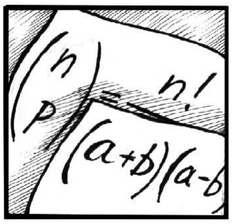

2009 ei ole tylsä vuosi

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Maailmassa pidetään joka vuosi satoja matematiikkakilpailuja ja niissä esitettävien tehtävien lukumäärä lienee tuhansissa. Kun kilpailutehtävät saisivat mielellään olla jotenkin uusia ja ennen näkemättömiä, ei ole ihme, että laatijoille tulee aika usein mieleen istuttaa tehtävään vuosiluku, päivämäärä tai kilpailun järjestysluku. Istutus on joskus hiukan keinotekoista: vuosiluvun tilalla saattaisi olla vaikkapa "mielivaltainen, aika suuri kokonaisluku n". Toisinaan tehtävässä tulee aidosti käyttöön jokin luvun matemaattinen ominaisuus. Kilpailumatematiikan harrastaja katsookin jo valmiiksi esimerkiksi vuosiluvun jaollisuusominaisuudet.

Seuraavassa esitetään pieni valikoima tämän vuoden tehtäviä eri maista. Yhden tehtävän muotoilusta ei löydy lukua 2009, mutta vihjeeksi voi sanoa, että 2009 on tehtävässä mukana kuitenkin. Kun seuraavan kerran vapaa-ajan ongelmat käyvät päällesi ja viihdeteollisuus on valmiina niitä omalla tavallaan lievittämään, niin kokeilepa ratkaista näitä. Lähetä ratkaisujasi (yhteen tai useampaan tehtävään) vuoden 2009 aikana esimerkiksi suoraan Solmun päätoimittajalle, postissa osoitteeseen Matti Lehtinen, Taskilantie 30 A, 90580 Oulu, tai sähköpostilla osoitteeseen `matti.lehtinen@helsinki.fi`. Solmu julkaisee parhaat ratkaisut, joten palkintona on ainakin mainetta ja kunniaa. – Ratkaisuja saavat lähettää kaikenikäiset.

Ja sitten tehtäviin:

1. Olkoon $A = \underbrace{999\ldots9}_{2009\ \mathrm{kpl}}$ ja $B = \underbrace{444\ldots4}_{2009\ \mathrm{kpl}}$ ja olkoon $C = A \cdot B$. Määritä luvun C numeroiden summa. (Kolumbian matematiikkaolympialaiset, 6. ja 7. luokan tehtävä.)

2. Määritä kaikki positiiviset kokonaislukuparit (m, n), jotka toteuttavat yhtälön

$$mn^2 = 2009(n+1).$$

(Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 7. luokan tehtävä.)

3. a) Lukujen $1, 2, \ldots, 2009$ neliöt kirjoitetaan peräkkäin satunnaisessa järjestyksessä yhdeksi luvuksi. Voiko syntynyt luku olla neliöluku? b) Luvut $1, 2, \ldots, 2009$ kirjoitetaan peräkkäin satunnaisessa järjestyksessä yhdeksi luvuksi. Voiko tämä luku olla neliöluku? (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 8. luokan tehtävä.)

4. Tarkastellaan 2009×2009:stä yksikköneliöstä koostuvaa neliöruudukkoa. A ja B pelaavat seuraavaa peliä: kumpikin värittää vuorollaan yhden yksikköneliön yhden sivun keltaiseksi. Pelaaja, joka ensimmäiseksi onnistuu värittämään jonkin neliön viimeisen värittämättömän sivun keltaiseksi, voittaa pelin. A aloittaa. Onko jommallakummalla pelaajalla voittostrategia, ts. voiko hän valita väritettävät sivunsa niin, että voittaa pelin riippumatta siitä, miten toinen pelaaja on valinnut väritettävät sivut? (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 8. luokan tehtävä.)

5. Oppilaalla on 7 paperinpalaa. Hän valitsee niistä joitakin ja pilkkoo nämä seitsemään palaan kunkin. Sitten hän valitsee taas joitakin paperinpaloistaan ja pilkkoo jokaisen niistä seitsemään osaan. Voiko hän tätä jatkaen päästä tilanteeseen, jossa hänellä on 2009 paperinpalaa? (Kreikan matematiikkakilpailu, juniorisarja.)

6. Määritä kaikki positiivisista kokonaisluvuista muodostuvat kolmikot (x, y, z), joille $99x + 100y + 101z = 2009$. (Viron matematiikkaolympialaiset, 10. luokan tehtävä.)

7. Määritä sellaiset kokonaisluvut a ja b, että $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$ on yhtälön $x^2 + ax + b = 0$ ratkaisu. Osoita, että tällöin $\sqrt{2010 - 2\sqrt{2009}}$ ei ole yhtälön ratkaisu. (Slovenian matematiikkaolympialaiset, 10. luokan tehtävä.)

8. Määritä ne positiiviset kokonaisluvut n, joille $-53 < \dfrac{2009}{53 - n} < 53 - n$. (Slovenian 53. matematiikkaolympialaiset, 10. luokan tehtävä.)

9. Määritä pienin luonnollinen luku, joka on jaollinen 2009:llä ja jonka numeroiden summa on 2009. (Serbian matematiikkaolympialaiset.)

10. Tasossa on 2009 pistettä, joista jokainen on väritetty joko punaiseksi tai siniseksi. Jokaisessa 1-säteisessä ympyrässä, jonka keskipiste on sininen, on tasan kaksi punaista pistettä. Määritä sinisten pisteiden suurin mahdollinen määrä. (Balkanin matematiikkaolympialaisten juniorisarja.)

11. Kumpi luvuista $\sqrt{2008 + \sqrt{2009}} + \sqrt{2009 + \sqrt{2008}}$ ja $\sqrt{2008 + \sqrt{2008}} + \sqrt{2009 + \sqrt{2009}}$ on suurempi? (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

12. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille funktion $f(x) = \cos(nx) \cdot \sin\left(\frac{2009x}{n^2}\right)$ jakso on 3π. (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

13. 2009×2009 yksikköneliöstä koostuvan ruudukon jokaiseen neliöön on kirjoitettu jokin luvuista $1, 2, \ldots, 2009$ niin, että joka rivillä ja joka sarakkeessa kukin näistä luvuista esiintyy täsmälleen kerran. Mikä on suurin mahdollinen ruudukon keskimmäisen ruudun ja sitä lähinnä olevan sellaisen ruudun, jossa on numero 1, etäisyys? Kahden ruudun välinen etäisyys on sama kuin šakki-kuninkaan ruutujen väliseen liikkeeseen tarvitsema vähimmäissiirtomäärä. (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

14. Onko olemassa polynomia $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, joka täyttää seuraavat ehdot: $|c| \leq 2009$, $|f(34)|$ on alkuluku ja f:llä on kolme kokonaislukunollakohtaa? (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

15. Kertoma $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ ja "kaksoiskertoma"

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot n, & \text{kun } n \text{ on pariton} \\ 2 \cdot 4 \cdots (n-2) \cdot n, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \end{cases}$$

ovat tunnettuja operaatiota. Määritellään nyt "k-kertoma" $F_k(n) = n(n-k)(n-2k)\cdots r$, missä $1 \leq r \leq k$ ja $n \equiv r \mod k$. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joille $F_{20}(n) + 2009$ on neliöluku. (Itävallan matematiikkaolympialaiset.)

16. Olkoon a positiivinen luku. Tarkastellaan lukujonoa (a_n), missä $a_0 = a$ ja $a_n = a_{n-1} + 40^{n!}$, kun $n \geq 1$. Osoita, että jokaisessa tällaisessa jonossa on äärettömän monta 2009:llä jaollista lukua. (Itävallan 40. matematiikkaolympialaiset.)

17. Sanomme, että kaksi aritmeettista jonoa $(a_n) = (a + bn)$ ja $(c_n) = (c + dn)$ ovat olennaisesti eri jonoja, jos ei ole niin, että $a_n = c_{n+p}$ kaikilla tarpeeksi suurilla n ja jollain kokonaisluvulla p. Monellako olennaisesti eri aritmeettisella jonolla on osajonona geometrinen jono, jonka kolmas jäsen on $40 \cdot 2009 = 80360$? (Itävallan 40. matematiikkaolympialaiset.)

18. Käytössä on mielivaltaisen monta postimerkkiä kutakin arvoa $134, 135, 136, \ldots, 142$ ja 143 senttiä. Määritä suurin senttiarvo, jota ei voi koostaa näistä merkeistä. (Itävallan matematiikkaolympialaiset.)

19. Jono (a_n) on ei-vakio aritmeettinen jono ja sen ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$. Jonon jäsenet a_2, a_5 ja a_{11} muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonon (a_n) 2009 ensimmäisen jäsenen summa. (Slovenian matematiikkaolympialaiset, 12. luokan tehtävä.)

20. Osoita, että $1005^{\ln(121)} = 11^{\ln(1+3+\cdots+2009)}$. (Slovenian matematiikkaolympialaiset, 12. luokan tehtävä.)