen opetussuunnitelman mukaan kaikki tämä ja se, mikä oppikoulun geometriaan sisältyi lukiovaiheessa, opetetaan lukion geometrian kurssilla kuudessa viikossa. On selvää, että oppiminen jää pinnalliseksi.

Lukion pitkän matematiikan ops

Lukiomatematiikan opiskeluun valmentavia valinnaisia kursseja ei saatane peruskouluun lähivuosina, joten on mietittävä, miten lukion nykyistä pitkän matematiikan opetussuunnitelmaa voitaisiin kehittää toimivammaksi. Oppimista pyritään myöhäistämään lukionkin nykyisessä opetussuunnitelmassa. Esimerkiksi se ei tunne ollenkaan rationaalilausekkeiden peruslaskutoimitusten oppimista mutta vaatii, että derivaatta-kurssin alussa opitaan käsittelemään rationaaliyhtälöitä ja epäyhtälöitä. Luonnollisesti vastuullinen opettaja opettaa aluksi laventamiset, supistamiset, määrittelyehdot ja peruslaskutoimitukset, minkä jälkeen katsotaan yhtälöt ja epäyhtälöt. Tähän kaikkeen on käytettävissä ehkä 8 oppituntia, minkä jälkeen taitoja ryhdytään soveltamaan raja-arvojen ja erotusosamäärien laskemisessa. Ennen rationaalilausekkeiden peruslaskutoimitukset opittiin keskikoulun viimeisellä luokalla ja rationaaliyhtälöt ja -epäyhtälöt viimeistään lukion ensimmäisellä luokalla. Differentiaalilaskenta aloitettiin lukion toisella luokalla. Näin saatiin aikaa asioiden omakohtaiseen työstämiseen esimerkiksi harjoituskirjojen avulla. Nyt ei oppilaalle jää yhtään aikaa näiden hänelle aivan uusien asioiden sisäistämiseen, vaan niitä tarvitaan välittömästi uuden ja käsitteellisemmän asian yhteydessä. Opetushallituksen virkamiehet varmaan ylpeinä esittelevät tätäkin opetusjärjestelyä kansainvälisille PISA-valtuuskunnille!

Myös kaikki logaritmeihin liittyvä kaatuu oppilasparan niskaan kahdessa viikossa kahdeksannella kurssilla. Jos 10-kantainen logaritmi opittaisiin ensimmäisellä tai toisella kurssilla eksponenttifunktion yhteydessä, niin sen käyttämiseen harjaannuttaisiin ensin koronkorkolaskuissa ja suurien alkulukujen numeroiden määrän laskemisessa sekä myöhemmin todennäköisyyslaskennassa, kun käsitellään toistokokeisiin liittyviä todennäköisyyksiä. Se kerrattaisiin syventävästi kurssilla 8 ottamalla esiin muut logaritmit ja erityisesti luonnollinen logaritmi ennen kuin ryhdytään vakavammin pohtimaan logaritmifunktiota ja sen derivaattaa. Näin saataisiin aikaa käsitteen omaksumiseen.

Seuraavassa on kurssikohtainen ruodinta nykyisistä ongelmista sekä parannusehdotuksia sillä oletuksella, että kurssien keskinäinen järjestys säilyy nykyisenä. Pariin kohtaan on tehty ehdotuksia peruskouluun valinnaiseksi siirrettävistä asiakokonaisuuksista. Jos se ei poliittisista tms. syistä voi tulla kysymykseen, niin sitten asiat on edelleen opetettava uusina lukiossa ja kärsittävä seuraukset, ks. [1] ja [2]. Näiden ehdotusten toteuttaminen ei kuitenkaan poista opetussuunnitelman rakenteellisia heikkouksia, kuten esimerkiksi sitä, että kurssilla 9 koplataan yhteen virkamiesmäisesti ja matematiikan systematiikan vastaisesti kaksi toisistaan melko kaukana olevaa matematiikan alaa, tai sitä, että kurssi 13 antaa vaikutelman sekavasta potpourrista, johon on heitetty kaikki se, mikä on matkan varrella jäänyt käsittelemättä. Tällaisia asioita ei saada kuntoon muuten kuin laatimalla uusi opetussuunnitelma.

Kurssit 1 ja 2
Vaikka pitkän matematiikan kurssit 1 ja 2 tulisivat hieman nykyistä raskaammiksi, olisi niihin sisällytettävä seuraavat asiat:

- lukualueet,
- reaalilukujen laskulait ja niiden seurauksina binomisäännöt,
- itseisarvon määritelmä ja tyyppiä $|x-a|=r$, $|x-a|<r$ ja $|x-a|>r$ olevat yhtälöt ja epäyhtälöt,
- rationaalilukujen peruslaskutoimitukset (sisältäen %-laskennan),
- potenssisäännöt (kokonaislukueksponentit),
- juurioppi,
- potenssisääntöjen yleistäminen (rationaali- ja irrationaalieksponentit),
- polynomien laskutoimitukset (myös jakoalgoritmi 1-asteen jakajalla),
- funktion määritelmä, polynomifunktiot,
- polynomiyhtälöt ja -epäyhtälöt yksinkertaisissa tapauksissa,
- lineaariset yhtälöparit,
- polynomien jaollisuuden ja nollakohtien välinen yhteys,
- peruslaskutoimitukset yksinkertaisilla rationaalilausekkeilla sekä niitä sisältävät yhtälöt ja epäyhtälöt,
- eksponenttifunktio ja sen avulla logaritmin (10-kantainen) määritelmä ja laskusäännöt,
- eksponenttiyhtälöt ja -epäyhtälöt.

Osa listalla olevista asioista opiskellaan alustavasti myös peruskoulussa. Jos opiskelu voitaisiin siellä suorittaa eriytettynä, niin pitkän matematiikan valitsijoiden lähtötaso olisi nykyistä parempi, eikä näitä kursseja koettaisi raskaiksi. Näillä sisällöillä oppilas saisi nykyistä realistisemman kuvan lukion pitkän oppimäärän vaatimasta työstä ja välineitä myöhemmin esiin tulevien käsitteellisempien asioiden opiskeluun.

Ylläolevasta listasta pitäisi peruskoulussa eriyttävästi käsitellä ainakin

- potenssisäännöt ja neliöjuuri,
- polynomien yhteen-, vähennys- ja kertolasku,
- binomisäännöt,
- peruslaskutoimitukset erittäin yksinkertaisilla rationaalilausekkeilla,
- itseisarvon määritelmä ja aivan perimmäiset ominaisuudet,
- lineaariset ja niiksi sieventyvät yhtälöt sekä lineaariset yhtälöparit.

Kurssi 3
Nykyinen lukion geometrian oppimäärä siis opiskellaan noin kuudessa viikossa, kun samaan asiaan vanhan oppikoulun aikana käytettiin monta vuotta. Koska geometriaa ilmeisesti kuitenkin on tarkoitus oppia, jää miltei ainoaksi vaihtoehdoksi peruskoulun geometrian opetuksen terästäminen. Kolmoskurssi ei olisi liian raskas, ellei sen opiskelua täytyisi aloittaa nollapisteestä. Palautettakoon siis osa geometriasta peruskouluun. Deduktiotakin voitaisiin käsitellä peruskoulussa nk. kvasiaksiomaattisella menetelmällä, ks. [5], luku 7. Tavallisimpien pinta-alojen ja tilavuuksien sekä geometrisen piirtämisen lisäksi peruskoulussa pitäisi käsitellä eriyttävästi (deduktiivisesti, ei mittailemalla) ainakin

- kolmion kulmien summa,
- Pythagoraan lause,
- kolmioiden yhtenevyys ja yksinkertaisia seurauksia,
- kolmion sivujen ja kulmien suuruussuhteet,
- ympyrän kehä- ja keskuskulmien välinen yhteys,
- ympyrän tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman välinen yhteys,
- kolmion nk. merkilliset pisteet keskijanojen leikkauspistettä lukuunottamatta,
- verrannot ja yhdenmuotoisuus lyhyesti,

- suorakulmaisen kolmion trigonometriaa.

Tämä kokonaisuus voitaisiin helposti opettaa valinnaisilla kursseilla peruskoulun kahdeksannella ja yhdeksännellä luokalla. Lukion kurssi voisi tällöin alkaa lyhyellä kertauksella ja kurssi jatkuisi niin, että nämä peruskoulun asiat sekä lukion kurssi yhdessä kattaisivat nykyisen lukion kurssin. Tosin trigonometriassa olisi asiallista määritellä suunnattu kulma ja sen trigonometriset funktiot yksikköympyrän avulla. Samalla voidaan todistaa sinin ja kosinin neliöiden summakaava ja määritellä kulman tangentti sinin ja kosinin suhteeksi.

Kurssi 4

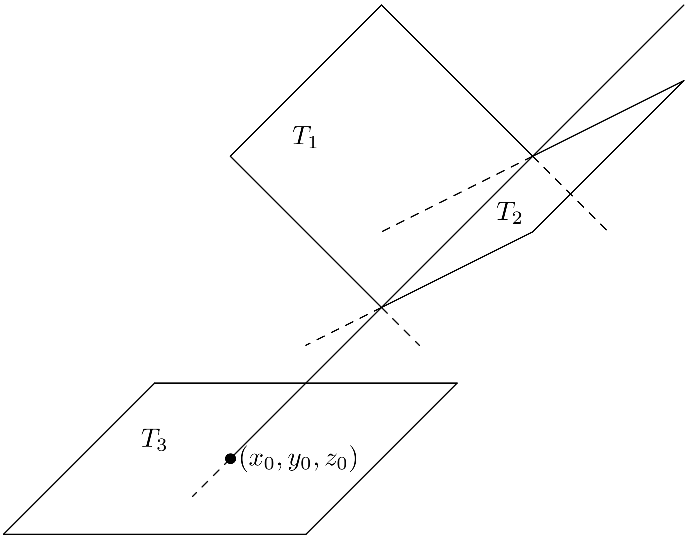
Itseisarvoyhtälöt ja epäyhtälöt käsitellään tällä kurssilla, koska ne eivät muuallekaan mahdu. Analyyttisen geometrian kurssin erääksi keskeiseksi asiaksi nykyinen opetussuunnitelma mainitsee myös yhtälöryhmien ratkaisemisen. Tällä kurssilla ratkaisua on vaikea tulkita geometrisesti, joten yhtälöryhmät on syytä siirtää vektoriopin yhteyteen, ks. kurssia 5 koskevat kommentit. Toisen asteen käyrien yhteydessä mahdollisesti esiintulevat yhtälöryhmät ovat yleensä niin helppoja, että ne ratkeavat soveltamalla luovasti ykköskurssilla opittuja asioita. Yhtälöryhmistä säästyvän ajan voi käyttää ellipsien ja hyperbelien "perustapausten" käsittelyyn. Tällä vaatimuksella on myös sivistyksellinen peruste: kolmikko Apollonius-Kepler-Newton on vaikuttanut länsimaisen ihmisen maailmankuvaan melko paljon! Kartioleikkausten yleinen yhtälö sekä käyrien $y = x^2$, $xy = 1$ ja $x^2 + y^2 = r^2$ tangenttien johtaminen sekanttia kiertämällä voi olla kurssin syventävänä asiana. Tämä vahvistaisi rationaalilausekkeiden käsittelytaitoa ja olisi ensimmäinen askel differentiaalilaskennan suuntaan. Myös kahden muuttujan funktion lineaarinen optimointi olisi syytä ottaa pakolliseen oppimäärään, sillä sen yhteydessä on mahdollista hieman valottaa matematiikan todellista soveltamista käytännön ongelmiin. Suorien välisen kulman laskeminen voidaan siirtää vektoriopin puolelle suunta- tai normaalivektorien avulla laskettavaksi. Pisteen etäisyys suorasta voidaan antaa kaavana ja todistaa vasta vektorikurssilla.

Kurssi 5

Kun vektorit ja avaruuden suorat sekä tasot on käsitelty, voidaan lähestyä lineaarisia yhtälöryhmiä

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{cases}$$

Ilman vektorioppia on vaikeaa tajuta, että nämä yhtälöt esittävät $\mathbb{R}^3$:n tasoja, mutta vektorien avulla se ymmärretään välittömästi. Yhtälöryhmä ratkaistaan aluksi geometrisesti määrittämällä ensin kahden tason leikkaussuora ja sitten sen ja kolmannen tason leikkauspiste. Kun tämän jälkeen eliminoidaan vaikkapa z ja saadaan x:n ja y:n välinen yhtälöpari, niin oppilaat voi panna miettimään, mitä tuossa manipulaatiossa geometrisesti tapahtuu. Tällainen lähestymistapa antaa aiheesta syvällisemmän kuvan ja on mielenkiintoisempi kuin tylsä laskeminen, jonka konekin voi tehdä.



Jatko-opinnoissa näitä asioita käsitellään usein n-ulotteisina. Tällöin kaksi- ja kolmiulotteisista tapauksista opittu geometrinen näkemys ja intuitio kuitenkin helpottavat ymmärtämistä. Siksi opiskelun alkuvaiheessa kannattaa painottaa geometrista lähestymistapaa. Vektori- ja skalaarikolmitulo sekä fysiikan sovellukset (voiman momentti yms.) sopivat kurssiin syventäviksi aiheiksi.

Kursseja 4 ja 5 koskeva huomautus

Uutta opetussuunnitelmaa tehtäessä on syytä harkita nykyisten neljännen ja viidennen kurssin järjestyksen vaihtamista. Neloskurssin sisällöstä melkein puolet käsittelee xy-tason suoria, ja miltei kaikki oleellinen on niistä jo sanottu kursseilla 1 ja 2. Myös yläasteella on tutkittu kulmakertoimen vaikutusta suoran suuntaan. Kannattaako siis opettaa suoran yhtälö kolmanteen kertaan samalla tavalla? Oppilaillekin on mielenkiintoisempaa lähestyä tätä asiakokonaisuutta uudesta näkökulmasta. Opiskellaan aluksi vektorilaskenta, ja analyyttinen geometria aloitetaan suoran vektoriyhtälöllä, josta ennestään tutut asiat saadaan helposti johdetuiksi. Yhtälö $ax + by + c = 0$ saadaan tarkastelemalla pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevaa suoraa, jonka normaalivektori on $\bar{n} = (a, b)$. Samoin voidaan johtaa tason yhtälö. Kaikki perusasiat saadaan tällä tavalla johdetuiksi helposti ja kauniisti, ja lisäksi vektorit niveltyvät tärkeäksi osaksi lukion oppimäärää. Nykyisellään vektorioppi jää muusta oppimäärästä hieman irralliseksi.

Kurssi 6
Kun todennäköisyyslaskenta opetellaan ennen integraalilaskentaa, ei ole mielekästä puhua jatkuvista satunnaismuuttujista. Käsiteltäköön kombinatoriikkaa ja diskreettejä muuttujia sitäkin perusteellisemmin, mikä luo vahvan pohjan jatkuvien tapausten käsittelyyn integraalilaskennan yhteydessä. Jakaumia käsiteltäessä on havainnollista käyttää todennäköisyyden massatulkintaa ja rinnastaa odotusarvo ja varianssi vastaaviin mekaniikan käsitteisiin; näin saataisiin synergiaetua. Myös onnettoman pieni tilastomatematiikan osuus voidaan jättää kokonaan pois opetussuunnitelmasta joten kuutoskurssin nimeksi riittää *Todennäköisyyslaskenta*.

Kurssi 7
Rationaalilausekkeita on nyt käsitelty ensimmäisellä ja toisella kurssilla, joten differentiaalilaskenta voidaan aloittaa raja-arvojen ja erotusosamäärien laskemisilla, missä yhteydessä rationaalilausekkeet kertautuvat. Päästään suoraan asiaan ja kiire vähenee. Ensimmäisen ja toisen derivaatan merkitykset mekaniikassa otetaan perusoppiainekseen. Parempi nimi kurssille on *Differentiaalilaskenta*, joka sopii yhteen kurssin 10 nimen *Integraalilaskenta* kanssa.

Kurssi 8
Koska logaritmia ja juuria on nyt käsitelty kurssilla 2, voidaan tälläkin kurssilla siirtyä nopeammin pääasioihin ja käsitellä ne kiireettömästi.

Kurssi 9
Koska suunnattu kulma ja sen trigonometriset funktiot on nyt käsitelty kurssilla 3, voidaan käyttää enemmän aikaa radiaanin opettamisen. Trigonometristen funktioiden määritelmistä seuraa välittömästi (geometriseen havaintoon nojautuen) tiettyjä perusominaisuuksia kuten sinin ja kosinin parittomuus/parillisuus, sekä näiden funktioiden arvot tietyissä kohdissa. Näihin perustuen voidaan tapauksessa $0 < y < x < \pi$ johtaa ([3], teht.110) kosinifunktion vähennyslaskukaava

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

tarkastelemalla pisteiden $(\cos x, \sin x)$ ja $(\cos y, \sin y)$ paikkavektorien välistä kulmaa, minkä jälkeen tämä kaava saadaan yleisessä tapauksessa. Muut yhteen- ja vähennyslaskukaavat seuraavat tästä helposti, ja niistä puolestaan voidaan johtaa kaikki koulumatematiikassa esiin tulevat trigonometrian kaavat. Niiden johtaminen on oppilaille hyvää harjoitusta, eräänlaista deduktiota. Pekka Tuominen [6] on sanonut: ”Koulumatematiikan tärkein tehtävä on osoittaa matematiikan ainutlaatuisuus tieteenä, sen deduktiivinen luonne.” Vaihtoehtoinen tapa johtaa yhteen- ja vähennyslaskukaavat on esitetty liitteessä 2.

Kurssi 10
Opetussuunnitelmassa on oltava sitovana määräyksenä, että integraalilaskennassa käydään selkeästi läpi 1) ympyrän ala, 2) pallon ja pallosegmentin tilavuus, ja 3) pallon ja kalotin pinta-ala. Pallon ja kalotin pinta-alat on helppo perustella Väisälän (ks.[7]) esittämällä tavalla, mikä luultavasti on peräisin itseltään Arkhimedeeltä. Matematiikka ei esiinny edukseen ajattelevan lukiolaisen (niitäkin on) silmissä, ellei noin keskeisiä kaavoja voida jotenkin perustella. Tällä kurssilla tutkitaan myös niitä jatkuvia satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktio on nolla äärellisen välin ulkopuolella, ja määritellään muuttujan odotusarvo ja varianssi analogisesti diskreetin muuttujan kanssa. Epäolennainen integraali voidaan alustavasti ottaa esiin syventävänä oppiaineksena ja uudestaan perusoppiaineksena syventävällä kurssilla 13.

Kurssi 11
Kurssin sisältöön on lisättävä induktio ja suositus, että tämä kurssi suoritettaisiin jo ensimmäisenä lukiovuotena.

Kurssi 12
Algebrallisten menetelmien osassa on täydennettävä polynomien jaollisuustarkasteluja ottamalla käyttöön kompleksiluvut. Numeerisen integroinnin yhteydessä voidaan esitellä myös normaalisti parametrein μ ja σ jakautuneen satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio, ja laskea tyyppiä $\mathrm{P}(a \leq \underline{x} \leq b)$ olevia todennäköisyyksiä. Näin saataisiin viedyksi todennäköisyyslaskentaa askel eteenpäin ja samalla saataisiin mielekästä harjoitusmateriaalia numeeriseen integrointiin. Vaihtoehtona on käsitellä normaalijakauma kurssilla 10 syventävänä ja kurssilla 13 perusoppiaineksena. Niin sanotun muutosnopeuden numeerisen määrittämisen merkitys jää hämäräksi ainakin joitakin lukion oppikirjoja selaillessa. Onko mitään mieltä nappuloida laskimella likiarvoja sellaisista derivaatoista, jotka voidaan laskea tarkasti kynällä? Koko tämä asiakokonaisuus tulisi rakentaa uudelle pohjalle esimerkiksi siten, että erotusosamäärää käyttäen mallinnettaisiin joitakin muuntuvia ilmiöitä diskreetisti. Saatujen mallien avulla voitaisiin sitten tutkia näitä ilmiöitä numeerisesti.

Kurssi 13

Opetussuunnitelman mukaan tällä kurssilla opiskelija ”syventää differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemustaan.” Yhteiskunnan tulisi välttää tällaisia oraakkelimaisia ilmaisuja ja kertoa selkeästi mitä koululaitoksen halutaan lapsille ja nuorille opettavan. Eri oppikirjojen tekijät ovat varsin ”luovasti” tulkinneet näitä ”teoreettisia perusteita”. Kurssin perusoppiainekseen pitäisi kuulua ainakin funktion ja lukujonon raja-arvojen täsmälliset määritelmät sekä yksinkertaisia esimerkkejä niiden soveltamisesta. Tämä saattaa tuntua epärealistiselta, mutta on huomattava, että alkeellisimmassa muodossaan funktion raja-arvon täsmällisen määritelmän soveltaminen ei ole sen kummempi asia kuin epäyhtälön $|f(x) - a| < \varepsilon$ ratkaiseminen, kun f on annettu (riittävän yksinkertainen) funktio, a on annettu luku, ja ε on positiivinen parametri. Tämän tyyppisiä epäyhtälöitä tutkittiin jo ensimmäisellä ja neljännellä kurssilla. Vaikka raja-arvon määritelmä ei tulisikaan täysin ymmärretyksi, tällaiset tarkastelut ovat hyödyllisiä itseisarvoepäyhtälöiden kertauksena.

Syventävänä aineksena kurssi saa sisältää raja-arvojen laskusääntöjen todistuksia ja muutakin yliopistomatematiikkaa (kuten on kirjassa [4]). Tätä aihepiiriä voidaan käsitellä kurssilaisten lähtötasoon, työmotivaatioon ja tavoitteisiin soveltuvassa laajuudessa, ja matematiikan harrastajat voivat opiskella pois jätettyjä kohtia itsenäisesti.

Netissä piin päivänä 2008

Markku Halmetoja lehtori, Mäntän lukio	Matti Lehtinen dosentti, Maanpuolustuskorkeakoulu
Jorma Merikoski dosentti, Tampereen yliopisto	Lauri Pippola rehtori, Lapuan lukio
Maisa Spangar lehtori, Kiimingin lukio	Timo Tossavainen lehtori, dosentti, Joensuun yliopisto

Viitteet

[1] M.Halmetoja, Ei edelleenkään kuninkaantietä matematiikkaan. *Arkhimedes* 5-6/2007, 11.

[2] M.Halmetoja, Matematiikan opiskeluaika palautettava entiseen 5,5 vuoteen. *Helsingin Sanomat* 3.2.2008.

[3] M.Halmetoja, K.Häkkinen *et al.*, *Matematiikan taito 9: Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* WSOY, 2007.

[4] M.Halmetoja, K.Häkkinen *et al.*, *Matematiikan taito 13: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* WSOY, ilmestyy keväällä 2008.

[5] M.Lehtinen, J.Merikoski, T.Tossavainen, *Johdatus tasogeometriaan.* WSOY, 2007.

[6] I. Norros, E. Saksman, E. Valkeila, Pekka Tuominen 1944-2007, *Arkhimedes* 5-6/2007, 4.

[7] K. Väisälä, *Lukion geometria*, WSOY, 1966.

Liite 1: Keskikoulun matematiikkaa

Seuraavassa muutama keskikoulun harjoitustehtävä L. Nevanlinnan Algebran oppikirjasta (WSOY, 1937) (N), K. Väisälän Algebran oppi- ja esimerkkikirja 1:stä (WSOY, 1970) (VA), K. Väisälän Keskikoulun geometriasta (WSOY, 1967) (VG) sekä A. Jauhon, H. Karjalaisen ja A. Markkasen Keskikoulun algebran oppikirjasta (WSOY, 1933) (JKM).

1. Paikasta A ammutaan 500 m etäisyydellä paikassa B olevaan maaliin. A:han kuuluu luodin napsahdus taulua vasten 2,5 s laukaisun jälkeen. B:hen taas kuuluu pamahdus 0,5 s sen jälkeen, kun luoti on napsahtanut taulua vasten. Laskettava luodin ja äänen nopeudet. (VA)

2. Ratkaistava yhtälö

$$\left|\frac{2(x+1)}{x^2-x}-\frac{2x+1}{x^2-1}\right| = \left|\frac{3}{x}-\frac{3x-1}{x^2+x}\right|. \quad \text{(VA)}$$

3. Kuperan nelikulmion kulmien puolittajat muodostavat uuden nelikulmion. Todistettava, että sen ympäri voidaan piirtää ympyrä. (VG)

4. Mies luulee kaivavansa erään ojan 3 päivässä ja hänen poikansa luulee kaivavansa saman ojan 8 päivässä. Kuinka paljon he yhdessä tarvitsevat aikaa sen ojan kaivamiseen? (JKM)

5. Korkkikappaleen ominaispainon määräämiseksi punnittiin se ensiksi, jonka jälkeen siihen kiinnitettiin niin paljon lyijyä, että siten saatu yhdistetty kappale kokonaan veteen upotettuna pysyi tasapainossa (nousematta pinnalle tai vajoamatta pohjaan). Korkkikappale painoi 0,875 g, ja kun punnittiin siihen kiinnitetty lyijy, saatiin sen painoksi 3,087 g. Määrää tämän nojalla korkkikappaleen ominaispaino. (N)

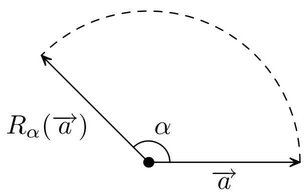
Nämä esimerkit osoittavat, mille tasolle peruskoulussa päästäisiin, jos matematiikan opetus olisi asiallisesti järjestetty ja oikeaa matematiikkaa opetettaisiin valinnaisaineena siitä kiinnostuneille. Toisaalta ne osoittavat myös, mistä matematiikkaa oppimaan kykenevät peruskoululaiset jäävät nykyisin paitsi.

Liite 2: Trigonometriaa

Tutkitaan kuvausta $\mathrm{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

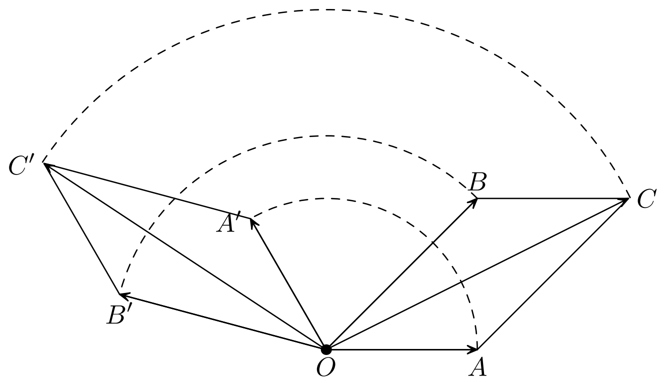
$$\bar{a} \longmapsto \mathrm{R}_\alpha(\bar{a}),$$

joka kiertää vektoria $\bar{a} \neq \bar{0}$ suunnatun kulman α verran kuvion 1 osoittamalla tavalla. Sovitaan erikseen, että $\mathrm{R}_\alpha(\bar{0}) = \bar{0}$.



Kuvio 1.

Kuviosta 2 luettavissa, että vektorien summa kiertyy termeittäin,

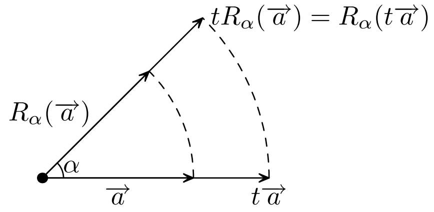


Kuvio 2.

eli

$$\mathrm{R}_\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \mathrm{R}_\alpha(\bar{a}) + \mathrm{R}_\alpha(\bar{b}).$$

Kuviosta 3. ilmenee, että kierron ja venytyksen järjestys voidaan vaihtaa, eli jos $t \in \mathbb{R}$, niin $\mathrm{R}_\alpha(t\bar{a}) = t\mathrm{R}_\alpha(\bar{a})$.



Kuvio 3.

Kuvioittakin on selvää, että kahden peräkkäin suoritetun kierron järjestys voidaan vaihtaa ja kierrot yhdistyvät yhdeksi ainoaksi kierroksi, jonka kulma on osakiertojen kulmien summa, siis

$$\mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_\beta(\bar{a})\big) = \mathrm{R}_\beta\big(\mathrm{R}_\alpha(\bar{a})\big) = \mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\bar{a}).$$

Lisäksi ymmärretään, että

$$\mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{i}) = \bar{j}, \quad \mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{j}) = -\bar{i} \quad \text{ja} \quad \mathrm{R}_\alpha(\bar{i}) = \cos\alpha\bar{i} + \sin\alpha\bar{j}.$$

Todettujen laskusääntöjen avulla saadaan vielä

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_\alpha(\bar{j}) = \mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{i})\big) = \mathrm{R}_{\pi/2}\big(\mathrm{R}_\alpha(\bar{i})\big) = \mathrm{R}_{\pi/2}\big(\cos\alpha\bar{i} + \sin\alpha\bar{j}\big) = \\ = \cos\alpha\mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{i}) + \sin\alpha\mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{j}) = \cos\alpha\bar{j} - \sin\alpha\bar{i}.\end{aligned}$$

Siis kantavektorien kierrot ovat

$$\begin{cases} \mathrm{R}_\alpha(\bar{i}) &= \cos\alpha\bar{i} + \sin\alpha\bar{j} \\ \mathrm{R}_\alpha(\bar{j}) &= \cos\alpha\bar{j} - \sin\alpha\bar{i}. \end{cases}$$

Yhtälöstä

$$\mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\bar{i}) = \mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_\beta(\bar{i})\big)$$

saadaan nyt helposti (teht. 2)

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

Näitä kutsutaan sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoiksi. Ne ovat siinä mielessä trigonometrian tärkeimmät kaavat, että niiden avulla voidaan todistaa kaikki muu koulutrigonometriassa esiin tuleva. Sinin ja kosinin määritelmien lisäksi täytyy tuntea vain näiden funktioiden parittomuus/parillisuus -ominaisuudet. Niitä soveltaen saadaan yhteenlaskukaavoista vähennyslaskukaavat

$$\begin{cases} \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \end{cases}$$

ja esimerkiksi kosinin vähennyslaskukaavasta seuraa

$$1 = \cos 0 = \cos(\alpha-\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

Pari harjoitustehtävää

1. Piirrä yhtälöä $\mathrm{R}_\alpha(t\bar{a}) = t\mathrm{R}_\alpha(\bar{a})$ havainnollistava kuvio siinä tapauksessa, että $t < 0$.

2. Johda yhteenlaskukaavat yhtälöstä

$$\mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\bar{\imath}) = \mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_\beta(\bar{\imath})\big)$$

sekä vähennyslaskukaavat yhteenlaskukaavoista.

3. Todista tangentin yhteen- ja vähennyslaskukaava sekä kaksinkertaisen kulman ja puolen kulman trigonometristen funktioiden kaavat. Johda kaavat summille ja erotuksille $\sin x \pm \sin y$ ja $\cos x \pm \cos y$.