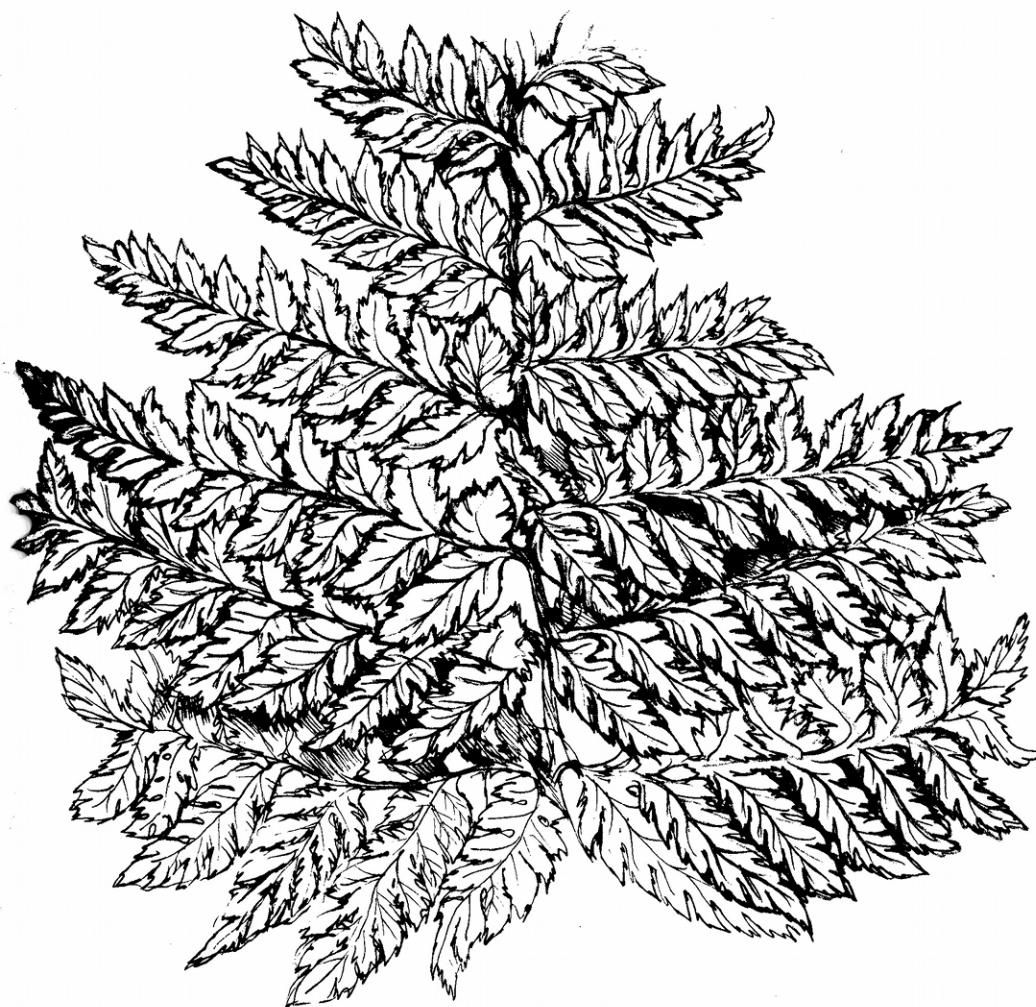


Solmu

Matematiikkalehti
3/2009

<http://solmu.math.helsinki.fi/>



Solmu 3/2009

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

<http://solmu.math.helsinki.fi/>

Päätoimittaja:

Matti Lehtinen, dosentti, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti: toimitus@solmu.math.helsinki.fi

Toimituskunta:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Marjatta Näättänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Antti Rasila, tutkija, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Hilkka Taavitsainen, lehtori, Ressun lukio

Graafinen avustaja: *Marjaana Beddard*

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Virpi Kauko, FT, matemaatikko, virpi@kauko.org, Jyväskylä

Jorma K. Mattila, professori, jorma.mattila@lut.fi

Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, dosentti, jorma.merikoski@uta.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Tampereen yliopisto

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, assistentti, anne-maria.ernvall@utu.fi

Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Matti Nuortio, jatko-opiskelija, mnuortio@paju.oulu.fi

Matemaattisten tieteiden laitos, Oulun yliopisto

Timo Tossavainen, lehtori, timo.tossavainen@joensuu.fi

Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

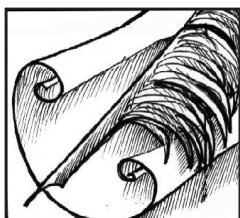
Numeroon 1/2010 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 11.1.2010 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus: Positiivisesti matematiikasta (Matti Lehtinen)	4
Monikulmion pinta-ala ylioppilaille (Mika Koskenoja)	5
Paras kiinalainen muki (Matti Lehtinen)	11
2009 ei ole tylsä vuosi (Matti Lehtinen)	13
Matematiikkaolympialaiset 2009: vaikeatkin tehtävät ratkeavat (Matti Lehtinen).....	15
Matematiikkadiplomeja Solmun avulla (Marjatta Näätänen).....	20
Mitoista on moneksi (Matti Lehtinen).....	22
Matematiikan lähtötasotestaus Turun ammattikorkeakoulussa tekniikan ja liikenteen alalla vuosina 1999–2004 ja 2008 (Raija Tuohi)	24
Kaunis kirja numeroista vai lukufloppi? (Matti Lehtinen).....	28
Matematiikkaa ulkona luonnossa (Aulikki Laine)	31
Lue matematiikasta suomeksi	34
Solmun uusitun etusivun kohdasta Matematiikan opetus löytyy tällaisia otsikoita	34
Lahjoitus matematiikan olympiavalmennukselle.....	34



Positiivisesti matematiikasta

Matematiikkakeskustelussa on aika usein moittiva sävy. Tässäkin Solmussa on useita kirjoituksia, joiden viestinä on, että matematiikan asema ja arvostus eivät oikein ole kohdallaan ja että matematiikan opetus tai sen tulokset jättävät toivomisen varaa. Usein tämänsuuntaisia ajatuksia myös itse tuotan ja levitän. Kun Solmu kuitenkin haluaa olla syvästi positiivinen julkaisu, on tarpeen neutraloida monia perustellusti kielteisiä mielipiteitä lausumalla myönteisiä ajatuksia itse matematiikasta.

Miksi matematiikka on positiivista? Matematiikka on positiivista, koska se on tärkeää. Vain matematiikkaa osaaville aukeavat hyvät opiskelu- ja työpaikat. Matematiikka on tärkeää, koska nykyaikainen tekniikka ei olisi mahdollista ilman matematiikkaa. Matematiikka on tärkeää, koska luonnon kirja on matematiikan kielellä kirjoitettu ja matematiikka on tieteellisen maailmankuvamme tukiranka. Matematiikka on tärkeää, koska sen kieli on universaalinen, kansalliset rajat ja kulttuurimuurit ylittävä.

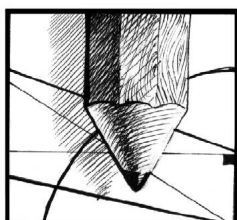
Tällaisin argumentein matematiikan opiskeluun kannustetaan. Nämä argumentit eivät millään muotoa ole virheellisiä. Niiden perusteella voi mainiosti päättää, että matematiikka tai sen opettaminen on elämäntehävä. Ja varsinkin voi päättää opiskella ja oppia matematiikkaa siinä mitassa ja määrässä, mikä on tarpeen itse kullakin elämän ja toiminnan alueella.

Matematiikka on siis tärkeää, koska se on mahtava työkalu tai työkalukokoelma. Mutta siinäkö kaikki? Kuu-

luuko matematiikka samaan sarjaan kuin jokoavain, sähkövatkain, moottorisaha tai tietokone? Näitä mitenkään väheksymättä ajattelen, että ei oikeastaan kuulu, sen arvo on syvempi ja universaalimpi.

Matematiikka on positiivista, koska se on kaunista. Mutta sanonta katsojan silmän keskeisestä merkityksestä kauneuden mieltämisessä pätee matematiikkaan enemmän kuin moneen muuhun estetiikan mittapuulla arvioitavaan. Pätee siinä mielessä, että matematiikan kauneus ei voi avautua heti samalla välittömyydellä kuin kauniin auringonlaskun tai korvaa hivelevän melodian. Analogiaa kuitenkin on: musiikin lukemattomissa alalajeissa on monia, joiden kauneus avautuu vasta korvan saatua riittävästi kokemusta, moni runo vaatii avautuakseen lukijalta tietoa ja ymmärrystä. Matematiikan kauneuden ymmärtämiseksi on välttämättä käveltävä matematiikan sisään. Matematiikan abstraktien rakenteiden ja yllättävien asiakytkentöjen kauneus ei ole kauniisti väritetyissä fraktaaligeometrian kuvioissa, niiden kauneus on matematiikalla, sillä työkalulla, tuotettua visuaalista kauneutta.

Mutta ennen kaikkea: matematiikka on positiivista, koska se on totta. Tai ainakin mahdollisimman paljon epäilyksistä vapaata ihmisen hengentoimintaa. Matematiikka määrittelee käsitteensä ja puhuu niistä täsmällisesti vain juuri sellaisina kuin ne määriteltiin. Matematiikka rakentaa koko tietovarastonsa tukevasti perustoille, joiden olemus on määritelmien ja aksiomien kiinnitetty. Matematiikka ei haihattele, romantisoi eikä harjoita mielipidesortoa.



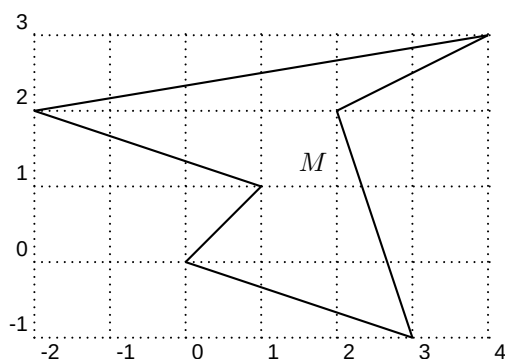
Monikulmion pinta-ala ylioppilaille

Mika Koskenoja

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Helsingin yliopisto

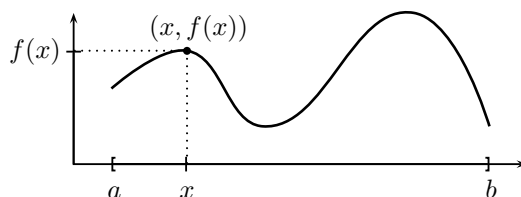
Tehtävä. Kuusikulmion M kärjet ovat tason pisteissä $(0, 0)$, $(3, -1)$, $(2, 2)$, $(4, 3)$, $(-2, 2)$ ja $(1, 1)$. Laske M :n pinta-ala.



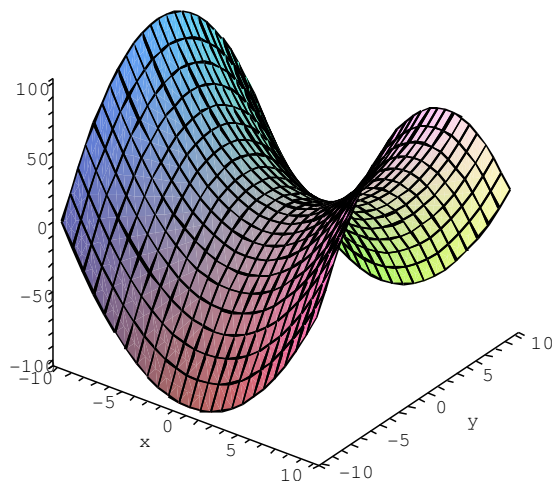
Esitin Solmun numerossa 1/2009 kirjoituksessa ”Monikulmion pinta-ala koululaisille” tehtävälle kaksi keskenään samantapaista ratkaisua, jotka vaativat ainoastaan jo peruskoulun yläluokkien oppilaiden hallitsemia alkeisgeometrian tietoja. Jatkan nyt samasta aiheesta esittäen tehtävälle tyystin erilaisen ratkaisun, joka perustuu vasta yliopistomatematiikan alussa opittaviin vektorianalyysin perusteisiin. Pyrin kuitenkin siihen, että tämänkertaisenkin ratkaisun seuraamiseen riittää lukion pitkän matematiikan derivointi- ja integrointitaitojen hyvä hallinta.

Vektorianalyysin alkeita

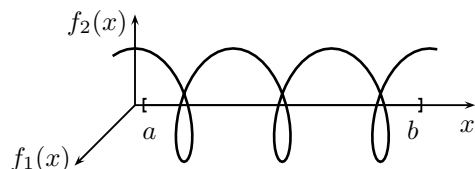
Koulumatematiikan funktio-opissa käsitellään lähinnä reaaliarvoisia funktioita, jotka on määritelty reaaliakselin osajoukossa. Kun $\Delta \subset \mathbf{R}$, niin funktio $f: \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ kuvaa määrittelyjoukon Δ jokaisen luvun x joksikin reaaliarvoksi $f(x)$. Tällaisen funktion kuvaaja on tapana esittää tason pisteinä $(x, f(x))$. Alla olevassa kuvassa on esitetty erään välillä $[a, b]$ määritellyn jatkuvan funktion kuvaaja, joka on tasokäyrä.



Ensimmäinen askel varsinaisen vektorianalyysin puolelle tehdään tutkimalla reaaliarvoisia funktioita, jotka on määritelty tason osajoukossa. Reaalitaso $\mathbf{R}^2$ koostuu järjestetyistä reaaliarvopareista (x, y) , joita kutsutaan tason *pisteiksi*. Nyt funktio $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, missä $D \subset \mathbf{R}^2$, kuvaa pisteen $(x, y) \in D$ reaaliarvoksi $f(x, y)$. Tällaisen funktion kuvaaja voidaan esittää kolmiulotteisen avaruuden pisteinä $(x, y, f(x, y))$. Seuraavassa kuvassa on neliössä $N = [-10, 10] \times [-10, 10]$ määritellyn jatkuvan funktion $f: N \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, kuvaaja, joka on pinta avaruudessa $\mathbf{R}^3$.



Reaaliakselin osajoukon tilalle funktion määrittelyjoukoksi asetettiin edellä tason osajoukko. Toisaalta funktioiden käsittelyä voidaan yleistää niin, että arvojoukoksi asetetaan taso $\mathbf{R}^2$ reaalitylukujoukon $\mathbf{R}$ sijasta. Kun $\Delta \subset \mathbf{R}$, niin funktio $f = (f_1, f_2): \Delta \rightarrow \mathbf{R}^2$ kuvaa määrittelyjoukon Δ jokaisen luvun x joksikin reaalitylukupariksi $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in \mathbf{R}^2$. Funktioita $f_1, f_2: \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ kutsutaan funktion f *koordinaattifunktioiksi*. Myös nyt funktion $f = (f_1, f_2)$ kuvaaja voidaan esittää kolmiulotteisen avaruuden pisteinä $(x, f_1(x), f_2(x))$. Alla olevassa kuvassa on esitetty erään välillä $[a, b]$ määritellyn jatkuvan funktion (eli *polun*) kuvaaja, joka on käyrä $\mathbf{R}^3$:ssa.



Funktion määrittely- ja arvojoukkojen laajennukset tasoon voidaan yhdistää tutkimalla funktioita $f = (f_1, f_2): D \rightarrow \mathbf{R}^2$, missä $D \subset \mathbf{R}^2$. Tällöin f kuvaa jokaisen reaalitylukuparin $(x, y) \in D$ reaalitylukupariksi $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) \in \mathbf{R}^2$. Nyt pisteistä $(x, y, f(x, y)) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \in \mathbf{R}^4$ koostuvan funktion kuvaajan havainnollistaminen ei ole mahdollista yhtä helposti kuin edellä. Sen sijaan koordinaattifunktioiden f_1 ja f_2 kuvaajat voidaan esittää avaruuden $\mathbf{R}^3$ pistejoukkoina $(x, y, f_1(x, y))$ ja $(x, y, f_2(x, y))$, jatkuvassa tapauksessa erityisesti pintoina. Funktiota $f = (f_1, f_2): D \rightarrow \mathbf{R}^2$ kutsutaan *vektorikentäksi*.

Koulumatematiikasta tuttujen funktioiden $f: \Delta \rightarrow \mathbf{R}$, $\Delta \subset \mathbf{R}$, analyysissä derivointi ja integrointi ovat keskeisiä työkaluja. Näin on myös vektorianalyysissä, joten käsittelemme seuraavaksi vektorifunktioiden derivointia ja integrointia. Tarkastelemme tason avoimissa tai suljetuissa joukoissa määriteltyjä funktioita, joiden arvot ovat tilanteesta riippuen joko reaalitylukuja tai reaalitylukupareja.

Osittaisderivaatat

Aloitetaan derivaatan käsittely tutkimalla funktioita $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, missä $D \subset \mathbf{R}^2$ on avoin. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$. Jos raja-arvo

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

on olemassa, niin se on funktion f *osittaisderivaatta* muuttujan x suhteen pisteessä (x_0, y_0) . Vastaavasti, jos

$$\partial_y f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

on olemassa, niin se on funktion f *osittaisderivaatta* muuttujan y suhteen pisteessä (x_0, y_0) . Melko helposti havaitaan, että osittaisderivaattojen laskeminen palautuu tuttuun yksiulotteiseen derivointiin. Kun nimittäin tarkastellaan avoimella välillä $]x_0 - r, x_0 + r[$ määriteltyä funktiota

$$g(x) = f(x, y_0),$$

niin

$$\partial_x f(x_0, y_0) = g'(x_0),$$

kunhan derivaatta on olemassa. Vastaavasti, kun tarkastellaan avoimella välillä $]y_0 - r, y_0 + r[$ määriteltyä funktiota

$$h(y) = f(x_0, y),$$

niin ollessaan olemassa

$$\partial_y f(x_0, y_0) = h'(y_0).$$

Esimerkki 1. Olkoon $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, jonka kuvaaja neliössä $N = [-10, 10] \times [-10, 10]$ on esitetty tämän sivun ensimmäisessä kuvassa. Nyt $\partial_x f(x, y) = 2x$ ja $\partial_y f(x, y) = -2y$. Näin ollen esimerkiksi $\partial_x f(1, 3) = 2 \cdot 1 = 2$ ja $\partial_y f(1, 3) = -2 \cdot 3 = -6$.

Tarkastelimme edellä *ensimmäisen kertaluvun* osittaisderivaattoja. Voimme jatkaa *toisen kertaluvun* osittaisderivaattoihin. Jos ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa jokaisessa D :n pisteessä, niin ne määräävät kaksi uutta funktiota $\partial_x f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ja $\partial_y f: D \rightarrow \mathbf{R}$, joita voimme yrittää osittaisderivoida. Jos kyseiset toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa jokaisessa D :n pisteessä, niin merkitsemme niiden määräämiä funktioita $\partial_{xx} f$, $\partial_{yy} f$, $\partial_{xy} f$ ja $\partial_{yx} f$. Voimme jatkaa edelleen *korkeamman kertaluvun* osittaisderivaattoihin pitäen mielessä, että ne eivät välttämättä ole olemassa, vaikka alemman kertaluvun osittaisderivaatat olisivatkin.

Kun siirrymme vektorikenttään $f = (f_1, f_2): D \rightarrow \mathbf{R}^2$, niin voimme tarkastella koordinaattifunktioiden $f_1: D \rightarrow \mathbf{R}$ ja $f_2: D \rightarrow \mathbf{R}$ osittaisderivaattoja $\partial_x f_i(x, y)$ ja $\partial_y f_i(x, y)$, $i = 1, 2$. Edellä esitetyllä menetelmällä voimme laskea näillekin korkeamman kertaluvun osittaisderivaattoja, mikäli ne ovat olemassa.

Esimerkki 2. Tarkastellaan vektorikenttää $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (y \sin x, x \cos y)$. Nyt $f_1(x, y) = y \sin x$, joten $\partial_x f_1(x, y) = y \cos x$ ja $\partial_y f_1(x, y) = \sin x$. Vastaavasti $f_2(x, y) = x \cos y$, joten $\partial_x f_2(x, y) = \cos y$ ja $\partial_y f_2(x, y) = -x \sin y$. Koordinaattifunktion f_1 toisen kertaluvun osittaisderivaatoiksi saadaan $\partial_{xx} f_1(x, y) = -y \sin x$, $\partial_{xy} f_1(x, y) = \cos x$, $\partial_{yy} f_1(x, y) = 0$ ja $\partial_{yx} f_1(x, y) = \cos x$. Vastaavasti f_2 :n toisen kertaluvun osittaisderivaatoiksi saadaan $\partial_{xx} f_2(x, y) = 0$, $\partial_{xy} f_2(x, y) = -\sin y$, $\partial_{yy} f_2(x, y) = -x \cos y$ ja $\partial_{yx} f_2(x, y) = -\sin y$.

Sanomme, että funktio $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ on n kertaa jatkuvasti derivoituva D :ssä, jos sillä on olemassa n . kertaluvun osittaisderivaatat jokaisessa pisteessä $(x, y) \in D$ ja osittaisderivaattojen määräämät funktiot ovat jatkuvia. Erityisesti f on kerran (kaksi kertaa) jatkuvasti derivoituva D :ssä, jos sillä on olemassa ensimmäisen (ensimmäisen ja toisen) kertaluvun osittaisderivaatat jokaisessa pisteessä $(x, y) \in D$ ja osittaisderivaattojen määräämät funktiot ovat jatkuvia. Vektorikenttää $f = (f_1, f_2): D \rightarrow \mathbf{R}^2$ on n kertaa jatkuvasti derivoituva D :ssä, jos f_1 ja f_2 ovat n kertaa jatkuvasti derivoituva D :ssä. Jatkuvan derivoituvuuden määritelmät tehdään vastaavasti myös funktioille $f: \Delta \rightarrow \mathbf{R}$, missä $\Delta \subset \mathbf{R}$ on avoin.

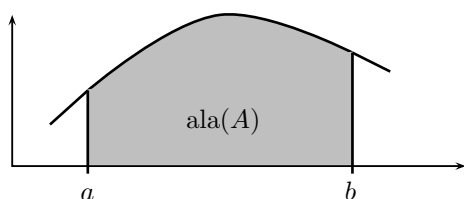
Havaitsemme esimerkistä 2, että $\partial_{xy} f_1 = \cos x = \partial_{yx} f_1$ ja $\partial_{xy} f_2 = -\sin y = \partial_{yx} f_2$. Tämä ei ole vain sattumaa, sillä kyseiset yhtälöt toteutuvat aina kaksi kertaa jatkuvasti derivoituville funktioille, jollainen myös esimerkin vektorikenttää f on.

Pinta- ja käyräintegraalit

Lukion pitkässä matematiikassa tulee tutuksi määrätty integraali ja sille voimassa oleva *analyysin peruslause*

$$\int_a^b f(x) dx = \Big/ F(x) = F(b) - F(a),$$

missä F on välillä $[a, b]$, $a < b$, määritellyn rajoitetun funktion f integraalifunktio. Määrätyn integraalin geometrisen merkityksen on x -akselin, suorien $x = a$ ja $x = b$ sekä jatkuvan ja positiivisen funktion f kuvaajan väliin jäävän alueen A pinta-ala, ks. seuraava kuva. Huomaa, että suljetulla välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio on aina rajoitettu tällä välillä.



Pintaintegraali. Joukon, jonka yli integroidaan, ei tarvitse välttämättä olla jana x -akselilla. Jos $E \subset \mathbf{R}^2$ on riittävän säännöllinen suljettu ja rajoitettu joukko, sekä $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva ja positiivinen, niin *pintaintegraalin*

$$\iint_E f(x) dx$$

arvo on joukon E , sen reunan ∂E kautta kulkevan xy -tasoa vastaan kohtisuoran umpinaisen pinnan ja funktion f kuvaajan $z = f(x, y)$ rajaaman kappaleen tilavuus. Pintaintegraali määritellään vastaavasti kuin reaaliakselin määrätty integraali Riemannin summien avulla, ks. [Martio, luku 4]. *Riittävän säännöllinen* merkitsee tässä yhteydessä sitä, että joukon E reuna ei ole liian monimutkainen. Esimerkiksi monikulmiot ovat aina riittävän säännöllisiä. Itse asiassa on melko hankalaa konstruoida joukko, joka ei ole tarpeeksi säännöllinen pintaintegraalin laskemiseksi.

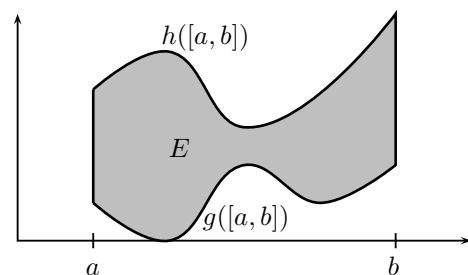
Käytännössä pintaintegraalin arvo voidaan usein laskea *iteroituna integraalina*. Jos suljettu ja rajoitettu joukko E voidaan lausua muodossa

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x) \leq y \leq h(x), x \in [a, b]\},$$

missä funktiot $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ovat jatkuvia ja $g(x) \leq h(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin

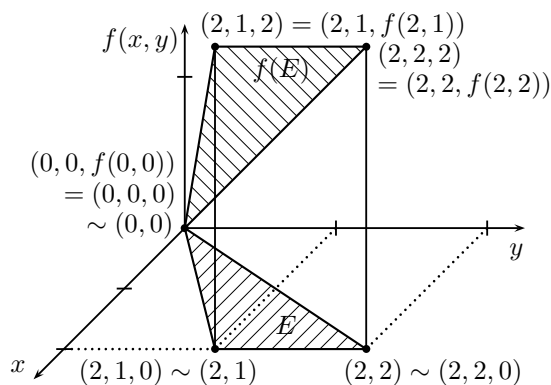
$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Ensin funktiota f integroidaan välillä $[g(x), h(x)]$ muuttujan y suhteen niin kuin x olisi vakio, jolloin integroitavaksi funktioksi saadaan vain x :stä riippuva funktio, jota sitten integroidaan x :n suhteen välillä $[a, b]$.



Esimerkki 3. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^2$ kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(2, 1)$ ja $(2, 2)$. Lasketaan tasointegraali yli E :n funktiolle $f(x, y) = x$. Valitaan nyt funktioiksi $g, h: [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x$ ja $h(x) = x$, ks. seuraava kuva. Tällöin

$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^x x dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^x xy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \int_0^2 \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Havaitsemme kuvasta, että edellä laskemamme tasointegraalin arvo $\frac{4}{3}$ on sellaisen monitahokkaan tilavuus, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0,0)$, $(2,1,0)$, $(2,2,0)$, $(2,1,2)$ ja $(2,2,2)$. Tässä tason pisteet $(0,0)$, $(2,1)$ ja $(2,2)$ on samaistettu $\mathbf{R}^3$:n pisteiden $(0,0,0)$, $(2,1,0)$ ja $(2,2,0)$ kanssa.

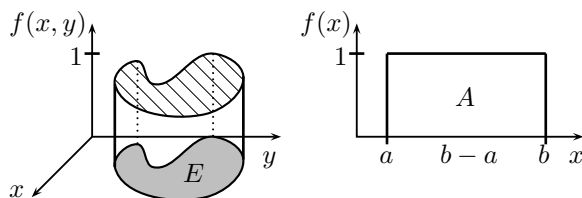
Havainto 1. Jos integroidaan vakiofunktiota $f \equiv 1$ yli riittävän säännöllisen joukon E , niin saadaan joukon E , sen reunan ∂E kautta kulkevan xy -tasoa vastaan kohtisuoran umpinaisen pinnan ja vakiofunktion 1 kuvaajan rajaaman kappaleen tilavuus. Havaitsemme, että saatu luku on itse asiassa samalla myös joukon E pinta-ala, eli

$$\text{ala}(E) = \iint_E 1 \, dx \, dy.$$

Vastaavasti yksiulotteisessa tapauksessa välin $[a, b]$ pituus saadaan integraalina

$$\int_a^b 1 \, dx = \Big|_a^b x = b - a, \quad a < b,$$

joka on toisaalta x -akselin, suorien $x = a$ ja $x = b$ sekä vakiofunktion $f \equiv 1$ kuvaajan väliin jäävän alueen A pinta-ala. Havaitsemme lisäksi, että A on suorakaide, jonka kannan pituus on $b - a$ ja korkeus on 1.



Polku. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ avoin ja $a < b$. Jatkuva kuvausta $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): [a, b] \rightarrow D$ sanotaan *poluksi* joukossa D . Kuvauksen γ jatkuvuus tarkoittaa, että molemmat koordinaattifunktiot $\gamma_i: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, ovat jatkuvia. Polun γ *derivaatta* $\gamma'(t)$ pisteessä $t \in [a, b]$ on vektori

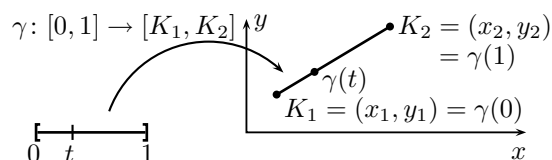
$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \in \mathbf{R}^2,$$

mikäli tavalliset derivaatat $\gamma'_i(t)$ pisteissä $t \in]a, b[$ ja toispuoleiset derivaatat pisteissä a ja b ovat olemassa. Jos derivaatta γ' on olemassa koko välillä $[a, b]$, niin sanomme, että γ on *derivoituva*. Jos γ on derivoituva lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä $t \in [a, b]$, niin sanomme, että γ on *paloittain derivoituva*. Edelleen, mikäli (paloittain) derivoituvan polun γ koordinaattifunktiot γ_1 ja γ_2 ovat jatkuvasti derivoituvia ja $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ (mahdollisesti lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä $t \in [a, b]$), niin sanomme, että polku γ on (paloittain) *säännöllinen*.

Esimerkki 4. Merkitään tason pisteet $K_1 = (x_1, y_1)$ ja $K_2 = (x_2, y_2)$ yhdistävää janaa $[K_1, K_2]$, jolloin siis $[K_1, K_2] \subset \mathbf{R}^2$. Janaa $[K_1, K_2]$ esittävä polku $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): [0, 1] \rightarrow [K_1, K_2]$ on

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \\ &= ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \\ &= (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tällaista polkua on tapana kutsua *janapoluksi*.



Polku $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ on *umpinainen*, jos $\gamma(a) = \gamma(b)$. Olkoon nyt $E \subset D$ sellainen suljettu ja rajoitettu joukko, että sen reuna ∂E voidaan esittää umpinaisella (paloittain) säännöllisellä polulla $\gamma: [a, b] \rightarrow \partial E$. Esimerkiksi kaikkien n -kulmioiden reuna voidaan esittää umpinaisella paloittain säännöllisellä polulla. Joukon E reunaa esittävän polun γ sanotaan olevan *positiivisesti suunnistettu*, jos γ kiertää joukon E ainoastaan kerran ja E on pisteen $\gamma(t)$ läheisyydessä vektorin $\gamma'(t)$ vasemmalla puolella kaikissa pisteissä $t \in [a, b]$, joissa $\gamma'(t)$ on olemassa.

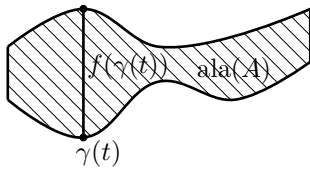
Käyräintegraali. Olkoon $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ (paloittain) derivoituva polku

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad t \in [a, b].$$

Jos $\gamma([a, b]) \subset D \subset \mathbf{R}^2$ ja $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva, niin päädytään (*skalaarikentän*) *käyräintegraaliin*

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2} \, dt.$$

Tämä on tavallinen 1-ulotteinen määrätty integraali. Sen geometrinen tulkinta on polulle γ asetetun "aidan" A pinta-ala, kun aidan korkeus pisteessä $\gamma(t)$ on $f(\gamma(t))$, ks. seuraava kuva.



Jos käyräintegraalissa $f \equiv 1$, niin saadaan polun γ pituus

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} dt.$$

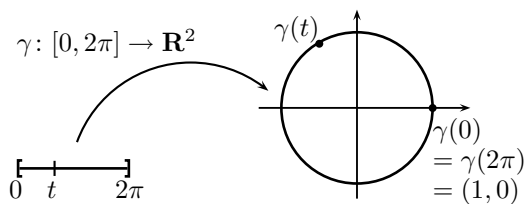
Esimerkki 5. Yksikköympyrän kehä $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ voidaan esittää polulla $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

joka on umpinainen, säännöllinen ja positiivisesti suunnistettu. Tällöin $\gamma_1'(t) = -\sin t$ ja $\gamma_2'(t) = \cos t$, joten

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = \int_0^{2\pi} t = 2\pi,$$

joka on tunnetusti yksikköympyrän kehän pituus, mutta se on siis myös yksikköympyrän kehää esittävän polun γ (joka on kuvaus) pituus.



Olkoon tilanne muuten kuten edellä skalaarikentän käyräintegraalia määriteltäessä, mutta oletetaan, että $f = (f_1, f_2): D \rightarrow \mathbf{R}^2$ on jatkuva vektorikenttä. Tällöin määritellään (vektorikentän) käyräintegraali

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \cdot d\bar{s} &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)) dt, \end{aligned}$$

joka on edelleen tavallinen 1-ulotteinen määrätty integraali.

Jos integroidaan yli umpinaisen polun, niin käyräintegraaleille on tapana käyttää merkintöjä

$$\oint_{\gamma} f ds \quad \text{ja} \quad \oint_{\gamma} f \cdot d\bar{s}.$$

Monet määrätyn integraalin perusominaisuudet ovat voimassa myös taso- ja käyräintegraaleille. Esimerkiksi

lineaarisuus integroitavan funktion suhteen on tasointegraalille voimassa muodossa

$$\iint_E (c_1 f + c_2 g) dx dy = c_1 \iint_E f dx dy + c_2 \iint_E g dx dy,$$

kun $f, g: E \rightarrow \mathbf{R}$ ja $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Vektorikentän käyräintegraalille additiivisuus integroimisjoukon suhteen saa muodon

$$\int_{\gamma} f \cdot d\bar{s} = \int_{\gamma_1} f \cdot d\bar{s} + \int_{\gamma_2} f \cdot d\bar{s},$$

kun polku γ on suunnistuksen säilyttäen yhdiste kahdesta polusta γ_1 ja γ_2 . Kun käännetään polun $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ suunta määrittelemällä uusi polku $-\gamma(t) = \gamma(b - (t - a))$, $t \in [a, b]$, niin

$$\int_{-\gamma} f \cdot d\bar{s} = - \int_{\gamma} f \cdot d\bar{s}.$$

Mitä määrätyn integraalin tuttua kaavaa tämä vastaa?

Greenin lause ja monikulmion pinta-ala

Greenin lause on yksi analyysin peruslauseen yleistyksistä tasoon, joissa on oleellista, että pintaintegraali yli tason joukon voidaan lausua integraalina yli joukon reunan. Tämähän on myös analyysin peruslauseen keskeinen ominaisuus: integroimisjoukkona oleva reaaliakselin väli $[a, b]$ korvataan siinä välin päätepisteillä, kun määrätyn integraalin arvo saadaan integraalifunktion pisteissä b ja a saamien arvojen erotuksena. Seuraava Greenin lauseen muotoilu on tarpeisiimme sopiva ja riittävä, mutta tuloksella on useita erilaisia ja yleisempiäkin muotoiluja.

Greenin lause. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ avoin ja rajoitettu, ja olkoon $f = (f_1, f_2): D \rightarrow \mathbf{R}^2$ kerran jatkuvasti derivoituva vektorikenttä. Jos $E \subset D$ on suljettu joukko, jonka reunaa ∂E esittää paloittain säännöllinen positiivisesti suunnistettu polku, niin

$$\oint_{\partial E} f \cdot d\bar{s} = \iint_E (\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_1(x, y)) dx dy.$$

Seuraus 1. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^2$ suljettu ja rajoitettu joukko, jonka reunaa ∂E esittää paloittain säännöllinen positiivisesti suunnistettu polku. Tutkitaan vektorikenttää $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (0, x)$. Tällöin funktion f koordinaattifunktiot ovat $f_1(x, y) = 0$ ja $f_2(x, y) = x$, joten $\partial_x f_2(x, y) = 1$ ja $\partial_y f_1(x, y) = 0$. Havainnon 1 ja Greenin lauseen mukaan

$$\begin{aligned} \text{ala}(E) &= \iint_E 1 dx dy = \iint_E (1 - 0) dx dy \\ &= \iint_E (\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_1(x, y)) dx dy = \oint_{\partial E} f \cdot d\bar{s}. \end{aligned}$$

Seuraus 2. (Monikulmion pinta-ala) Jos n -kulmion M kärjet ovat vastapäivään kiertäen pisteissä $K_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$, niin M :n pinta-ala on

$$\text{ala}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2},$$

missä $x_{n+1} = x_1$ ja $y_{n+1} = y_1$.

Todistus. Esitetään n -kulmion M reuna ∂M siten, että γ_i on polku, joka esittää janaa kärjestä K_i kärkeen K_{i+1} , $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow [K_i, K_{i+1}]$, $\gamma_i(t) = (\gamma_{i,1}(t), \gamma_{i,2}(t))$, missä

$$\begin{aligned}\gamma_{i,1}(t) &= (1-t)x_i + tx_{i+1}, \\ \gamma_{i,2}(t) &= (1-t)y_i + ty_{i+1},\end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$ ja $t \in [0, 1]$. Tällöin $\gamma'_{i,1}(t) = x_{i+1} - x_i$ ja $\gamma'_{i,2}(t) = y_{i+1} - y_i$. Nyt vektorikentän käyräintegraalin määritelmän perusteella

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_i} f \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 f(\gamma_i(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_0^1 (0, (1-t)x_i + tx_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i) dt \\ &= (y_{i+1} - y_i) \int_0^1 ((1-t)x_i + tx_{i+1}) dt \\ &= (y_{i+1} - y_i) \int_0^1 \left(x_i t + \frac{(x_{i+1} - x_i)t^2}{2} \right) dt \\ &= (y_{i+1} - y_i) \left(x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \\ &= \frac{(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2}.\end{aligned}$$

Koska polkujen γ_i yhdiste reunan ∂E esityksenä on paloittain säännöllinen ja positiivisesti suunnistettu, niin seurauksen 1 ja vektorikentän käyräintegraalin additiivisuussominaisuuden perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\text{ala}(M) &= \oint_{\partial M} f \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f \cdot d\vec{s} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

Seurauksen 2 perusteella saamme tehtävän ratkaisuksi

$$\begin{aligned}\text{ala}(M) &= \frac{1}{2} [(3+0)(-1-0) + (2+3)(2+1) \\ &\quad + (4+2)(3-2) + (-2+4)(2-3) \\ &\quad + (1-2)(1-2) + (0+1)(0-1)] \\ &= \frac{1}{2} [-3 + 15 + 6 - 2 + 1 - 1] = \frac{16}{2} = 8.\end{aligned}$$

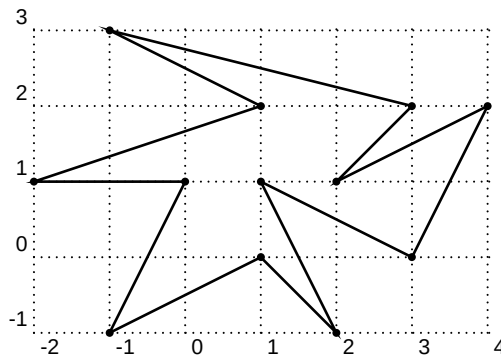
Tulos on tietysti sama kuin Solmun 1/2009 artikkelissa ”Monikulmion pinta-ala koululaisille” kahdella eri tavalla laskettu M :n pinta-ala.

Monikulmion pinta-alan kaavasta seuraa eräs mielenkiintoinen havainto. Jos n -kulmion M (kuinka monimutkaisen tahansa) kärjet ovat kokonaislukupisteissä $(l, m) \in \mathbf{Z}^2$, niin $\text{ala}(M) = k \cdot \frac{1}{2}$, missä $k \in \mathbf{Z}_+$, sillä monikulmion pinta-alan summakaavassa osoittajassa oleva termi $(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)$ on tällöin aina kokonaisluku.

Jatkan samasta aiheesta jossakin Solmun tulevassa numerossa vielä kolmannella kirjoituksella. Esitän tehtävälle kahdessa kirjoituksessani jo esitetyistä tavoista poikkeavan ratkaisun, joka perustuu Pickin lauseeseen.

Tehtäviä lukijalle

Tehtävä 1. Laske alle piirretyn 12-kulmion pinta-ala.



Tehtävä 2. Johda r -säteisen ympyrän pinta-ala πr^2 Greenin lauseen (seurauksen 1) avulla.

Tehtävä 3. Johda säännöllisen kuusikulmion, jonka sivun pituus on s , pinta-ala $\frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$ Greenin lauseen (seurauksen 2) avulla. Johda sama tulos tasogeometrisesti käyttäen hyväksesi Pythagoraan lausetta.

Tehtävä 4. Kuusikulmion M kärjet ovat vastapäivään kiertäen pisteissä $(1, 0)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$, $K = (x, 2)$, $(3, 4)$ ja $(0, 3)$. Määritä kärjen $K = (x, 2)$ ensimmäinen koordinaatti x siten, että M :n pinta-ala on a) 12, b) 13, c) 15. Piirrä kuvat!

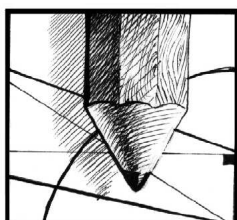
Tehtävä 5. Piirrä kuva itse keksimästäsi 10-kulmiosta ja laske sen pinta-ala.

Kirjallisuutta

Adams, Robert A., Calculus: a complete course, 6th edition, Addison Wesley, 2006.

Lehto, Olli, Differentiaali- ja integraalilaskenta II, Offset Oy, 1982.

Martio, Olli, Vektorianalyysi, Limes ry, 2004.



Paras kiinalainen muki

Matti Lehtinen

Helsingin yliopisto

Kauan sitten, 1960-luvun alussa, olin nuori henkilö, jolla oli harrastus. Olin sattumalta kerran valinnut kotimme putkiradiosta lyhyet aallot, vaikka sieltä ei mitään kuulukaan, niin kuin minua oli neuvottu. Sieltä kuului kuitenkin Pakistanin radion englanninkielinen ohjelma. Minusta tuli DX-kuuntelija. Kuuntelin sillä putkiradiolla, hiukan viallisellakin. Elettiin kylmän sodan aikaa, ja radioaalloilla kulki runsaasti propagandaa yli rauta- ja bambuesirippujen, molempiin suuntiin. Voimakkaimmat lähettimet sijaitsivat tuohon aikaan Kiinassa, eikä Pekingin Radion lähetysten seuraaminen ollut putkiradiollakaan ongelma.

DX-kuunteluun liittyy paitsi kaukaisten radioasemien kuuntelu myös tositteiden hankkiminen siitä, että on jonkin tietyn aseman kuullut. Tämä tapahtuu niin, että asemalle kirjoitetaan kirje, niin sanottu vastaanotto-raportti, jossa kerrotaan, mitä on kuullut ja miten hyvin lähetys on tullut vastaanottoimeen. Asema, jolle radioaaltojen vaihtelevien etenemisominaisuuksien vuoksi on hyötyä kuuntelijatiedoista, lähettää sitten vastavuoroisesti todistuksen, ns. QSL-kortin. Harrastajat pyrkivät tietysti saamaan mahdollisimman hyvän koelman näitä kortteja.

Miten tämä liittyy matematiikkaan? No, lähetin aikanaan Pekingin Radioon vastaanotto-raportin ja sain myös asianmukaisen QSL-kortin, sinänsä DX-kuuntelijalle varsin vähäarvoisen. Mutta sen lisäksi pääsin tai jouduin ja myös jäin Pekingin Radion postituslistalle. Vuosien mittaan postilaatikkoon putoili – äitini kauhistukseksi – kaikenlaista painotuotetta Kiinasta,

Maon Punaisesta kirjasta alkaen. Viikoittain sain myös lentopostipaperille painetun *Peking Review* -nimisen englanninkielisen uutislehden.

1966 alkoi niin sanottu kulttuurivallankumous, Mao Zedongin masinoima massiivinen ja seurauksiltaan varsin traaginen, Kiinan yhteiskuntarakenteita järkyttämään ja murtamaan pyrkivä liike. Siihen liittyvän pienen matematiikkaa sivuavan episodin sain lukea minulle edellä kuvatuista syistä postitetusta uutislehdestä. Näin kertomus etenee.

Kiinassa oli yliopisto, jossa opetettiin matematiikkaa. Opiskelijat olivat sielläkin passiivisia eikä luennoitsija voinut tilanteelle mitään. Kunnes hän eräänä päivänä saapui luennoille kädessään peltimuki. ”Toverit opiskelijat, matematiikan avulla voimme tehdä peltimukit niin, että niihin tärväytyy mahdollisimman vähän rautaa, jota sitten voidaan käyttää muihin tärkeämpiin vallankumouksellisiin tarkoituksiin.”

Todellakin, on yksinkertainen optimointitehtävä rakentaa tietynvetoinen kanneton lieriönmuotoinen astia niin, että materiaalia tarvitaan mahdollisimman vähän. Oletetaan, että astian tilavuus on V , sen korkeus on h ja pohjan säde r . Peltiä kuluu silloin pinta-alan yksiköissä mitaten (jos saumoihin ehkä tarvittavat ylitykset ja mukin mahdollinen korva unohdetaan) pohjaan πr^2 ja vaippaan, joka muodostuu h -korkuisesta suorakaiteesta, jonka toinen sivu on pohjan ympäryys, $2\pi r h$, yhteensä siis $A = \pi r^2 + 2\pi r h$. Mutta r ja h eivät ole toisistaan riippumattomat, vaan $V = \pi r^2 h$

eli $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Siten A on esimerkiksi vain r :n funktio, $A = A(r) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}$. A :n minimi löytyy helposti A :n derivaatan $A'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$ ainoasta positiivisesta nollakohdasta $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Kiinalaisen yliopiston matematiikanopetuksen kuvaus jatkui tästä haltioituneesti. Opiskelijat havaitsivat nyt, että matematiikasta on hyötyä vallankumouksessa. Aikaisempi välinpitämättömyys muuttui palavaksi innostukseksi, joka säilyi ainakin kurssin loppuun asti.

Olen itsekin saanut aika monesti opettaa yksinkertaisen ääriarvotehtävän ratkaisua. Usein olen muistanut *Peking Review*'n rohkaisevan kertomuksen ja yrittänyt toistaa sen, mitä luin Kiinassa tapahtuneen. Menestykseni ei ole ollut sama. Ehkä en ole osannut kertoa tarinaa oikein, ehkä metallin säästöä mukiinrakennuksessa ei Suomessa koeta kovin ihmeelliseksi asiaksi. Mutta asialla on toinenkin ulottuvuus. Jos tarkastellaan lähemmin optimaalista mukia ja sen muotoa, niin huoma-

mataan, että minimipeltimukin korkeus on

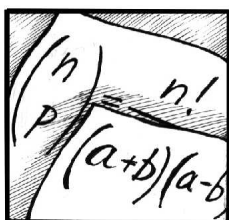
$$h = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \right)^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = r.$$

Mukin pohjan halkaisija on siis kaksi kertaa mukin korkeus, joten muki on varsin laakea, ennenmin vati kuin muki. Laakeasta astiasta tunnetusti läikkyy helposti, joten pahimmillaan Kiina saattoi menettää juomien läikkymisessä sen, minkä pellissä säästi.

Ääriarvotehtävän ratkaisu on laajemmasti ajatellen optimointia, parhaan vaihtoehdon etsimistä. Mutta mikä on paras? Melkein aina jonkin ominaisuuden suhteen mahdollisimman hyvä asia jättää jonkin muun suhteen toivomisen varaa. *Monitavoiteoptimointi* on sovelletun matematiikan tai operaatioanalyysin ala, joka pyrkii etsimään hyviä menetelmiä tilanteisiin, joissa ratkaisuun kohdistuu ristiriitaisia vaatimuksia. Mutta tällöin joudutaan väkisin pelkän laskennon ulkopuolelle, ottamaan huomioon ihmisen mieltymyksiä ja valintoja. Näin on matematiikan ja muiden maailman ilmiöiden välinen suhde yleisemminkin: matematiikka ei yksin tuota käytännön ongelmien ratkaisua, mutta se on työväline, jota käyttäen ratkaisujen äärelle päästään.

Solmun verkkoversiossa on ilmestynyt Markku Halmetojan ja Jorma Merikosken kirja Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle. Kirja on osoitteessa <http://solmu.math.helsinki.fi/2009/mf1.pdf>

Solmun keskustelupalsta on osoitteessa <http://solmu.math.helsinki.fi/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl>



2009 ei ole tylsä vuosi

Matti Lehtinen

Helsingin yliopisto

Maailmassa pidetään joka vuosi satoja matematiikkakilpailuja ja niissä esitettävien tehtävien lukumäärä lie-
nee tuhansissa. Kun kilpailutehtävät saisivat mielellään
olla jotenkin uusia ja ennen näkemättömiä, ei ole ihme,
että laatijoille tulee aika usein mieleen istuttaa tehtä-
vään vuosiluku, päivämäärä tai kilpailun järjestysluku.
Istutus on joskus hiukan keinotekoista: vuosiluvun tilal-
la saattaisi olla vaikkapa ”mielivaltainen, aika suuri ko-
konaisluku n ”. Toisinaan tehtävässä tulee aidosti käyt-
töön jokin luvun matemaattinen ominaisuus. Kilpailu-
matematiikan harrastaja katsookin jo valmiiksi esimer-
kiksi vuosiluvun jaollisuusominaisuudet.

Seuraavassa esitetään pieni valikoima tämän vuoden
tehtäviä eri maista. Yhden tehtävän muotoilusta ei löy-
dy lukua 2009, mutta vihjeeksi voi sanoa, että 2009
on tehtävässä mukana kuitenkin. Kun seuraavan ker-
ran vapaa-ajan ongelmat käyvät päällesi ja viihde-
teollisuus on valmiina niitä omalla tavallaan lievität-
ämään, niin kokeilepa ratkaista näitä. Lähetä rat-
kaisujasi (yhteen tai useampaan tehtävään) vuoden
2009 aikana esimerkiksi suoraan Solmun päätoimitta-
jalle, postissa osoitteeseen Matti Lehtinen, Taskilan-
tie 30 A, 90580 Oulu, tai sähköpostilla osoitteeseen
matti.lehtinen@helsinki.fi. Solmu julkaisee par-
haat ratkaisut, joten palkintona on ainakin mainetta
ja kunniaa. – Ratkaisuja saavat lähettää kaikenikäiset.

Ja sitten tehtäviin:

1. Olkoon $A = \underbrace{999 \dots 9}_{2009 \text{ kpl}}$ ja $B = \underbrace{444 \dots 4}_{2009 \text{ kpl}}$ ja olkoon

$C = A \cdot B$. Määritä luvun C numeroiden summa.
(Kolumbian matematiikkaolympialaiset, 6. ja 7. luokan
tehtävä.)

2. Määritä kaikki positiiviset kokonaislukuparit (m, n) ,
jotka toteuttavat yhtälön

$$mn^2 = 2009(n+1).$$

(Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 7. luokan tehtä-
vä.)

3. a) Lukujen 1, 2, ..., 2009 neliöt kirjoitetaan peräk-
kain satunnaisessa järjestyksessä yhdeksi luvuksi. Voi-
ko syntynyt luku olla neliöluku? b) Luvut 1, 2, ..., 2009
kirjoitetaan peräkkäin satunnaisessa järjestyksessä yh-
deksi luvuksi. Voiko tämä luku olla neliöluku? (Ukrai-
nan matematiikkaolympialaiset, 8. luokan tehtävä.)

4. Tarkastellaan 2009×2009 :stä yksikköneliöstä koos-
tuvaa neliöruudukkoa. A ja B pelaavat seuraavaa peliä:
kumpikin värittää vuorollaan yhden yksikköneliön yh-
den sivun keltaiseksi. Pelaaja, joka ensimmäiseksi on-
nistuu värittämään jonkin neliön viimeisen värittämät-
tömän sivun keltaiseksi, voittaa pelin. A aloittaa. Onko
jommallakummalla pelaajalla voittostrategia, ts. voiko
hän valita väritettävät sivunsa niin, että voittaa pe-
lin riippumatta siitä, miten toinen pelaaja on valinnut
väritettävät sivut? (Ukrainan matematiikkaolympialai-
set, 8. luokan tehtävä.)

5. Oppilaalla on 7 paperinpala. Hän valitsee niistä joi-
takain ja pilkkoo nämä seitsemään palaan kunkin. Sitten
hän valitsee taas joitakin paperinpaloistaan ja pilkkoo

jokaisen niistä seitsemään osaan. Voiko hän tätä jatkaen päästä tilanteeseen, jossa hänellä on 2009 pape-rinpala? (Kreikan matematiikkakilpailu, juniorisarja.)

6. Määritä kaikki positiivisista kokonaisluvuista muodostuvat kolmikot (x, y, z) , joille $99x + 100y + 101z = 2009$. (Viron matematiikkaolympialaiset, 10. luokan tehtävä.)

7. Määritä sellaiset kokonaisluvut a ja b , että $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$ on yhtälön $x^2 + ax + b = 0$ ratkaisu. Osoita, että tällöin $\sqrt{2010 - 2\sqrt{2009}}$ ei ole yhtälön ratkaisu. (Slovenian matematiikkaolympialaiset, 10. luokan tehtävä.)

8. Määritä ne positiiviset kokonaisluvut n , joille $-\frac{53}{2009} < \frac{53-n}{53-n} < 53-n$. (Slovenian 53. matematiikkaolympialaiset, 10. luokan tehtävä.)

9. Määritä pienin luonnollinen luku, joka on jaollinen 2009:llä ja jonka numeroiden summa on 2009. (Serbian matematiikkaolympialaiset.)

10. Tasossa on 2009 pistettä, joista jokainen on väritetty joko punaiseksi tai siniseksi. Jokaisessa 1-säteisessä ympyrässä, jonka keskipiste on sininen, on tasan kaksi punaista pistettä. Määritä sinisten pisteiden suurin mahdollinen määrä. (Balkanin matematiikkaolympialaisten juniorisarja.)

11. Kumpi luvuista $\sqrt{2008 + \sqrt{2009}} + \sqrt{2009 + \sqrt{2008}}$ ja $\sqrt{2008 + \sqrt{2008}} + \sqrt{2009 + \sqrt{2009}}$ on suurempi? (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

12. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joille funktion $f(x) = \cos(nx) \cdot \sin\left(\frac{2009x}{n^2}\right)$ jakso on 3π . (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

13. 2009×2009 yksikköneliöstä koostuvan ruudukon jokaiseen neliöön on kirjoitettu jokin luvuista $1, 2, \dots, 2009$ niin, että joka rivillä ja joka sarakkeessa kukin näistä luvuista esiintyy täsmälleen kerran. Mikä on suurin mahdollinen ruudukon keskimmäisen ruudun ja sitä lähinnä olevan sellaisen ruudun, jossa on numero 1, etäisyys? Kahden ruudun välinen etäisyys on sama

kuin šakki-kuninkaan ruutujen väliseen liikkeeseen tarvitsema vähimmäissiirtomäärä. (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

14. Onko olemassa polynomia $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, joka täyttää seuraavat ehdot: $|c| \leq 2009$, $|f(34)|$ on alkuluku ja f :llä on kolme kokonaislukunollakohtaa? (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

15. Kertoma $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ ja "kaksoiskertoma"

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot n, & \text{kun } n \text{ on pariton} \\ 2 \cdot 4 \cdots (n-2) \cdot n, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \end{cases}$$

ovat tunnettuja operaatiota. Määritellään nyt " k -kertoma" $F_k(n) = n(n-k)(n-2k) \cdots r$, missä $1 \leq r \leq k$ ja $n \equiv r \pmod k$. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joille $F_{20}(n) + 2009$ on neliöluku. (Itävallan matematiikkaolympialaiset.)

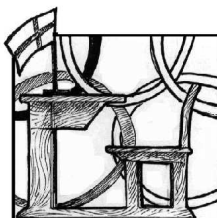
16. Olkoon a positiivinen luku. Tarkastellaan lukujonoa (a_n) , missä $a_0 = a$ ja $a_n = a_{n-1} + 40^{n!}$, kun $n \geq 1$. Osoita, että jokaisessa tällaisessa jonossa on äärettömän monta 2009:llä jaollista lukua. (Itävallan 40. matematiikkaolympialaiset.)

17. Sanomme, että kaksi aritmeettista jonoa $(a_n) = (a + bn)$ ja $(c_n) = (c + dn)$ ovat olennaisesti eri jonoja, jos ei ole niin, että $a_n = c_{n+p}$ kaikilla tarpeeksi suurilla n ja jollain kokonaisluvulla p . Monellako olennaisesti eri aritmeettisella jonolla on osajonona geometrinen jono, jonka kolmas jäsen on $40 \cdot 2009 = 80360$? (Itävallan 40. matematiikkaolympialaiset.)

18. Käytössä on mielivaltaisen monta postimerkkiä kutakin arvoa 134, 135, 136, $\dots$, 142 ja 143 senttiä. Määritä suurin senttiarvo, jota ei voi koostaa näistä merkeistä. (Itävallan matematiikkaolympialaiset.)

19. Jono (a_n) on ei-vakio aritmeettinen jono ja sen ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$. Jonon jäsenet a_2, a_5 ja a_{11} muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonon (a_n) 2009 ensimmäisen jäsenen summa. (Slovenian matematiikkaolympialaiset, 12. luokan tehtävä.)

20. Osoita, että $1005^{\ln(121)} = 11^{\ln(1+3+\dots+2009)}$. (Slovenian matematiikkaolympialaiset, 12. luokan tehtävä.)



Matematiikkaolympialaiset 2009: vaikeatkin tehtävät ratkeavat

Matti Lehtinen

Helsingin yliopisto

Vuoden 2009 Kansainväliset matematiikkaolympialaiset olivat juhlakilpailu: järjestysnumero oli 50, ja ensimmäisistä Kansainvälisistä matematiikkaolympialaisista oli kulunut 50 vuotta (tämä paradoksaalinen tilanne selittyy sillä, että olympialaisia on pidetty joka vuosi lukuun ottamatta vuotta 1980). Juhlää korosti tilaisuus, jossa kuusi matematiikan huippuasemiin kohonnutta entistä kilpailijaa, joukossa kolme matematiikan tavoitelluimman kunnianosoituksen eli Fieldsin mitalin saajaa, kertoi ennätykselliselle kilpailijajoukolle – 565 osallistujaa 104 maasta – matematiikastaan ja sen yhteydestä kilpailumatematiikkaan. Historia oli esillä 104-jäsenisen tuomaristonkin kokouksissa: edustajat oli istutettu siihen järjestykseen, missä maat olivat tulleet olympiaosanottajiksi. Suomen edustaja istui siis eturivissä Mongolian ja Ranskan edustajien välissä.

Olympialaisten ydin on kuitenkin kilpailu: kuusi vaikeaa tehtävää, yhdeksän tuntia ratkaisuaikaa kahdelle päivälle jaettuna. Tuomaristo valitsi tehtävät eri maista lähetetyistä ehdokkaista ja pyrki noudattamaan tasapuolisuutta tehtävien sisällön suhteen ja samalla saamaan eroja vaikeustasoon, jotta kaikki voisivat onnistua, mutta parhaat erottuisivat.

Lukuteoriasta helpoin tehtävä

Valituksi tuli kaksi geometrista, kaksi algebrallista, yksi lukuteoreettinen ja yksi kombinatorinen tehtävä. Tuoma-

maristo arveli lukuteoreettisen tehtävän helpoimmaksi ja sijoitti sen numeroksi 1. Tuomaristo arvasikin oikein. Kaikkiaan 324 kilpailijaa sai tehtävästä täydet pisteet ja nolville jätettiin vain 83. Kun olympialaisten tehtävien arvosteluasteikko on 0–7, niin tämän tehtävän keskimääräinen pistemäärä oli 4,8, kaikista annetuista pisteistä melkein 32 % annettiin tästä tehtävästä ja 22 maata sai tehtävästä 42 pistettä eli suurimman mahdollisen määrän (yksi näistä maista oli Ruotsi).

Tehtävä oli seuraavanlainen:

Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $a_1, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) joukon $\{1, \dots, n\}$ eri lukuja niin, että $a_i(a_{i+1} - 1)$ on jaollinen n :llä, kun $i = 1, \dots, k-1$. Osoita, että $a_k(a_1 - 1)$ ei ole jaollinen n :llä.

Tämä ei ollut tehtävän alkuperäinen muotoilu. Tuomaristo käsitteli sitä aluksi tällaisena:

Eräässä kerhossa on n jäsentä. Kullakin jäsenellä on oma jäsennumero $1, 2, \dots, n$. Ajoittain jäsenet lähettävät toisille jäsenille lahjoja, ja näiden joukossa voi olla jäsenten aikaisemmin toisilta jäseniltä saamia esineitä. Jottei jouduttaisi ikävään tilanteeseen, jossa jäsen saa takaisin aikaisemmin antamansa lahjan, kerhon vuosikokouksessa tehdään seuraava sääntöjen lisäys: ”Jäsen, jonka numero on a saa lähettää lahjan jäsenelle b vain, jos n on luvun $a(b-1)$ tekijä.” Osoita, että jos kaikki jäsenet noudattavat tätä sääntöä, kukaan

ei saa toiselta jäseneltä lahjaa, jonka itse on antanut jollekin jäsenelle.

Tarinan keinotekoisuus johti valitsemaan abstraktimman esitysmuodon; saattaa olla, että tehtävästä näin tuli helpompikin.

Tehtävän ratkaisemiseksi kannattaa sen oletus kirjoittaa kongruenssimuotoon:

$$a_i a_{i+1} \equiv a_i \pmod{n},$$

kun $i = 1, 2, \dots, k-1$. Siis $a_1 a_2 \equiv a_1$, $a_2 a_3 \equiv a_2$, joista $a_1 a_2 a_3 \equiv a_1$ ja niin edelleen, kunnes saadaan

$$a_1 \cdots a_{k-1} a_k \equiv a_1 \pmod{n}.$$

Tehdään vastaoletus $a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}$. Silloin voidaan tehtävän oletusta soveltaa uudestaan pudottamaan termiä tulon loppupäästä:

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv a_1 \cdots a_{k-1} a_k = a_k a_1 \cdots a_{k-1} \\ &\equiv a_k a_1 \cdots a_{k-2} \equiv \cdots \equiv a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}. \end{aligned}$$

Koska a_1 ja a_k ovat eri lukuja, niiden erotuksen on oltava ainakin n . Mutta tämä ei ole mahdollista, koska $a_1, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vastaoletus johti ristiriitaan, joten se on väärä.

Geometria oli helpommasta päästä

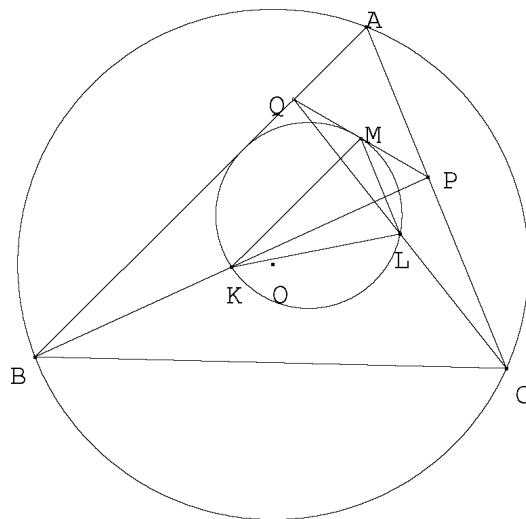
Kaksi geometrian tehtävää arvioitiin vaikeudeltaan helpoiksi tai keskinkertaisiksi ja helpompi sijoitettiin toisen päivän ykköstehtäväksi. Tässä tuomariston arvio hiukan petti, sillä vaikeammaksi arvioitu tehtävä numero 2 tuotti pisteitä enemmän. Täydet pisteet annettiin 214 kilpailijalle, nolla 101:lle; pistekeskiarvo oli 3,7 ja tehtävä tuotti lähes 25 % kaikista annetuista pisteistä. Joukkueista kymmenen sai tehtävästä täyden pistepotin. Näistä Iran, Unkari, Romania ja Ukraina eivät kuitenkaan koko kilpailussa mahtuneet parhaaseen kymmenikköön.

Tehtävä on varsin perinteinen geometrinen todistustehtävä, jossa jonkin verran mutkikkaasti kuvaillusta tilanteesta on löydettävä olennainen.

Olkoon ABC kolmio ja O sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Piste P on sivun CA sisäpiste ja piste Q sivun AB sisäpiste. Pisteet K , L ja M ovat janojen BP , CQ ja PQ keskipisteet, tässä järjestyksessä, ja Γ on pisteiden K , L ja M kautta kulkeva ympyrä. Oletetaan, että suora PQ on ympyrän Γ tangentti. Osoita, että $OP = OQ$.

Tehtävän monista ratkaisutavoista hauskimmalta vaikuttaa seuraava, pisteen potenssia ympyrän suhteen hyödyntävä päättely. Palautetaan mieleen tarvittavat asiat pisteen potenssista. Piste X potenssi ympyrän

C suhteenhan saadaan piirtämällä X :n kautta mielivaltainen suora, joka kuitenkin leikkaa C :n pisteissä Y ja Z . Tällöin tulo $XY \cdot XZ$ on aina sama riippumatta siitä, miten suora asetetaan. Jos suora asetetaan C :n keskipisteen kautta, ja X on C :n sisällä, niin X :n potenssiksi tulee $(R+d)(R-d) = R^2 - d^2$, missä R on C :n säde ja d on X :n etäisyys C :n keskipisteestä. Potenssi riippuu siis vain etäisyydestä, ja pisteet, joilla on sama potenssi, ovat samalla etäisyydellä keskipisteestä.



Pyritään nyt osoittamaan, että P :llä ja Q :lla on sama potenssi kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän suhteen. Pyritään siis todistamaan, että $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$. Kuvio tarjoaa eräitä ilmeisiä johtolankoja. Koska M ja L ovat kolmion CQP sivujen keskipisteet, $PC = 2 \cdot ML$ ja $ML \parallel PC$. Yhdensuuntaisuus antaa heti seurauksen $\angle LMP = \angle MPA$. On myös hyödynnettävä tietoa, jonka mukaan QP on ympyrän Γ tangentti. Melkein väistämättä tulee mieleen kehäkulmalause. Sen mukaan $\angle LMP = \angle MKL$. Siis $\angle MKL = \angle QPA$. Aivan samalla tavalla osoitetaan, että $QB = 2 \cdot MK$ ja $\angle MLK = \angle AQP$. Nyt onkin riittävästi tietoa, jotta voidaan todeta kolmiot AQP ja MLK yhdenmuotoisiksi. Siis

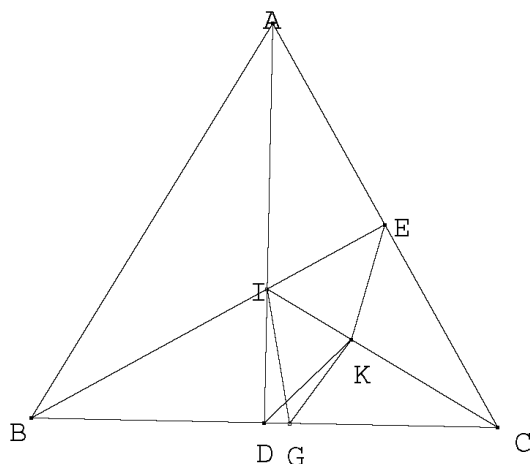
$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{QB}{PC}.$$

Mutta tähän merkitsee, että $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$, ja väite on todistettu.

Toinen geometrian tehtävä oli siis sarjan numero 4, toisen kilpailupäivän helpoimmaksi arvioitu tehtävä. Sel-laiseksi se muodostuikin, ainakin pistekeskivarvolla 2,9 mitattuna. Jaetuista pisteistä 19 % tuli tästä tehtävästä. Täysiin pisteisiin pääsi vain 100 kilpailijaa ja vain kaksi joukkuetta, Kiina ja Venäjä, saivat puhtaan pistetilin. Tehtävä oli siis selvästi edellä käsiteltyä toista sarjan geometrista tehtävää vaikeampi.

Tehtävän muotoilu oli kysymys, ei todistus. Ratkaisu on hiukan yllättävä.

Olkoon ABC kolmio, jossa $AB = AC$. Kulmien CAB ja ABC puolittajat leikkaavat sivut BC ja CA pisteissä D ja E , tässä järjestyksessä. Olkoon K kolmion ADC sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Oletetaan, että $\angle BEK = 45^\circ$. Määritä $\angle CAB$:n kaikki mahdolliset arvot.



Tehtävän kuvioon on helppo sijoittaa tuntemattomaksi kulmaksi $\angle CAB$, sen puolikas tai neljäsosa, ja ruveta laskemaan muita kuvion kulmia siinä toivossa, että löytyisi yhtälö, josta tuntematon olisi ratkaistavissa. Tämä ei kuitenkaan onnistu, ellei käytetä hiukan muutakin geometrista päättelyä. Merkitään kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipistettä I :llä. Koska kolmio ABC on tasakylkinen, kulman puolittaja AD on kohtisuorassa BC :tä vastaan. Koska K on kulman ADC puolittajalla, niin $\angle IDK = 45^\circ$. Peilataan nyt CA yli kulman ACB puolittajan CI . Silloin puolisuora CA peilautuu puolisuoraksi CB ja piste E peilautuu tämän puolisuoran pisteeksi G . Nyt saattaa olla niin, että $G = D$. Tällöin jana EI on peilautunut janaksi DI , joten $\angle IEC = \angle IDC = 90^\circ$. Mutta silloin kolmion ABC B :stä piirretty korkeusjana ja kulmanpuolittaja yhtyvät. Tämä on mahdollista vain, jos kolmio on tasakylkinen eli $BC = BA$. Mutta silloin kolmion ABC kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten $\angle BAC = 60^\circ$.

Voi myös käydä niin, että $G \neq D$ ja että G on D :n ja C :n välissä. Nyt $\angle IGK = \angle IEK = \angle BEK$. Jos $\angle BEK = 45^\circ$, niin $\angle IGK = \angle IDK$. Pisteet I, D, G ja K ovat samalla ympyrällä. Tällöin $\angle EIK = \angle GIK = \angle GDK = 45^\circ$, $\angle BIC = 180^\circ - \angle EIK = 135^\circ$, $2 \cdot \angle BCI = 45^\circ$, $2 \cdot \angle BCA = 90^\circ$ ja $\angle BAC = 90^\circ$.

Kolmas mahdollisuus olisi, että G olisi B :n ja D :n välissä. Silloin olisi samoin $\angle EIK = \angle KIG = \angle KDC = 45^\circ$, $\angle BIC = 135^\circ$ ja saataisiin $\angle BAC = 90^\circ$. Itse asiassa tämä tilanne on kuitenkin mahdoton, esimerkiksi koska olisi $\angle GIE = \angle GIK + \angle EIK = 90^\circ$, jolloin kolmiossa BGI olisi suora kulma BIG ja tylppä kulma BGI .

Kulman $\angle BAC$ ainoat mahdolliset arvot ovat siis 60° ja 90° . Ratkaisu tulee kuitenkin täydelliseksi vasta, kun varmistetaan, että näillä arvoilla todellakin $\angle BEK = 45^\circ$. (Tämän osion puuttumisesta sakotettiin 2 pistettä.) Olkoon siis $\angle BAC = 60^\circ$. Silloin $BE \perp AC$ ja peilaus yli IC :n kuvaa D :n E :lle. Koska $\angle IDK = 45^\circ$, on $\angle IEK = 45^\circ$, ja asia on kunnossa. Olkoon sitten vielä $\angle BAC = 90^\circ$. Silloin $\angle AIE = \angle BID = \angle BEA = 90^\circ - 22,5^\circ$ ja $\angle EIK = 180^\circ - 2 \cdot \angle BID = 45^\circ$. Kolmio AIE on tasakylkinen, joten peilauksessa yli AK :n I ja E vastaavat toisiaan. Siis $\angle IEK = \angle EIK = 45^\circ$.

Geometrian tehtävät tuottivat vastaajille noin 44 % kaikista pisteistä. Suomen kuudelle kilpailijalle geometria antoi vain 16 % pisteistä. Geometrian osaamisvajetta, jota tämän kirjoittaja on monesti valitellut, merkitsee huomattavaa tasoitusta muille joukkueille. Jossitellen: pelkästään ”keskimääräisellä” geometrian osaamisella Suomen sijoitus olisi noussut noin 15 pykälää.

Algebraa kokonaislukujonoilla

Tehtäväsarjaan valikoitui kaksi algebrallista tehtävää. Kummassakin oli kyse kokonaislukujonoista, vaikka toinen tehtävistä tuli funktionaaliyhtälötehtävän kaavussa. Tätä pidettiin etukäteen tehtävistä helpompana, ja se sijoitettiin numeroksi 5 eli toisen kilpailupäivän ”keskinkertaiseksi” tehtäväksi. Sellaiseksi se muodostuikin. Tehtävän ratkaisi oikein useampi kilpailija, nimittäin 153, kuin saman päivän ensimmäisen tehtävän. Toisaalta kokonaan ilman pisteitä tehtävä jätti 270 kilpailijaa ja tehtävän pistekeskiarvo oli 2,5. Peräti kahdeksalle joukkueelle tehtävä onnistui täydellisesti. Yksi joukkueista oli Puola, jonka kokonaissijoitus oli 25.

Tehtävässä on lievä geometrinen sivumaku, käsitelläänhän siinä lukuja, jotka voivat olla kolmion sivujen pituuksia:

Määritä kaikki sellaiset positiivisten kokonaislukujen joukossa määritellyt funktiot f , joiden arvot ovat positiivisia kokonaislukuja ja joilla on seuraava ominaisuus: kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b on olemassa (ei-surkastunut) kolmio, jonka sivujen pituudet ovat

$$a, \quad f(b) \quad \text{ja} \quad f(b + f(a) - 1).$$

Tehtävän ratkaisu on hiukan mielikuvitukseton: osoitetaan nimittäin, että ainoa ratkaisu on identtinen funktio $f(x) = x$. Varmistutaan ensin, että tämä funktio kelpaa. Olkoon siis $f(x) = x$ ja olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Kolmion sivujen pituuksiksi ovat tarjolla a, b ja $c = a + b - 1$. Nyt $c < a + b$, mutta $c \geq a \geq 1$ ja $c \geq b \geq 1$. Silloin $c > |a - b|$, joten kolmio, jonka sivut ovat a, b ja c on olemassa.

Osoitetaan sitten, että $f(x) = x$ on ainoa ratkaisu. Tähän päästään soveltamalla toistuvasti kolmioepäyhtälöä, jonka mukaan kolmion kahden sivun pituuksien summa on aidosti suurempi kuin kolmas sivu. Osoitetaan ensin, että $f(1) = 1$. Jos olisi $f(1) = 1 + m > 1$, muodostaisi kaikilla a kolmikko $1, f(a), f(a + m)$ kolmion sivujen pituudet. Silloin olisi $f(a) - 1 < f(a + f(1) - 1) < f(a) + 1$. Koska f :n arvot ovat kokonaislukuja, on välttämättä $f(a + f(1) - 1) = f(a)$ kaikilla a . Jos olisi $f(1) - 1 = m > 0$, f voisi saada enintään m eri arvoa $f(1), f(2), \dots, f(m)$, ja jokin niistä olisi suurin; olkoon tämä suurin M . Mutta silloin ei olisi kolmiota, jonka sivut olisivat $2M, f(b)$ ja $f(b + f(2M) - 1)$. Onkin oltava $m = 0$ eli $f(1) = 1$.

Osoitetaan seuraavaksi, että f on niin sanottu *involuutio* eli että $f(f(a)) = a$ kaikilla a . Tämä seuraa siitä, että $a, 1 = f(1)$ ja $f(1 + f(a) - 1) = f(f(a))$ ovat kolmion sivut. Involuutiokuvaukset ovat niin sanottuja injektioita: ne saavat eri pisteissä eri arvot. Jos nimittäin $f(a) = f(b)$, niin $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Käytetään hyväksi tätä ominaisuutta.

Koska f on injektio, $f(2) \neq 1$, joten $f(2) = 1 + c$, missä $c \geq 1$. Jos b on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin $2, f(b)$ ja $f(b + f(2) - 1) = f(b + c)$ ovat kolmion sivut, joten $f(b) - 2 < f(b + c) < f(b) + 2$ tai $f(b) - 1 \leq f(b + c) \leq f(b) + 1$. Koska $f(b + c) \neq f(b)$, niin $f(b + c) = f(b) \pm 1$. Koska $f(1 + c) = f(f(2)) = 2$, $f(1 + 2c) = f(1 + c) \pm 1 = 2 \pm 1$. Injektiivisyyden vuoksi ei voi olla $f(1 + 2c) = 1$. Siis $f(1 + 2c) = 3$. Induktiolla nähdään helposti, että $f(1 + kc) = k + 1$ kaikilla luonnollisilla luvuilla k . Jos olisi $c > 1$, olisi $f(c) = f(1 + kc)$ jollain luonnollisella luvulla k . Tämä on mahdotonta, joten on oltava $c = 1$. Tästä seuraa, että $f(1 + k) = 1 + k$ kaikilla $k \geq 0$.

Osoitetaan sitten induktiolla, että $f(x) = x$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x . Tiedämme jo, että $f(1) = 1$. Oletamme, että $f(k) = k$, kun $1 \leq k \leq n$. Koska $1, n + 1$ ja $f(n + 1 + f(1) - 1) = f(n + 1)$ ovat kolmion sivut, $f(n + 1) < n + 2$ eli $f(n + 1) \leq n + 1$. Jos olisi $f(n + 1) = k \leq n$, olisi $f(n + 1) = f(k)$, mikä olisi ristiriidassa f :n injektivisyyden kanssa. Siis $f(n + 1) = n + 1$, induktioaskel on otettu ja todistus on valmis.

Toinen algebrallinen tehtävä oli ennakoarvioissa vaikea. Se sijoitettiin ensimmäisen kilpailupäivän viimeiseksi tehtäväksi. Ei tehtävä helpoksi osoittautunutkaan. Sen ratkaisi oikein 51 kilpailijaa, pistekeskiarvo oli 1,0 ja tehtävä tuotti alle 7 % jaetuista pisteistä. Kokonaan pisteittä tehtävä jätti 357 kilpailijaa. Kiina oli ainoa joukkue, jonka jäsenille myös tämä tehtävä tuotti täyden potin.

Tehtävä koski kokonaislukujonoa, johon oli ovelasti upotettu kaksi aritmeettista osajonoa. Tehtävän tulos-ta voi pitää yllättävänä ja kauniinakin.

Oletetaan, että $s_1, s_2, s_3, \dots$ on aidosti kasvava positiivisten kokonaislukujen jono ja että molemmat osajonot

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{ja} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

ovat aritmeettisia jonoja. Osoita, että myös jono $s_1, s_2, s_3, \dots$ on aritmeettinen jono.

Jono (s_n) on aritmeettinen jono, jos sen peräkkäisten termien erotus on vakio. Merkitään siis $d_n = s_{n+1} - s_n$ ja pyritään osoittamaan (d_n) vakiojonoksi. Ensimmäinen askel tähän suuntaan on osoittaa jono rajoitetuksi. Olkoon aritmeettisen jonon (s_{s_n}) peräkkäisten termien erotus D . Siis $D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n}$. Termien s_{s_n} ja $s_{s_{n+1}}$ välissä on ainakin d_n askelta, joista jokainen on ainakin 1. Siis $d_n \leq D$. Rajoitetussa kokonaislukujonossa on pienin ja suurin termi. Olkoon siis

$$m = \min\{d_n \mid n = 1, 2, \dots\}, \\ M = \max\{d_n \mid n = 1, 2, \dots\}.$$

Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $m = M$. Osoitetaan ensin, että $mM = D$. Jollain n on $m = d_n = s_{n+1} - s_n$. Nyt

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} \\ = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_n+m-1} \leq mM, \quad (1)$$

koska summassa on m termiä ja niistä jokainen on $\leq M$. Toisaalta jollain n' on $d_{n'} = M$. Samoin kuin edellä saadaan

$$D = s_{s_{n'}+M} - s_{s_{n'}} \\ = d_{s_{n'}+1} + d_{s_{n'}+2} + \dots + d_{s_{n'}+M-1} \geq Mm. \quad (2)$$

Siis $D = mM$. Epäyhtälöistä (1) ja (2) nähdään nyt lisäksi, että jos $d_n = m$, niin $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \dots = d_{s_{n+1}-1} = M$ ja vastaavasti jos $d_n = M$, niin $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \dots = d_{s_{n+1}-1} = m$.

Tehdään vastaoletus $m < M$. Kaikille n pätee $s_n \geq s_1 + (n - 1) \geq n$. Jos $d_n = m$, niin $d_{s_n} = M$. Tällöin on myös oltava $s_n > n$. Jos nimittäin olisi $s_n = n$, olisi $m = d_n = d_{s_n} = M$, mikä olisi ristiriidassa oletuksen $m < M$ kanssa. Samoin, jos $d_n = M$, niin $d_{s_n} = m$ ja $s_n > n$. On siis olemassa aidosti kasvava jono $n_1, n_2, \dots$, jolle $d_{s_{n_1}} = M, d_{s_{n_2}} = m, d_{s_{n_3}} = M, d_{s_{n_4}} = m$ jne. Mutta jono $d_{s_1}, d_{s_2}, \dots$ on aritmeettisten jonojen $s_{s_1+1}, s_{s_2}, \dots$ ja $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \dots$ termien erotusjono ja siis myös aritmeettinen jono. Sillä voi olla osajono, joka ei ole aidosti kasvava eikä aidosti vähenevä vain, jos se on vakiojono. Ei siis voi olla $m < M$, ja todistus on valmis.

Kombinatorinen tehtävä oli vaikein

Tehtäväksi 6, toisen kilpailupäivän ja koko olympialaisien viimeiseksi tehtäväksi on yleensä pyritty saamaan vaikein tehtävä. Tällä kertaa valinta osui tehtävään,

joka luokiteltiin kombinatoriseksi. Kokonaislukujonosta siinäkin on kysymys.

Olkooot $a_1, a_2, \dots, a_n$ keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja ja olkoon M joukko, jonka alkiot ovat $n - 1$ positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Heinäsirkka hyppelee reaaliakselilla. Se lähtee origosta ja tekee n hyppyä oikealle. Hyppyjen pituudet ovat $a_1, a_2, \dots, a_n$ jossain järjestyksessä. Osoita, että heinäsirkka voi järjestää hyppynsä niin, ettei se milloinkaan osu pisteeseen, jonka koordinaatti on joukossa M .

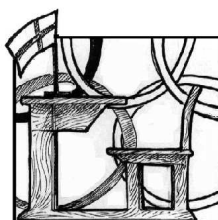
Tehtävä osoittautui vaikeaksi. Vain kolme kilpailijaa, Saksan *Lisa Sauermann*, Japanin *Makoto Soejima* ja Kiinan *Dongyi Wei* ansaitsivat täydet pisteet, tehtävän pistekeskiarvo oli 0,17 ja se tuotti noin yhden prosentin jaetuista pisteistä. Tietävästi vain kerran aikaisemmin matematiikkaolympialaisten tehtävä on näillä kriteereillä mitaten osoittautunut vaikeammaksi. Yritetään kuitenkin tehtävän ratkaisua induktiolla heinäsiirran hyppyjen lukumäärän suhteen.

Väite on ilmeisen tosi, kun $n = 1$. Oletetaan sitten, että $n > 1$ ja että väite on tosi kaikilla n :ää pienemmillä kokonaisluvulla. Voidaan olettaa, että annetut hyppyn pituudet toteuttavat ehdon $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Lukujen $1, 2, \dots, n$ permutaatio $i_1, i_2, \dots, i_n$ yksilöi silloin hyppysarjan. Olkoon d joukon M pienin luku. Luonnollisesti vain tapaus $M < s$ on mielenkiintoinen. Tarkastellaan tilannetta sen mukaan, onko $d < a_n$ vai $d \geq a_n$.

Oletetaan ensin, että $d < a_n$. Induktio-oletuksen mukaan heinäsirkka pystyy hyppimään $n - 1$:llä hypyllä, joiden pituudet ovat $a_1, \dots, a_{n-1}$ pisteestä a_n pisteeseen s . Kun sarjaan liitetään hyppy origosta a_n :ään, saadaan vaadittu hyppysarja.

Olkoon sitten $a_n = d$. Tarkastellaan $n - 1$:tä joukkoa, joista jokaisella kahdella on tyhjä leikkaus: $\{a_1, a_1 + a_n\}$, $\{a_2, a_2 + a_n\}$, $\dots$, $\{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$. Koska $M \setminus \{d\}$:ssä on $n - 2$ alkioa, ainakin yksi joukoista ei sisällä yhtään M :n alkioa. Olkoon se $\{a_i, a_i + a_n\}$. Joukossa $M \cap [a_i + a_n, s]$ on enintään $n - 3$ alkioa, koska $d, a_n < a_i + a_n$. Induktio-oletuksen perusteella heinäsirkka voi hypellä pisteestä $a_i + a_n$ pisteeseen s käyttäen kaikkia muita hyppyn pituuksia kuin a_i ja a_n . Jos nyt ensimmäinen hyppy on a_i ja toinen a_n ja siten tehdään mainitut $n - 2$ hyppyä, saadaan vaadittu sarja.

On vielä käsiteltävä tapaus $d > a_n$. Olkoon $M' = M \setminus \{d\}$. Induktio-oletuksen perusteella heinäsirkka voi hyppiä pisteestä a_n pisteeseen s käymättä joukon M' pisteissä. Olkoon hyppyjärjestys $(i_1, \dots, i_{n-1})$. Jos tämä reitti ei käy pisteessä d , niin $(n, i_1, \dots, i_{n-1})$ on kelvollinen hyppyjärjestys. Muussa tapauksessa voidaan olettaa, että heinäsirkka osuu d :hen hypyllä i_j . Nyt $(i_1, i_2, \dots, i_j, n, i_{j+1}, \dots, i_{n-1})$ on myös hyppyjärjestys, joka välttää muut M :n pisteet kuin d :n. Koska $a_{j+1} < a_n$, järjestys $(i_1, i_2, \dots, i_j, i_{j+1}, n, \dots, i_{n-1})$ välttää myös d :n. Todistus on valmis.



Matematiikkadiplomeja Solmun avulla

Marjatta Näättänen

Dos., Helsingin yliopisto

Mikä on matematiikkadiplomi?

Jyväskylän normaalikoulun opettaja KT *Pirjo Tikkanen* sai idean matematiikkadiplomista Kirjan ja Ruusun päivänä 2007, jolloin koulussa jaettiin alakoululaisille diplomeita lukuharrastuksesta. Lukudiplomi on oppilaiden lukuharrastusta kannustava tunnustus, joka on ollut tarjolla jo vuosia. Pirjo Tikkanen alkoi miettiä, voitaisiinko tarjota vastaavaa myös matematiikassa. Hän tunsikin matematiikkalehti Solmun ja kysyi minulta, voisiko Solmu toimia jakelukanavana. Aikani mietittyäni lupasin yrittää. Solmun etusivulta <http://solmu.math.helsinki.fi> löytyy nyt reitti matematiikkadiplomin sivulle, siellä on ohjeet ja 1., 2. ja 3. Diplomi tehtävineen. Kauniit luontoaiheiset ja lapsia motivoivat diplomit on suunnitellut graafikko Marjaana Beddard. Toimintaa on rahoittanut *Jenny ja Antti Wihurin säätiö*.

Lukudiplomin tavoin myös matematiikkadiplomin on tarkoitus antaa mahdollisuus hausalle ja hyödylliselle harrastukselle, tarjota haasteita ja hauskaa toimintaa lapsille. Diplomitehtäviä voi tehdä yksin, kaverien kanssa, perheen yhteisenä harrastuksena, oppitunnilla. Diplomitehtävät sopivat myös kerhotoimintaan ja yksityiseen kertaukseen. Diplomitoiminta ei ole oppilaiden välistä kilpailua, vaan oppilaille tarjotaan hauskoja ja haastavia tehtäviä jo ensi luokasta alkaen. Niillä oppilas voi ottaa mittaa itsestään. Jotkut tehtävät ovat helpoja, jotta kaikki pääsevät mukaan, toiset taas haastavat vaativampaan pohdintaan. Ajatteluahan on kehi-

tettävä samoin kuin lihaksia. Ellei harjoittele, ei edistyäkään. Tehtäviä ratkaistaessa on toivottavaa keskustella toisten kanssa, jotta matematiikan kielen käyttö kehittyy ja itse kukin joutuu pukemaan sanoiksi ajattelunsa. Oppilas saa pyytää neuvoa ja tehdä yhteistyötä. Tärkeintä on, että innostus herää ja oppilaat huomavat oppivansa matematiikkaa. Diplomi palkitsee harrastuksen ja antaa ponnistelun jälkeisen tuloksen ilon.

Matematiikkadiplomin tehtävät

Tehtävät syventävät Perusopetuksen opetussuunnitelman 2004 matematiikan sisältöalueita. Diplomit eivät kuitenkaan ole tiukasti sidottuja vuosiluokkiin, vaikkakin diplomien numerointi 1., 2., jne. kertoo etenemisestä suunnilleen vuosiluokkien mukaisesti.

Esimerkiksi ensimmäiselle luokalle on tehtäviä luvuista ja laskutoimituksista, algebran alkeista, geometriasta ja mittaamisesta, tietojen käsittelystä ja tilastoista, eri vaihtoehtojen etsimisestä sekä ongelmanratkaisusta. Näitä tehtäviä ratkaistaan tulosteelle kirjoittaen ja piirtäen, jotta erittäin tärkeä ja nykyisin liian vähälle harjoitukselle jäävä hienomotoriikka kehittyy. Tehtävät ohjaavat koululaisia käyttämään myös toimintavälineitä ongelmien ratkaisemiseksi. Esimerkiksi piirrettyä kynää mitataan pienillä ja isoilla paperiliittimillä. Niiden tarkoituksena on tarjota oivallus mittayksikön merkityksestä mittaustulokseen. Kuvioiden pinta-alan mittaamiseksi leikataan pikkuneliöitä, joilla kuvio pei-

tetään kertaalleen. Näin oppilas saa konkreettisia kokemuksia ajattelunsa perustaksi.

Tehtävillä pyritään antamaan lapsille kokemuksia matematiikan käsitteistä, jotka tarkentuvat myöhemmin matkalla konkreettisesta abstraktiin. Matematiikan oman rakenteen tuominen mukaan on tärkeää. Esimerkiksi lukujen jaollisuutta pohjustetaan alusta alkaen, murtolukuja havainnollistetaan piirroksin paljon ennen itse murtoluvuilla laskemisen aloittamista, symmetriää käytetään hyväksi. Arviointia ja tulosten tarkistamista tehdään systemaattisesti, jotta suuruusluokat tulevat havainnollisiksi; tämä on ilmeisesti tarpeen, sillä viime aikoina on ylioppilaskirjoituksissakin annettu täysin mielettömiä vastauksia arviointia vaativiin tehtäviin.

Diplomin käyttö koulussa

Tehtävät ja diplomit ovat tulostettavissa matematiikkakalehti Solmun sivulta. Lukuvuoden alussa opettaja voi käynnistää diplomitoiminnan. Alussa tehtäviin tutustutaan tunnilla tai parilla koulussa. Kun oppilaat ovat ymmärtäneet toiminnan idean, tehtävät voidaan antaa vapaa-ajan harrastukseksi.

Opettaja voi esitellä diplomitoimintaa vanhempainillassa. On toivottavaa, että vanhemmat osallistuvat lastensa matematiikkaharrastukseen ainakin tukemalla sitä. Lukuvuoden lopulla tehtävät tuodaan kouluun diplomin saamiseksi.

Matematiikkadiplomia voidaan käyttää monella tavalla; vaikka opettaja ei heti ryhtyisikään diplomitoimintaan, hän voi kertoa siitä niille, jotka haluavat harrastaa tehtävien ratkaisua itsenäisesti, kotona tai kavereiden kanssa.

Myönteiset kokeilukokemukset

1. ja 2. Diplomin tehtäviä on kokeiltu mm. Jyväskylän normaalikoulussa. Noin puolet ykkösluokkalaisista on siellä tehnyt 1. Diplomitehtävät. Oppilaita ovat innostaneet erityisesti haasteelliset päättelytehtävät. Haukiputaalla melkein puolet kakkosluokkalaisista teki kokonaan 2. Diplomitehtävät. Heistä tehtävien suorittaminen oli mukavaa ja innostavaa, vanhemmatkin saivat hieman pohdittavaa, sillä tehtävät eivät suinkaan ole pelkkiä laskutehtäviä. Oppilaat ovat innostuneita ja ylepeitä diplomistaan. Joku oppilas on kehystänyt diplomin huoneensa seinälle. Monet oppilaat ovat tallenta-

neet diplomin muistojen laatikkoon, jossa on merkittäviä tapahtumia lapsen elämästä.

Vanhempien mukaan lapset kysyvät usein: ”Mitä nyt tekisin?” Matematiikkadiplomin tehtävät ovat tyydyttäneet lasten toiminnan tarvetta. Diplomi on myös monipuolistanut lasten harrastuksia. Matematiikan talon rakentamisessa on alkuperustus erittäin tärkeä. Ensimmäisinä vuosina syntyvät perustiedot ja asenteet. Myönteiset kokemukset kannustavat jatkamaan. Diplomitehtävissä on vaikutteita monelta taholta. Toiminnassa on mukana matematiikan opetuksesta kiinnostuneita luokanopettajia kuten Pirjo Tikkanen, joka oli idean keksijä. Suomalaisten oppilaiden kansainvälisissä oppimistulosvertailuissa tulevat säännöllisesti esille suomalaisille ominaiset jakaumat, joista huiput puuttuvat. Tuskin suomalaiset kuitenkaan eroavat muista matematiikanoppimiskykijensä suhteen. Kenties selitys onkin, ettei oppilaille tarjota kylliksi haasteita ja erityyppisiä tehtäviä sekä painoteta keskittynyttä itsenäistä työskentelyä ja ajattelua.

Diplomitoiminnan tulevaisuus

Nyt ovat valmiina 1., 2. ja 3. Diplomin tehtävät. Niitä voi tarjota oppilaille. Toiminnassa edetään sitä mukaa, kun tehtävät saadaan valmiiksi. Keväällä on aika jakaa diplomit harrastajille juhllallisessa tilaisuudessa lukudiplomien jaon yhteydessä.

Opettajien ehdotukset tehtäviksi, muut kommentit, kokemukset diplomien käytöstä ja kysymykset ovat tervetulleita. Niitä voi lähettää osoitteeseen marjatta.naatanen@helsinki.fi tai pirjo.tikkanen@hirspek.fi

Mikäli opettaja haluaa diplomitehtävien vastaukset käyttöönsä, voi hän pyytää niitä koulunsa sähköpostiin. Julkiseen jakeluun vastauksia ei sijoiteta. Suomalaisille oudoimpien tehtävätyyppien johdattelua on yleisissä ohjeissa Solmun Diplomisivuilla.

Kiitokset

Ideota ja muuta työpanosta ovat antaneet Eszter Neményi, Heli Hakulinen, Marja Huovila, Alli Huovinen, Anni Lampinen, Anna-Maija Risku, Pirjo Tikkanen. Lukuisten yksityiskohtien hiomista vaativan teknisen työn on suorittanut Juha Ruokolainen, diplomit suunnitellut Marjaana Beddard ja taloudellisen tuen on antanut Jenny ja Antti Wihurin säätiö.



Mitoista on moneksi

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Jarmo Grönros, Arja Hyvönen, Petteri Järvi, Juhani Kostet ja Seija Väärä: Tiima, tiu, tynnyri. Miten ennen mitattiin. Suomalainen mittasakirja. Turun maakuntamuseon julkaisuja 9. Viides uudistettu painos. 112 sivua.

Kun matematiikkaa sovelletaan käytäntöön, on melkein aina kysymys jonkinlaisten mittausten tuloksena syntyneiden lukujen käsittelystä. Mittaaminen ja laskento liittyvät erottamattomasti toisiinsa.

Turun maakuntamuseoon kulkeutui 1980-luvulla Turun kaupungin vakaajan mallimittakokoelma. Tämän ja muun museon kokoelmiin kuuluneen aineiston ympärille museo rakensi mittaamista ja mittavälineita esittelevän näyttelyn, joka on vuodesta 2004 kiertänyt eri museoissa. Näyttelyn luetteloa, *Tiima, tiu, tynnyri* markkinoidaan erillisenä kirjana. Sitä voi ostaa esimerkiksi Matemaattisten aineiden opettajien liiton MFKA-Kustannuksen verkkokaupasta hintaan 10,70 €. Kirjan viidennestä painoksesta, jota katselin, en löytänyt tietoa painopaikasta enkä -vuodesta.

Esipuheensa mukaan kirja kohdentuu erityisesti nuorille, joille – varmaan perustellusti – arvellaan niin vaakan, virstan, tiun kuin tikkurinkin olevan outoja. Vanhemman sukupolven laskennon oppimääriin toki vielä kuuluivat esimerkiksi lukumääränimitykset tikku-ri, tusina, tiu, kirja ja riisi ja massan yksiköt leiviskä ja sentteri, mutta ne ovat väistyneet rationaalisemman kymmenjärjestelmän ja SI-yksiköiden tieltä. Koulumatematiikan raamattu, MAOL-taulukkokirja ei niis-

tä hiiskahdakaan.

Tiima, tiu, tynnyri jakautuu kuuteen teemalukuun ja sanasto-osaan. Se keskittyy kolmeen suureeseen, pituuteen ja sen johdannaisiin alaan ja tilavuuteen eli ve-toisuuteen, aikaan ja painoon eli massaan. Kirja alkaa johdantoluvun lyhyellä esittelyllä muinaisen maailman, Egyptin ja Mesopotamian ensimmäisistä mittayksiköistä, ihmisen mukana kulkevista kyynästä, jalasta ja tuumasta sekä punnituksen yksiköistä kuten talentista ja miinasta. Katsaus hyppää sitten suoraan pohjoismaiseen keskiaikaan ja Ruotsiin, jonka käytännöt tietysti ovat olleet myös Suomessa käytettyjen mittojen perusteina.

Toinen teemaluku esittelee perusteellisemmin ja taulukoin Suomessa ennen metrijärjestelmää käytössä olleita mittoja. Kirjoittaja(t) eivät ole olleet aivan huolellisia, kun esimerkiksi sivulta 17 voi lukea allekkaisilta riveiltä tiedot ”venäläinen linja oli 1/280 tuumaa” ja ”venäläinen tuuma [oli] 2,54 cm eli 10 linjaa” ja vielä saman sivun taulukosta tiedon, jonka mukaan tuuma olisi 12 linjaa. Pintamittojen lähtökohta ei alkuaan ollut pituus kertaa pituus, vaan pellon kylvämiseen tarvittavaan siemenmäärään perustuvat tynnyrinalat ja kapanalat. Luku esittelee laajasti erilaisten tuotteiden ja tavaroiden punnituksessa käytettyjä kirjavia yksiköjä ja välineitä. Ei ihme, että kaupankäynti on ollut monimutkaista.

Kirjan kolmas luku esittelee ajan mittausta. Se alkaa filosofisilla ja runollisilla ajan olemusta koskevil-

la pohdinnoilla ja siirtyy sitten esittelemään kalenterin ja kellojen historiaa. Mielenkiintoiseen vuosisadan tai -tuhaten täyttymistä koskevaan erimielisyyteen (jonka pohjana on vuosiluvun järjestyslukuominaisuuden väärin ymmärtäminen) kirja ei kajoa, ei juuri myöskään ajanmäärityksen tähtitieteellisiin perusteisiin seurauksineen kuten kevätpäiväntasaukseen ja pääsiäiseen. Hiukan epäillen lieenee suhtauduttava kirjan ilmoitukseen, jonka mukaan ”Suomen tärkein kansallinen symboli on Turun tuomiokirkon tornikello” ja sen puolenpäivän lyönnit. Onhan meillä sentään lippu, vaakuna ja Maamme-laulu. Turkulaisnäkökulma tulee esiin myös sanasto-osassa, jossa Turun aika on omana hakusananaan.

Lukumäärän ilmauksia eli kappalemittoja käsitellään muutaman sivun verran. Niissäkin on vallinnut suuri kirjavuus: tietynlaisia tuotteita on mahtunut sopivaan kuljetus- tai myyntierään määriä, jotka ovat synnyttäneet lukumäärän nimityksiä. Luvun aines koskee oikeastaan yhtä paljon painon tai tilavuuden mittaamista, siinä kun esitellään esimerkiksi heinän tai puutavaran mittaamisen menetelmiä ja yksiköjä. Hiukan kummalliselta tuntuu toteamus, että perinteiset kappalemitat ovat käytössä edelleen, koska kenkiä ja hansikkaita ostetaan pareittain. Eiköhän pari näissä tapauksissa viittaa enemmän vastaavuuteen ja yhteensopivuuteen kuin lukumäärään.

Kirjan viides teemaluku käsittelee rahaa, ennen muuta Ruotsin ja Suomen rahajärjestelmän historiaa. Rahan mittaaminen on alkuaan ollut metallin painon (tai pedantin käsityksen mukaan massan) mittaamista ja mittauksen oikeellisuuden takaamista kolikkoon lyödyn leiman avulla. Eri metallien käyttö on tehnyt rahojen arvon vertailun monimutkaiseksi. Seteliraha on ruotsalainen 1600-luvun innovaatio.

Kirjan viimeinen teemaluku esittelee vakausjärjestelmiä, joilla on pyritty ja tietysti yhä pyritään pitämään käytössä olevat mittalaitteet samoja ja oikeita tuloksia antavina. Näkökulma on puhtaasti Ruotsin ja Suomen.

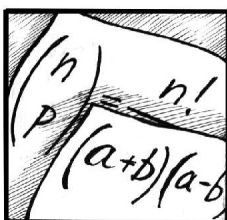
Muitakin kuin kirjan käsittelemiä suureita mitataan ja mittaukset ovat arjessakin läsnä. Esimerkiksi lämpötilan, paineen, kulman, voiman, energian ja tehon mittaamiseen liittyy erilaisia yksiköjä ja mittakojeita, jotka ansaitisivat varmaan paikkansa mittausta esittelevässä teoksessa.

Kirjan laajin osa on 39-sivuinen aakkosellinen sanasto, jossa on 587 hakusanaa (useissa tietysti samankuuloisia rinnakkaisasuja). Sanojen selitykset vaihtelevat yhden rivin pituudesta koko sivun mittaiseen palstaan. Sanavalinnan perusteet eivät lukijalle aivan kirkkaasti au-

kea. Mukana ovat esimerkiksi kuukaudet ja viikonpäivät, loppiainen, kiirastorstai ja tuhkakeskiviikko, muttei joulua, juhannusta tai pääsiäistä, karkauspäivä muttei karkausvuotta, sotilasyksiköjä ryhmästä divisioonaan ja armeijakuntaan, esiintyjien lukumäärää osoittavia musiikkitermejä kuten duo ja duetto, muttei tertsettiä (ja intervallin nimi kvintti on virheellisesti kvinteton merkityksessä!) sekä erinäisiä paikallisia ja kansanomaisia termejä kuten kápäläjuhla (nimen sanotaan tarkoittavan helatorstaita, koska silloin oli tapa mennä kävellen virsut jalassa Ruokolahdelta Rautjärvelle). Uudempaa sanastoa edustavat sikspäkki ja mäyräkoira (muttei transistori, jota nimitystä kuuden olutpullon pakkauksesta omassa nuoruudessaani käytettiin). Rahojen slanginimityksistä mukaan on otettu femma, mutta hunttia, satkua tai kybää ei löydy. Sanaston hakusanoista useat on varustettu ruotsinkielisellä käännöksellä. Lukija jää tätä monessa kohdin ihmettelemään. On toki ymmärrystä lisäävää, kun kippunnan ruotsalainen vastine skeppund kerrotaan, mutta miksi hakusanan keskiviikko vastine on ilmoitettava. Ja kun törmää sanoin ”Karoliini (Karolin ursprungligen Carolin)” tai ”Denga eli denezka (Denga elle deneschka)” otsikoituihin hakusanoihin, alkaa epäillä jonkinlaista huolimattomuutta ruotsinkielisen alkuperäislähteen hyödyntämisessä.

Kriittisistä huomautuksista huolimatta on selvää, että hakusanoissa on erittäin paljon hyödyllistä tietoa erilaisten entisajan mittojen välisistä suhteista ja niiden koosta nykyään ymmärretyin termein. Hauskaa olisi epäilemättä ollut myös anglosaksisten mittojen esittely. Niihinhan itse asiassa törmää yhä useammin. (Kirjasta löytyy kyllä hakusanan jalka kohdalta virheellinen tieto ”Englannissa nykyisinkin käytössä oleva jalka on 1/2 yardia”.) Tiima, tiu, tynnyri tuntuu monin osin jääneen ruotsalaisen esikuvansa vangiksi. Tätä esikuvaa ei teoksessa suoraan mainita, mutta se lieenee yksi lähde-luettelon 20:stä ruotsinkielisestä teoksesta. Luettelossa on kaikkiaan 46 nimikettä, niistä yksi (sekin Ruotsia koskeva) englanninkielinen, yksi venäjänkielinen ja loput suomea.

Tiima, tiu, tynnyri on kaunis ja kauniisti kuvitettu teos. Vanhat mittayksiköt ja niiden vaihtelevan kokoiset osat antavat loputtomasti mahdollisuuksia murtolukulaskutehtäviin. Tätä voisi MFKA käyttää yhtenä mainosvalttina kirjaa markkinoidessaan. Kirja antaa aiheen toivoa hiukan paremman, kattavamman, huolellisemman ja yhtenäisemmän kriteerein toimitetun mittasanakirjan julkaisemista. Olisi mukavaa, jos kirjoittajakunnassa olisi myös luonnontieteen, matematiikan ja tieteenhistorian asiantuntemusta.



Matematiikan lähtötasotestaus Turun ammattikorkeakoulussa tekniikan ja liikenteen alalla vuosina 1999–2004 ja 2008

Raija Tuohi

Matematiikan yliopettaja
Turun ammattikorkeakoulu

Lähtökohdat

Runsaat kymmenen vuotta sitten tekniikan ja liikenteen alan matematiikan opettajat kummastelivat Turun ammattikorkeakoulussa, kuinka uudet opiskelijat sieventävät lausekkeita. Esimerkiksi lukion pitkän matematiikan suorittanut opiskelija laski $\sqrt{20} = \sqrt{16+4}$ ja sai tulokseksi $4+2=6$. Opettajista tuntui siltä, että aloittavien opiskelijoiden matemaattinen lähtötaso on vuosi vuodelta heikompi. Vuonna 1998 Turun ammattikorkeakoulun matematiikan opettajat tekniikan ja liikenteen alalta päättivät lähteä tutkimaan asiaa ja tehdä usean vuoden ajan saman testin aloittaville tekniikan opiskelijoille. Tutkimukseen osallistui vuosien kuluessa noin 20 matematiikan opettajaa.

Tutkimuksessa testattiin opintonsa aloittavien insinööriopiskelijoiden matematiikan taitoja vuosina 1999–2004. Testaukseen osallistui 2816 opiskelijaa, jokseenkin kaikki tänä aikavälinä Turun ammattikorkeakoulussa insinööriopintonsa aloittaneet opiskelijat. Opiskelijat suorittivat saman testin opintojensa alussa, matematiikan ensimmäisellä oppitunnilla, ilman apuvälineitä (laskimia ja taulukoita). Testilomake on liitteenä. Vuosia 1999–2003 koskevat tulokset julkaistiin v. 2004 Turun ammattikorkeakoulun Raportteja -sarjassa nimellä Tietoa vai luuloa – insinööriopiskelijan matemaattiset

lähtövalmiudet. Testaus uusittiin vielä syksyllä 2008 ja tällöin Turun ammattikorkeakoulussa oli 234 vastaajaa.

Tehtävien tarkastuksessa on annettu kustakin tehtävästä 1 piste vain täysin oikeasta vastauksesta. Esimerkiksi tehtävästä 12 (Ratkaise x yhtälöstä $x^2 - 2 = 0$) on vastaus $\sqrt{2}$ tuottanut nolla pistettä ja vasta $\pm\sqrt{2}$ on tuottanut yhden pisteen. Samoin tehtävän 13 (Ratkaise x yhtälöstä $x^2 - 2x = 0$) oikeaan suoritukseen on vaadittu yhtälön molemmat ratkaisut. Puolikaspisteitä ei ole annettu. Alkutestin maksimitulos on 20.

Testitulosten keskiarvot

Pitkällä aikavälillä alkutestien tulokset ovat heikentyneet. Esimerkiksi syksyn 1999 keskimääräinen tulos 6,99 poikkeaa tilastollisesti merkitsevästi (5 %:n merkitsevyystasolla) syksyn 2001 ja sitä myöhempien syksyjen tuloksista. Syksyllä 2008 alkutestien keskiarvo oli 5,68.

Koulutaustan vaikutus testituloksiin

Peruskoulupohjaisen 3-vuotisen ammatillisen tutkinnon on suorittanut suunnilleen kolmannes testatuista.

Tämän koulutaustan omaavien opiskelijoiden alkutestien keskiarvot ovat vaihdelleet vuosittain pistemäärän 3 kummallakin puolella.

Testin suorittaneista opiskelijoista noin kaksi kolmanesta on suorittanut lukion. Huomiota herättää lukion suorittaneiden opiskelijoiden tulosten keskiarvojen muuttuminen vuoden 1999 arvosta 8,98 vuoden 2008 arvoon 6,56.

Taulukossa 1 on lukion suorittaneiden opiskelijoiden tulosten keskiarvot lukion matematiikan laajuuden mukaan eriteltyinä.

Testausaika	Lukion matematiikan laajuus			
	Lyhyt		Pitkä	
	Lukumäärä	Alkutestin keskiarvo	Lukumäärä	Alkutestin keskiarvo
Syksy 1999	126	4,93	197	11,43
Syksy 2000	133	4,57	170	10,98
Syksy 2001	115	4,04	157	9,27
Syksy 2002	155	3,45	236	9,73
Syksy 2003	136	3,61	209	9,37
Syksy 2004	149	3,95	219	9,23
Syksy 2008	68	2,99	102	8,95

Taulukko 1. Alkutestin keskiarvot koulutaustan ja vastaajankohdan mukaan eriteltyinä.

Taulukkoa 1 tarkastellessa herää kysymys: ”Onko lukion suorittaneiden joukosta tullut opiskelemaan sellaisia henkilöitä, joiden matematiikan arvosanat lukiosta ovat vuosittain heikompia ja heikompia?” Vastausta on haettu tutkimalla opiskelijoiden ilmoittamia viimeisiä matematiikan arvosanoja. Taulukko 2 osoittaa pitkän matematiikan lukijoitten arvosanojen keskiarvon asetuvan välille 6,91–7,13. Vaihtelu on siis todella pientä. Lyhyen matematiikan lukeneitten matematiikan viimeisten arvosanojen keskiarvot ovat välillä 7,49–7,93. Ei siis ole suurta vaihtelua tässä. Tämän tutkimuksen valossa tuntuu siltä, että lukiosta saa matematiikassa hyviä arvosanoja helpommin kuin ennen tai sitten on tapahtunut muutoksia opetettavissa/opittavissa asiasisällöissä.

Vastausajankohta	Lukion matematiikan laajuus			
	Lyhyt		Pitkä	
	Lukumäärä	Matematiikan viimeisten arvosanojen keskiarvo	Lukumäärä	Matematiikan viimeisten arvosanojen keskiarvo
Syksy 99	126	7,81	197	7,13
Syksy 00	133	7,80	170	7,13
Syksy 01	115	7,70	157	6,91
Syksy 02	155	7,70	236	6,99
Syksy 03	136	7,93	209	6,95
Syksy 04	149	7,90	219	7,12
Syksy 08	68	7,49	102	7,00

Taulukko 2. Alkuteistiin osallistuneiden matematiikan viimeisten arvosanojen keskiarvot.

Tietotekniikan ja elektroniikan koulutusohjelmien alkutestitulosten tarkastelu

Vuosien kuluessa koulutusohjelmien vetovoima vaihtelee. Se saattaa vaikuttaa alkutestien tuloksiin. Vuosikymmen sitten tietotekniikan/tietoliikennetekniikan/elektroniikan koulutusohjelmien aloituspaikkojen määrät olivat nousussa ja tietoliikennetekniikan koulutusohjelmassa aloittaneiden opiskelijoiden alkutestien keskiarvot olivat parhaimmistoa vertailtuna Turun ammattikorkeakoulun muissa koulutusohjelmissa aloittaneiden opiskelijoiden tuloksiin. Syksyllä 2002 yhdestä alun perin tietoliikennetekniikan koulutusohjelmasta tehtiin kaksi koulutusohjelmaa: tietotekniikan ja elektroniikan koulutusohjelmat. Seuraavassa on tarkasteltu näiden kahden koulutusohjelman alkutestituloksia yhdessä mainitusta historiallisesta syystä.

Taulukossa 3 on tietotekniikan ja elektroniikan koulutusohjelmissa aloittaneiden opiskelijoiden alkutestikeskiarvoja niin, että mukana ovat vain lukion suorittaneet opiskelijat. Tuloksissa on joka vuosi selkeä ero pitkän ja lyhyen matematiikan suorittaneiden välillä niin, että pitkän matematiikan suorittaneiden tulokset ovat noin 5–7 pistettä parempia kuin lyhyen matematiikan suorittaneiden tulokset. Lisäksi havaitaan, että alkutestin keskiarvo on heikentynyt kummassakin ryhmässä vuosien kuluessa huomattavassa määrin, lyhyen matematiikan puolella arvosta 5,2 arvoon 2,6 ja pitkän matematiikan puolella arvosta 12,2 arvoon 8,2.

Vastausajankohta	Lukion matematiikan laajuus							
	Lyhyt				Pitkä			
	Lukumäärä	Alkutestin keskiarvo	Alkutestin maksimi	Alkutestin minimi	Lukumäärä	Alkutestin keskiarvo	Alkutestin maksimi	Alkutestin minimi
Syksy 99	58	5,19	10	0	112	12,15	19	3
Syksy 00	29	5,10	12	1	81	11,04	19	2
Syksy 01	53	4,47	12	0	96	10,16	19	2
Syksy 02	70	3,73	15	0	102	9,23	19	1
Syksy 03	68	3,94	12	1	90	9,01	20	0
Syksy 04	69	3,58	12	0	90	8,32	20	2
Syksy 08	41	2,61	8	1	45	8,20	16	3

Taulukko 3. Alkutestin keskiarvot tietotekniikan ja elektroniikan koulutusohjelmien osalta niin, että mukana ovat vain lukion matematiikan suorittaneet opiskelijat.

Taulukossa 4 on esitetty tietotekniikan ja elektroniikan opiskelijoiden viimeisten matematiikan arvosanojen keskiarvot. Taulukko osoittaa, että vuonna 2008 aloittaneiden opiskelijoiden lukiosta saamien matematiikan arvosanojen keskiarvot ovat hieman heikompia kuin 1999 aloittaneiden. Ehkä tietotekniikan ja elektroniikan koulutusohjelmien vetovoima on hieman laskenut vuosien kuluessa, mutta voidaanko heikommilla matematiikan arvosanoilla selittää myös alkutestin tulosten huima heikentyminen?

Koulutusohjelmien opetusjärjestelyissä on syytä ottaa huomioon lähtötason muuttuminen ja erityisesti huomattavaa on, että lukion lyhyen matematiikan suorittaneet opiskelijat ovat alkutestin perusteella heikomalla matemaattisella tasolla kuin ammatillisen tutkinnon suorittaneet. Ammatillisen tutkinnon suorittaneiden opiskelijoiden alkutestikeskiarvo oli 3,66 elektroniikan ja tietotekniikan koulutusohjelmissä vuonna 2008.

Vastaus- ajan- kohta	Lukion matematiikan laajuus							
	Lyhyt				Pitkä			
	Lukumäärä	Matematiikan viimeinen arvosana			Lukumäärä	Matematiikan viimeinen arvosana		
		Keskiarvo	Maksimi	Minimi		Keskiarvo	Maksimi	Minimi
S1999	58	8,12	10	5	112	7,20	10	5
S2000	29	8,11	10	6	81	7,22	10	5
S2001	53	7,80	10	5	96	7,10	10	5
S2002	70	7,60	9	5	102	6,96	9	5
S0003	68	7,66	10	5	90	7,00	10	5
S2004	69	7,82	10	5	90	6,91	9	5
S2008	41	7,70	10	6	45	6,83	9	5

Taulukko 4. Matematiikan viimeisen arvosanan keskiarvot tietotekniikan ja elektroniikan koulutusohjelman osalta niin, että mukana ovat vain lukion matematiikan suorittaneet opiskelijat.

Teknillisen korkeakoulun alkutestitulokset

Teknillisessä korkeakoulussa on tehty syksyllä 2002 ja syksyllä 2008 sama lähtötasotestaus kuin Turun ammattikorkeakoulussa. Taulukossa 5 on esitetty teknillisen korkeakoulun alkutestikeskiarvot ja opiskelijoiden ilmoittamien viimeisten matematiikan kouluarvosanojen keskiarvot. Niissä ei ole sanottavaa muutosta tapahtunut.

Vastausajankohta	Lukumäärä	Alkutesti	Viimeinen kouluarvosana
		Keskiarvo	Keskiarvo
Syksy 02	218	16,29	9,19
Syksy 08	168	16,15	8,84

Taulukko 5. Teknillisen korkeakoulun alkutestitulokset ja opiskelijoiden viimeisten kouluarvosanojen keskiarvot.

Johtopäätöksiä

Lähtötasotestaus on osoittanut ainakin, että Turun ammattikorkeakoulussa tekniikan ja liikenteen alalla matematiikan opetuksessa on otettava huomioon opiskelijoiden entistä heikompi lähtötaso. Tavallisen murtolukulaskun suorittaminen tuottaa aloittaville opiskelijoille ongelmia. Alkutestin tehtävässä 2 piti sieventää lauseke $\frac{1}{3} - \frac{1}{7}$. Tämän tehtävän on suorittanut oikein

noin kolmannes kaikista vastaajista. Voisi kuvitella jokoisen peruskoulun suorittaneen selviytyvän tehtävistä varsinkin, jos on hakeutunut opiskelemaan tekniikkaa. Tämän tutkimuksen tulos on hyvin samansuuntainen kuin Sirpa ja Reijo Ernvallin julkaisema tulos. Sen mukaan Hämeen ammattikorkeakoulussa tekniikan koulutusosalalla vain 28 % testatuista osasi jakaa oikein murtoluvun $\frac{5}{3}$ murtoluvulla $\frac{15}{7}$ ilman laskinta (Ernvall & Ernvall 2003).

Tutkimus tukee myös sitä ajatusta, että lukion matematiikan suorittaneiden taso on laskenut. Asiasta ovat kirjoittaneet esimerkiksi Matti Lehtinen ja Hannu Korhonen.

Ammattikorkeakouluun tekniikan ja liikenteen alalle hakeutuvien opiskelijoiden opetusjärjestelyissä on syytä ottaa huomioon matematiikan entistä heikompi lähtötaso. Kaikkein heikoimmassa asemassa ovat lukion lyhyen matematiikan suorittaneet.

Nyt tarvitsevat matematiikan opettajat hyviä neuvoja opetuksensa kehittämiseksi. Miten matematiikkaa voisi opettaa niin, että saisi opiskelijat innostumaan ja tekemään itsenäistä ajatustyötä?

Viitteet

Ernvall Reijo & Ernvall Sirpa. 2003. Opiskelijoiden itsearvio – haaste opetukselle. Dimensio 2/2003.

Lehtinen Matti. 2008. Matematiikkaolympialaiset Madridin helteessä. Dimensio 4/2008.

Korhonen Hannu. Opitaanko suomalaisessa koulussa matematiikkaa. Dimensio 5/2008.

Tuohi Raija, Helenius Juha & Hyvönen Raimo. 2004. Tietoa vai luuloa – insinööriopiskelijan matemaattiset lähtövalmiudet. Turun ammattikorkeakoulun raportteja 29.

Liite:

MATEMATIIKAN ALKUTESTI TURUN AMMATTIKORKEAKOULU TEKNIIKAN JA LIIKENTEEN KOULUTUSALA

Kirjoita testitehtävien ratkaisut tehtäväpaperille kunkin tehtävän kohdalle. Testissä ei saa käyttää laskinta eikä kaavastoja. Testiin saa käyttää korkeintaan 45 minuuttia.

Kirjoita nimesi tikkukirjaimin: _____

Missä koulutusohjelmassa opiskelet? Vastaa merkitsemällä oikea vaihtoehto.

Auto- ja kuljetustekniikka	
Bio- ja elintarviketekniikka	
Elektroniikka	
Kone- ja tuotantotekniikka	
Rakennustekniikka	
Rakennusalan työjohto	
Tietotekniikka (Salo)	
Tietotekniikka (Turku)	
Tuotantotalous	

Millainen on koulutaustasi? Vastaa merkitsemällä oikeat vaihtoehdot.

Olen suorittanut lukion oppimäärän	
Olen suorittanut lukion pitkän matematiikan	
Olen suorittanut lukion lyhyen matematiikan	
Olen suorittanut peruskoulupohjaisen 3-vuotisen ammatillisen tutkinnon	
Olen suorittanut muun ammatillisen tutkinnon	

Mikä on viimeisen tutkintosi matematiikan arvosana? Esitä saamasi arvosana ja käytetty asteikko, esim. 5 asteikolla 0 ... 5 tai 7 asteikolla 4 ... 10. Älä anna tässä ylioppilaskirjoitusten arvosanaa.

Arvosana ____ asteikolla ____ ... ____

Kokeen tarkastaja täyttää seuraavat kohdat.

Ratkaisut oikein tehtävissä:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Oikeita ratkaisuja yhteensä ____ kappaletta.

Nimi: _____

Merkitse nimesi paperin oikeaan yläkulmaan. Kirjoita saamasi tulos tälle paperille kunkin tehtävän kohdalle. Lisää rasti tuloksen perään ruudukkoon ilmaisemaan, miten varma olet vastauksesi oikeellisuudesta (varmas-ti oikein = 3, epävarma = 2, hyvin epävarma, arvaus = 1). Tehtävien suorituksen aikana saa esillä olla vain kirjoitusvälineet.

Sievennä seuraavat lausekkeet 1-9:

1. $|-6| + |+5| =$

1	2	3
---	---	---

2. $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}}{4} =$

1	2	3
---	---	---

3. $\sqrt{3^2 + 4^2} =$

1	2	3
---	---	---

4. $\frac{2x+2}{5} - \frac{x+1}{5} =$

1	2	3
---	---	---

5. $a^2 - (a+1)^2 + 2a =$

1	2	3
---	---	---

6. $\frac{a^2 - b^2}{a - b} =$

1	2	3
---	---	---

7. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

1	2	3
---	---	---

8. $\sin^2 x + \cos^2 x =$

1	2	3
---	---	---

9. $\ln x^2 - 2 \ln x =$

1	2	3
---	---	---

10. Järjestä pienimmästä suurimpaan murtoluvut $\frac{2}{7}, \frac{2}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}$.

1	2	3
---	---	---

11. Ratkaise R kaavasta $U = E - IR$.

1	2	3
---	---	---

12. Ratkaise x yhtälöstä $x^2 - 2 = 0$.

1	2	3
---	---	---

13. Ratkaise x yhtälöstä $x^2 - 2x = 0$.

1	2	3
---	---	---

14. Alla on esitetty yhtälöt A, B, ..., L.

Minkä yhtälön kuvaaja on

a) nouseva suora, joka leikkaa y-akselin kohdassa 5

b) alaspäin aukeava paraabeli

c) origokeskinen ympyrä, jonka säde on 5

A. $y = 2x + 5$

B. $y = -x + 5$

C. $y = 5 - 2x$

D. $y = 2 + 5x$

E. $y = 2x^2 + 5$

F. $y = -2x^2 + 5$

G. $y = x^2 - 2x + 5$

H. $y = x^2 - 5$

I. $x^2 + y^2 + 25 = 0$

J. $x^2 + y^2 - 5 = 0$

K. $x^2 - y^2 + 5 = 0$

L. $x^2 + y^2 - 25 = 0$

1	2	3
---	---	---

15. Määritä vektorin $6\vec{i} - 8\vec{j}$ pituus.

1	2	3
---	---	---

16. Laske $\vec{a} - \vec{b}$, kun $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$.

1	2	3
---	---	---

17. Derivoi x :n suhteen $x^3 + 2x - 1$.

1	2	3
---	---	---

18. Määritä $\frac{dV}{dr}$, kun $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

1	2	3
---	---	---

19. Määritä $\int 2x dx$.

1	2	3
---	---	---

20. Määritä $\int_0^1 e^x dx$.

1	2	3
---	---	---



Kaunis kirja numeroista vai lukufloppi?

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Peter J. Bentley: Numerot. Kuinka matematiikka muutti maailmaa. Suomentanut Tommi Uschanov. Ajatus Kirjat 2009. 271 sivua.

On aina oltava iloinen, kun matematiikka saa julkisuutta. Gummerus-kustannuksen Ajatus-kirjat on julkaissut suomeksi englantilaisen tietojenkäsittelytieteilijän ja tietokirjailijan Peter J. Bentley'n kirjan *The Book of Numbers*. Kirja on kaunis ja loistavasti kuvitettu: jo kanteen on punaisen satunnaislukumaton päälle painettu kuvat galaksista, mehiläiskennosta, dollarin setelistä, valoa taivastavasta prismasta, keskiaikaisesta mittalaitteen tekijästä ja Alan M. Turingista. (Kirjapainoa ei oikein pysty suoraan nimeltä kiittämään, koska ainoa tieto siitä on sijainti: Kiina.) Mutta kirjathan on tehty myös luettaviksi eikä vain selailtaviksi ja katsottaviksi. Lukukokemuksena Bentley'n kirja oli ainakin minulle pettymys. Tällainen väite on perusteltava.

Ilkeä väitöskirjan tarkastaja aloittaa huomautuksensa teoksen nimestä. Pakko on tehdä samoin. Suomen kielessä numero tarkoittaa merkkejä, joilla lukuja ilmaistaan, sellaisia kuin 1, 4, 9. Bentley'n ja yleensäkin englannin *number* on suomeksi *luku*, ja luvuista Bentley kirjoittaa. Kirjan avattuun lukija saakin eteensä sisällysluettelon, josta ilmenee, että kirjan 15 lukua on nokkelasti nimetty lukujen avulla. "Luku -1", "Luku 0", "Luku 1", "Luku $\sqrt{2}$ " jne., ja koko kirjan sisältö kiertää käsitteen luku ympärillä. Tekstissä sana luku käytetään muutenkin oikein. Mistä siis kirjalle omituinen nimi, eikä esimerkiksi alkuteoksen nimen käännös olisi kelvannut, tai *Lukukirja*?

Mutta unohdetaan nimi ja avataan kirja kunnolla. Bentley'n lennokkaasta tyylistä saadaan maku jo kirjan luvun -1 ensimmäisistä virkkeistä "Missä päin planeettaa sitten olemmekin, luvut viilettävät ohitsemme kuin lumimyrsky. Ajamme pitkin lukujen jokia. Kuuntelemme lukuja kuulokkeilla. Ranteessamme on vaihtuva luku." Makuasiat ovat makuasioita, mutta kyllä tällainen lennokkuus syö jo alkuun teoksen uskottavuutta.

Kirjan toinen luku on nimetty nollan mukaan ja siinä esitellään eri tapoja kirjoittaa lukuja. Ennen pitkää tullaan paikkajärjestelmiin (kuten kymmenjärjestelmään) ja niihin liittyvään tarpeeseen ilmaista tilanne, jossa jotain kantaluvun potenssia ei luvussa ole, siis tarpeeseen keksiä nolla. Intiassahan tämä käänteentekevä oivallus varsinaisesti tapahtui. Asiaa esitellessään Bentley johtuu käsittelemään nollalla jakamisen ongelmaa, joka tietysti alkuun oli problemaattinen. Bentley'n esitys on aika omituinen. Hän on kyllä sitä mieltä, että $7/0$ on määrittelemätön ja hän tuomitsee ankarin sanoin ne, joiden mielestä $7/0$ olisi ääretön. Sitten hän kuitenkin perustelee, että $0/0$ ei ole samalla tavalla kelvoton, että $0/0$ voi olla mikä luku tahansa! Perustelussa vedotaan markiisi l'Hôpitaliin ja hänen sääntöönsä (jota ei kuitenkaan esitetä). Minusta aika harhaanjohtavaa – kyllä $7/0$:lle voi samalla tavalla kehittää raja-arvotulkintoja, joiden mukaan osamäärä olisi esimerkiksi ääretön! Nolla-lukuun sisältyy vielä lausuntoja kalenterista ja vuodesta 0. Gregoriaanisessa järjestelmässä ei Bentley'n mukaan ole nollaa, koska "vuonna 1582 [nykyisen kalenterin käyttöönottovuonna] nolla ei

ollut luku”. Tekstistä voi toisaalta päätellä, että Bentley ymmärtää vuosilukujen olevan järjestyslukuja.

Kolmas luku, ”0,000000001” käsittelee murtolukuja ja pieniä lukuja. Liekö suomentajan syytä omituisuus, teksti ”tiedämme, että koostumme triljoonista soluista, joista kukin on noin 100000 kertaa pienempi kuin pituutemme”. Vaikka unohdamme ilmaukseen ” n kertaa pienempi kuin” liittyvät mielipide-erot, niin mittasuhteiden antama karkea arvio olisi, että ihmisessä olisi noin $(10^5)^3$ eli vain tuhannesosa triljoonaa solua. Tätä jälkimmäistä arviota tukevat muut lähteet. Pieniä lukuja koskevaan lukuun on Bentley vielä saanut mausteeksi ikivanhan intialaisen tekstin, joka alkaa ”On olemassa 7 ’ensimmäistä atomia’ (*paramanu raja*) 1 pikuruisessa pölyhiukkasessa (*renu*), 7 viimeksi mainitussa 1 pienessä pölyssä (*truti*) ...” Seitsemän kerrannaisia sisältävä ketju päättyy sormiluuuhun. Bentley laskee tästä, että muinaisintialaisen ensimmäisen atomin koko on sama kuin hiiliatomin unohtaen kuitenkin, että atomit ym. hiukkaset ovat kolmiulotteisia.

Bentleyn kirjan neljäs luku, Luku 1, on omistettu yksököselle ja luonnollisille luvuille. Esittelyssä ovat täydelliset luvut, ystävälliset lukuparit ja alkuluvut. Bentley esittää myös omituisenolaisen kysymyksen ”Kuinka voi tietää, että lisäämällä luonnolliseen lukuun 1 sen arvo lisääntyy luvulla 1?” Bentleyn mukaan tämä voidaan todistaa, ja todistuskin on kirjassa: määritellään luonnolliset luvut seuraajarelaation S avulla ja todistetaan, että $a + 1$ on aina $S(a)$. Oireellista on, että Bentley määrittelee seuraajarelaation yhdeksi ominaisuudeksi $a + S(b) = S(a + b)$ ikään kuin $S(a + b)$ olisi se tunnettu, jota $S(b)$:n määrittelemiseksi tarvittaisiin.

Kirjan viidennen luvun numero on $\sqrt{2}$. Siinä käsitellään irrationaalilukuja. Tästä luvusta saamme mm. sellaisen yllättävän tiedon, että ”Irrationaalilukujen löytämisen myötä sellaiset muodot kuin kolmiot, neliöt ja ympyrät oli mahdollista määritellä.” Tämä aasinsilta johtaakin Bentleyen esittelemään Platonin Akatemiaa, Eukleideen Alkeita ja Arkhimedesta. Päädytään algebraan, joka ”oli todella tärkeä keksintö, koska sen avulla pystymme kirjoittamaan lukuja, joita emme voi kirjoittaa”. Epäilemättä hieno keksintö tuollainen! (Samalta aukeamalta saamme myös tietää, että ”Descartes selitti myös, miten voimme kirjoittaa suoran muotoon $y = kx + b$ ” ja että tuossa k on suoran kaltevuuskulma eli kulma-kerroin.)

Kirjan seitsemäs luku on omistettu kakkoselle ja binaariluvuille. Babbagen kautta Bentley johtuu logiikkaan, Booleen, Russellin ja Gödelin sekä viimein Alan Turingiin ja tämän teoreettiseen laskulaitteeseen. Suomennoksen helmiä on Turingin koneen luonnehdinta: ”Se oli käsitteellinen kone, joka kykeni suorittamaan laskettavia toimituksia.”

Kahdeksas luku on saanut nimensä e :stä. Siinä käydään läpi logaritmit, Newton sekä differentiaali- ja in-

tegraalilaskenta. Kummallisuuksia on tässäkin, näytteenä seuraava valaiseva katkelma: ”Integroiminen toimii toiseen suuntaan [kuin derivoiminen]. Jos tiedämme kukkulan jyrkkyyden, voimme siitä laskea sen muodon. (Toisin sanottuna integroiminen tekee mahdolliseksi laskea käyrän alla olevan pinta-alan koon).”

Kirjan yhdeksäs luku ottaa teemakseen luvun 3. Luku alkaa, samoin kuin kirjan useat muutkin luvut, uskomusten ja sanomusten esittelyllä. Metsään Bentley kyllä taitaa mennä selittäessään englannin sanan *eternity*, ’ikuisuus’, olevan johdos sanasta *trinity*, ’kolminaisuus’. (*Æternitas* on jo latinassa ja palautuu ’ikää’ tarkoittavaan *ætas*-sanaan.) Kolme johtaa sitten kolmioon, tietokonegrafiikankin hyödyntämään pinnan kolmiointiin ja topologiaan. Topologiaa havainnollistetaan Königsbergin siltaongelmalla; Topologia oli Eulerin innovaatio, sillä ”Ennen Euleria sellaiset matemaatikot kuin Pythagoras ja Descartes olivat viettäneet kaiken aikansa kappaleiden mittojen ja kulmien parissa”. Eulerin kuuluisa ratkaisu perustui siihen, että ”jos graafissa on solmu, jolla on pariton määrä kaaria, graafin toisesta päästä toiseen ja takaisin ei ole mahdollista kulkea käyttäen kutakin kaarta vain kerran”. Niinhän se on. – Eulerista Bentley sanoo myös, että ”Hän myös popularisoi tiedettä (varsin samaan tapaan kuin tämä kirja).” Ei kai kukaan kääntynyt haudassaan?

Kolmosta seuraa luku π . Se ottaa ensin teemakseen Arkhimedeen, sitten erilaiset tavat määrittää π :n likiarvoja. Tästä siirrytään kulmiin – ja kytkennän edelliseen, kolmoslukuun tuo toteamus ”kolmion kussakin kulmassa on kolme kulmaa”. Samalta sivulta löytyy mesopotamialaiseen 60-järjestelmään pohjautuva perustelu kulma-asteen koolle: ”He [babylonialaiset] todennäköisesti jakoivat ympyrän 60 osaan ja kunkin osan edelleen 60 osaan, jolloin tuloksena oli 360 astetta.” Luku etenee sitten Ptolemaioksen, trigonometrian, aaltoliikkeen ja heilurin kautta Galilein inkvisitio-oikeudenkäyntiin. Bentley osaa todella yhdistellä.

Bentley tekee π :n jälkeen harppauksen suoraan lukuun 10. Paitsi lukujärjestelmän kantalukuna 10 on tietysti merkittävä mittajärjestelmistä, joiden kehitystä Bentley seuraa. Ensimmäisiä pituuden mittayksiköjen maapallon kokoon sitomista ehdottaneita oli 1600-luvulla elänyt ranskalainen *Gabriel Mouton*. Ei hän kuitenkaan ehdottanut pituusmitan *mille* eli maili mitaksi maapallon pituusastetta, niin kuin kirjassa kerrotaan, vaan pituusminuuttia. Tämä mittahan elää edelleen meripeninkulman muodossa. Epätarkkuus jatkuu, kun Bentley pääsee metrijärjestelmään. Metri ole miljoonasosa pohjoisnavan ja päiväntasaajan välisestä etäisyydestä, kuten kirjassa todetaan, vaan kymmenesmiljoonasosa. Kymmenen sattuu olemaan kolmioluku (Ensimmäinen kolmioluku on $T_1 = 1$ ja jos T_n on n :s kolmioluku, niin $T_k = T_{k-1} + k$ kaikilla k). Tästä Bentley saa aiheen loikata esittelemään Blaise Pascalia – onhan Pascalin mukaan nimetty tunnettu kolmio (ja siinä

esiintyvät myös kolmioluvut). Pascalin kolmion avulla ”voimme myös laajentaa erikoisia yhtälöitä, jotka tunnetaan binomeina”.

Kirjan luvuista minua miellyttää eniten 12. luku. Se on otsikoitu 12a:ksi ja se käsittelee – luvun 13 kautta – taikauskoa ja todennäköisyyttä.

Kirjan 13. luku hyppää matematiikan ulkopuolelle. Nimikkoluku on nyt c , valon nopeus. Käsitteelyssä on valon nopeuden määrittäminen, suhteellisuusteoria ja Albert Einstein. Valon nopeuden tärkeys perustellaan kyllä vähän kyseenalaisesti kaavalla $E = mc^2$.

Kirjan viimeiset kaksi lukua on nimetty äärettömyyden ja imaginaariyksikön mukaan. Äärettömyyden lähestymään sekä matematiikan että tähtitieteen suunnasta. Viimeiseen lukuun on saatu sijoitettua Tartaglian, Cardanon ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisun tarina. Mukaan on pujahtanut sellainenkin näkemys, että kolmannen asteen polynomin kuvaaja saattaisi olla kokonaan x -akselin ylä- tai alapuolella. Yhtälönratkaisu johtaa algebran peruslauseeseen ja Gaussiin, jonka ”todistus osoitti, että jokaiselle polynomiyhtälölle n :n asteen kompleksilukujen kentässä (jossa n on suurempi kuin 1) on n kompleksista ratkaisua”. Kompleksilukujen kautta tullaan vielä polynomi-iteraatioihin, jotka ovat monien kauniiden fraktaalikuvien lähtökohtana. Liekö suomentaja herpaantunut lopun häämöttäessä, kun viimeistä edellisellä tekstisivulla on seuraavaa: ”Jos i on esimerkiksi imaginaarinen kiertoliike, siitä pätee seuraava trigonometrinen suhde:

$$e^{i\pi} = \cos\theta + i \sin\theta."$$

Kirjan lopussa luetellaan 194 kirjallisuusviitettä. Niiden joukossa ei ole yhtään varsinaista tunnustettua matematiikan yleishistoriaa. Asiahakemiston ja matematiikan historian spiraalille taivutetun aikasuoran jälkeen tulee vielä – ikään kuin anteeksipyyntönä – kommentti siitä, että kirjassa ei ole käsitelty yhtään naista, ja kehoitus naispuolisille lukijoille pyrkiä korjaamaan tilanne.

Monenmoista puutetta kirjan lukeminen näyttää paljastavan, edellä oleva luettelo on vain näyte. On kysyttävä, suhtaudunko teokseen fakki-idiootin pedanttisuudella. Matematiikan läpikäyviä ominaisuuksia ovat toisuus ja täsmällisyys. Niitä odottaisi matematiikkaa po-

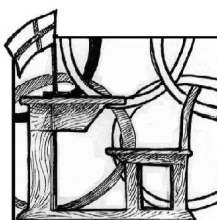
pularisoivankin teoksen kunnioittavan. Tasapuolisuuden nimissä on sanottava, että kirjaa on – ainakin tekijän kotisivuilta luettavissa kommenteissa – kiitetty kiehtovaksi, helpotajaiseksi ja ihmisläheiseksi. Viime mainittu piirre tulee läpi kirjan esille siinä, että käsiteltyjen henkilöiden kohdalla otetaan melkein poikkeuksetta esiin jokin asianomaisen inhimillinen heikkous. Saamme tietää, että Johann Bernoulli oli kelju ja kademiellinen, von Neumann pelkäsi kuolemaa, Claude Shannon sairasti Alzheimerin tautia, Einsteinin ja Mileva Marićin ensimmäinen lapsi syntyi ennen kuin pari avioitui, Georg Cantorin mielisairaus ilmeni Shakespearea koskeneina pakkomielteinä jne. Asioita yhdistelemään ja yksityiskohdasta toiseen siirtymään Bentley on ilmeisen taitava. Mikään matematiikan historian esitys ei varmastikaan esitä asioita Bentleyyn järjestyksessä.

Osa Numerot-teoksen kömpelyydestä selittyy sillä, että sen suomentaja ei selvästikään ole hallinnut asiaa ja suomenkielistä terminologiaa. Hän puhuu kuviossa, kun tarkoitetaan rakennetta, viivasta, kun tarkoitetaan janaa, uskomuksesta käsityksen sijasta, kalkyylistä differentiaali- ja integraalilaskennan tilalla ja surduluvuista juurilausekkeen sijasta. Itse riemastuin eniten siitä, että ensimmäiset tietokoneet käyttivät ”elektronisia venttiileitä”. Transistorit ja integroidut piirit ovat todella painaneet elektroniputket unohduksiin siinä kuin putkiradionkin!

Ja ne kauniit ja kehutut kuvat: osa maailman vanhimpiin matemaattisiin muistomerkkeihin kuuluvaa Rhindin papyrusta on kuvattu sivulle 31. Kuva vain sattuu olemaan ylösalaisin.

Jollain tavalla *Numerot* kolkuttaa matemaatikon omaatuntoa. Miksi tällaisen kirjan kirjoittaa matemaatikon sijasta hyvää tarkoittava ja aika paljon matemaatikasta tietävä henkilö, mutta selvästi henkilö, joka ei ole ihan sisällä asioissa, joista hän kirjoittaa. Ja miksi matemaatikot pitävät niin matalaa profilia, että kirjan kustantajalle ei tule mieleen edes tarkastuttaa suomennosta jollain asioita paremmin tuntevalla?

Muuten, huomattavasti parempi matematiikan yleistä juinen esittely- ja katselukirja on Ursan *Tiedettä kaikille* -sarjassaan vuonna 2006 julkaisema Hannu Karttusen – tähtitieteilijän – kirjoittama *Matematiikka*.



Matematiikkaa ulkona luonnossa

Aulikki Laine

Innoitus aiheeseen Ruotsista

Suomalaiset luontokoulunopettajat kiinnostuivat ulkona pidettävästä matematiikan opetuksesta ruotsalaisten kollegoidensa aloitteesta. Ruotsin luontokouluissa matematiikkaa on opetettu ulkona jo vuosia ja ruotsalainen Mats Wejdmark on käynyt pitämässä opettajille aiheesta koulutuksia Suomessakin.

Ulkona tapahtuvassa opetuksessa on omat haasteensa. Oppikirjoihin tukeutuvan opetuksen sijaan on löydetty uudenlaisia toimintamuotoja opetuksen onnistumiseksi. Luontokoulun opettajat ovat tottuneet suunnittelemaan opetuksen ulos, minkä takia on hyvin luontevaa, että juuri heidän aloitteestaan matematiikan opetuksesta ulkona innostuttiin laajemminkin.

Ruotsalaiset luontokoulunopettajat ovat koonneet käyttämänsä matemaattiset harjoitteet kirjaan ”Att lära in matematik ute”, joka on suomennettu Hyvinkään luontokoulun BSR Eagle -hankkeessa ”Ulkona luonnossa -matematiikka” -nimiseksi kirjaksi. Kirjan harjoitteita on käytetty pohjana Hyvinkään ja Hämeenlinnan kaupunkien yhteisessä oppimisympäristöjen kehittämisprojektissa, joka on ollut käynnissä Hyvinkäällä keväällä 2009 ja aloitetaan Hämeenlinnassa vuoden 2009 syyslukukaudella.

Matikkapolkuja koulujen lähimetsissä

Hyvinkään kaupungissa Opetushallituksen rahoittama Matematiikkaa ulkona luonnossa -hanke sai hyvän vas-

taanoton. Kevään 2009 aikana hankesuunnittelija teki yhdessä luokanopettajien kanssa neljä erilaista 1,5 tunnin mittaista opetuskokonaisuutta luokkien 1–4 matematiikan opetukseen. Suunnittelun alkuvaiheissa asian tuntijoina olivat mukana myös Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitoksen ja normaalikoulun opettajat Jorma Joutsenlahti ja Risto Ilmavirta.

Koulujen lähiluonnossa toteutettavista opetuskokonaisuuksista käytetään nimeä matikkapolku. Matikkapolkuja testattiin Hyvinkään koulujen lähimetsissä 18 opetusryhmän kanssa ja tulokset olivat hyviä. Oppilaat ja opettajat innostuivat aiheesta ja matematiikan opetus sujui kirjaimellisesti leikkien. Tehtävien aiheita oli 1–2-luokkalaisten mittaaminen, arviointi, lukusuora, kymppiparit ja käsitteet. Luokkien 3–4 oppilaat harjoittelivat myös arviointia ja mittaamista, vanhojen mittayksiköiden käyttöä sekä kertolaskuja. Englanninkielistään matematiikan opetusta kokeiltiin neljän ryhmän kanssa ja hyvien kokemusten myötä yksi matikkapolku käännettiin englanniksi kaikkien käyttöön.

Matikkapolkujen kytkeytyminen opetussuunnitelmaan

Matikkapolkujen tarkoituksena oli alusta lähtien tiukan matematiikan oppisisällöissä pysyttelyn sijaan luoda oppiaineiden välistä integraatiota ja eheyttää opetusta. Ulkona opetettaessa tämä toteutuu lähes itsestään. Esimerkiksi kertolaskuleikissä oppilaat laskevat kertolaskuja kuten matematiikan tunnilla ja juoksevat

metsässä kuten liikuntatunnilla. Salaisen pussin tehtäviä suorittaessaan opettaja voi helposti opettaa oppilaille kasvilajeja matemaattisten käsitteiden opetteluksi. Kertolaskusatu-tehtävään yhdistyy biologian, kuvaamataidon, matematiikan ja äidinkielen oppisisältyjä.

Oppiaineiden välinen integraatio on matikkapolkujen vahvuus verrattuna luokkatilassa tapahtuvaan kirjatyöskentelyyn. Harjoitteiden opetussisältö on kuitenkin suunniteltu puhtaasti matematiikan opetussuunnitelmasta lähtien. Vuosiluokkien 1–2 matematiikan opetuksen tavoitteissa painotetaan käsitteiden tuntemusta, keskittymisen, kuuntelun ja ajattelun kehittämisen opetusta, luonnollisen luvun käsitteen oppimista, ilmiöiden yhtäläisyyksien ja erojen löytämistä ja syy-ja seuraussuhteiden oppimista. Tehtävänä mainitaan myös arkipäivän tilanteissa eteen tulevien ongelmien ratkaisujen tehokas hyödyntäminen. Matikkapolun harjoitteet tukevat hyvin kaikkia mainittuja tavoitteita.

Luokkien 1–2 matikkapolun harjoitteiden käsitteet on valittu opetussuunnitelman 2. luokan päättyessä osattavien käsitteiden joukosta. Käsitteiden opiskelu on mielekästä konkreettisia harjoitteita tekemällä. Tähän tähtäävät muun muassa matikkapolun valkoinen liina- sekä salainen pussi -harjoitteet.

Geometrian osalta vuosiluokkien 3–5 oppisisällöissä on mainittu mittayksiköiden käyttö, vertailu ja muuntaminen sekä piirin ja pinta-alan käsitteet. Arviointi on todettu Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitoksella yhdeksi aihealueeksi, jonka osaaminen on oppilailla puutteellista. Tämän vuoksi hankkeessa on sekä luokkien 1–2 että luokkien 3–4 matikkapolkuihin sisällytetty arviointi mittaamisharjoituksien yhteyteen.

Vuosiluokkien 3–5 matematiikan opetussuunnitelman ensimmäisenä tavoitteena mainitaan oppilaan onnistumisen kokemukset matematiikan opetuksen parissa ja toisena käsitteiden oppiminen tutkien ja havainnoiden. Osa opettajista piti matikkapolkujen leikinomaisia harjoitteita turhan helppoina oppilailleen. Oppilaat kuitenkin tekivät harjoituksia innolla ja tärkeänä oppina olivat onnistumisen kokemukset käsitteiden konkreettisen ja tutkivan oppimisen keinoin. Keskittyneen työskentelyn sekä ryhmässä toimimisen oppiminen on myös OPS:n tavoitteita. Ryhmätyön merkitys korostuu monissa matikkapolkujen harjoitteissa. Testiryhmien matikkapoluilla ryhmätöiden tekoon tottumattomien luokkien vaikeudet tulivat selvästi esille. Ryhmässä toimimaan tottuneiden luokkien oppilaat pystyivät keskittymään harjoitteiden tekoon ja oppimiseen huomattavasti paremmin kuin siihen tottumattomat oppilaat.

Luokasta ulos luontoon

Opettajan voi olla haasteellista lähteä yksin luokkansa kanssa ulos pitämään oppituntia. Luokkatilassa työskentelyyn tottuneiden oppilaiden kanssa saattaa ulos mentäessä syntyä tilanteita, jolloin ryhmää on vaikea hallita. Suuret ryhmäkoot ja luokkiin sijoitetut erityislaps lapset lisäävät haasteita. Luontokoulun opettajan kokemuksella voi kuitenkin sanoa, että opetus ryhmän kuin ryhmän kanssa sujuu ulkona, kunhan pelisäännöt tehdään selväksi ennen opetuksen alkua ja sen aikana.

Vilkkaat ja energiset lapset saattavat hyötyä ulkona opetuksesta temperamentiltaan rauhallisimpia lapsia enemmän. Päästessään purkamaan energiaansa laskutoimitusten välillä juosten, oppiminen on heille yleensä mielekkäämpää ja helpompaa kuin luokkatilassa pulpetissa istuen. Toki on myönnettävä, että hyvin energisistä lapsista koostuvan ryhmän kanssa opettajan on usein käytettävä enemmän aikaa kurinpitoon kuin itse opetukseen, jos lapset eivät ole ulko-opetukseen tottuneet. Kärsivällisyys ja vaivannäkö kannattavat kuitenkin vähitellen. Tehdessään toiminnallisia harjoitteita ulkona lapsi käyttää kaikkia aistejaan kokonaisvaltaisesti. Vaikka olisi mahdollista tehdä opettajan kannalta helpommalla saman oppisisällön opetus luokkatiloissa, saattaa oppilaalle olla tärkeää ulkona tehtyjen tehtävien synnyttämä innostuneisuus ja positiivinen asenne, mikä mahdollisesti helpottaa oppimista myös jatkossa luokkatiloissa. Oppilaat, jotka eivät luokassa malta rauhoittua abstraktien tehtävien tekemiseen, saattavat ulkona olla luokkatovereitaan etevämpiä konkreettisten tehtävien suorittamisessa, mikä varmasti kohottaa tällaisten oppilaiden matemaattista itsetuntoa.

Hyvinkään projektissa suunniteltujen matikkapolkujen harjoitteet on tehty sellaisiksi, että niitä voi kuka tahansa opettaja toteuttaa koulunsa lähimetsässä. Matikkapolkujen harjoitteita voi käyttää kokonaisuutena tai tehdä yhden harjoitteen oppitunnin aluksi tai lopuksi. Oppimateriaalina ovat säänkestäviksi laminoidut tehtäväkortit, huovutetut villanarut metrin mittoina, valkoinen vahakangas ja luonnosta löytyvät kivet, kepit, kävyt ja lehdet.

Matikkapolkujen harjoitteiden kuvaukset sekä harjoitteissa tarvittavat tehtäväkortit voi tulostaa internetistä Hyvinkään kaupungin Luontokoulu Pikkutikan sivuilta osoitteesta www.hyvinkaa.fi/matematiikkaaluonnossa

Luokanopettajien kommentteja matikkapoluilta:

- ”Oli hienoa huomata, että matematiikkaa voi ’tehdä’ monella eri tavalla. Sitä löytyy kaikkialta ympäriltä, ei vain kirjan kautta sisällä istumalla.”

- ”Lapset olivat innostuneita kaikista tehtävistä.”
- ”Mittakaavaharjoitus oli mieleinen. Siinä yhdistyi rakentaminen matemaattiseen ajatteluun. Rakentamisen luonnonmateriaaleista on aina mieluista.”
- ”Mukavaa vaihtelua normaaleihin oppitunteihin.”

Kaksi esimerkkitehtävää

Tulot piilossa

Ohjaaja jakaa oppilaille lukukortit 1–36, jotka he kiinnittävät pyykkipojilla lähellä oleviin puihin tai pensasiin. Ensin tulee sopia rajat, joiden sisälle numerot saa piilottaa. Oppilaille kannattaa korostaa, että numerot tulee olla helposti leikin yhteydessä löydettävissä.

Varsinaisen tehtävän oppilaat suorittavat neljän hengen ryhmissä. Ohjaajalla on muovilaatikossa kaksi noppaa, joita ryhmät saavat heittää, kukin ryhmän jäsenistä vuorotellen. Noppien tulo ilmoittaa luvun, joka heidän tulee etsiä lähelle piilotetuista lapuista. Löydettyään lapun he ottavat sen mukaansa ja lähtevät heittämään noppaa uudestaan. Jos lappu on jo haettu, menee ryhmä heittämään uudestaan. Jos he tietävät, ettei saatujen nopanlukujen tuloa enää ole piilotetuissa lapuissa, saavat he heittää uudestaan, jotta sopiva luku tulee, kuitenkin korkeintaan kolme kertaa ennen kuin siirtyvät heittämistä odottavan jonon perälle.

Kun sopivia lappuja ei enää tahdo löytyä, muuteen laskusääntöä: kaksi ensimmäistä nopanlukua ker-

rotaan, näiden tulosta vähennetään kolmanneksi heitetty noppa. Jos tuloksesta tulee miinusmerkkinen, heitetään uudestaan. Ohjaaja voi päättää leikin sopivaksi katsomansa ajan kuluttua, jos viimeisten lappujen tuloja ei millään tahdo noppien luvuista tulla. Leikin voittaa ryhmä, jolla on eniten lappuja kerättynä.

Laskusatu

Oppilaat muodostavat neljän hengen ryhmiä. Kaikille ryhmille annetaan lapulla oma kertolasku, esimerkiksi $3 \cdot 4$. Ryhmien tehtävänä on muodostaa kertolaskusta satu tai kertomus. Sadusta tai kertomuksesta tehdään kuvitus luonnonmateriaaleja hyväksi käyttäen valkoiselle liinalle. Lopuksi kierretään katsomassa ja kuuntelemassa kaikkien ryhmien tarinat.

Esimerkkitarina kertolaskusta $3 \cdot 4$: Orava istui oksalla vanhan variksen kanssa. Ne seurasivat elämää puiden alapuolella ja juttelivat siitä keskenään. ”OO, katso orava!” varis sanoi. ”Karhut ovat heränneet talviuniltaan!” ”No, niinpä ovatkin”, totesi orava. ”Ja niitähän kulkee tuossa kolme kappaletta!” ”Niin, niin. Kolme karhua ja kaikilla niillä on neljä jalkaa. Niiden tulohan on kaksitoista jalkaa yhteensä, vai mitä oravaiseni?” totesi varis. ”Juu, näinhän se on. Niinhän se pöllö meitä opetti laskemaan”, vastasi orava varikselle.

Sadusta voi tehdä kuvituksen laittamalla tikun tai ison lehden liinalle puuksi, ruskean kaarnanpalan varikseksi, kiven oravaksi, kivistä tai kävyistä kolme karhua, joille jokaiselle tikuista neljä jalkaa.



Lue matematiikasta suomeksi

Matematiikkaa voi lukea muualtakin kuin oppikirjoista. Tässä muutama Solmun toimituksen vinkki.

Hannu Karttunen: Matematiikka (Ursa). Tiedettä kaikille -sarjan pätevänlöinen johdatus matematiikan eri alueille.

Ian Stewart: Kirjeitä nuorelle matemaatikolle (Terra Cognita). Viehättävä kokoelma kokeneen matemaatikon opastuksia matematiikan polun alkutaipaleen kulkijalle.

Mario Livio: Yhtälö, jota ei voinut ratkaista (Terra Cognita). Viidennen asteen yhtälön ongelman selvittäjät, ja aika paljon muutakin.

John Derbyshire: Alkulukujen lumoissa (Terra Cognita). Riemannin hypoteesi on tämän hetken kuuluisin matemaattinen haaste. Kirja kertoo, mistä on kysymys.

Simon Singh: Fermat'n viimeinen teoreema (Tammi). Haaste, jonka matematiikka viimein voitti.

Carl Boyer: Tieteiden kuningatar (Art House). Matematiikan pitkä historia kattavasti ja mielenkiintoisesti.

Graham Flegg: Lukujen historia (Art House). Monilla tavoin on lukumääristä puhuttu eri kulttuureissa, ja monia laitteita on keksitty.

Peter J. Bentley: Numerot (Ajatus Kirjat), **Andrew Robinson: Mittaamisen historia** (Multi-kustannus). Kauniisti kuvitettuja katselukirjoja, joiden tekstipuoli jättää vähän toivomisen varaa.

Ja jos haluaa romaaneja lukea, niin tarjolla on esimerkiksi:

Daniel Kehlmann: Maailman mittaaajat (Perhemediat). Matemaatikkojen kuningas Gauss toisessa pääosassa.

Jukka M. Heikkilä: Tyranni (WSOY) ja **Arkhimedes Syrakusalainen** (Karisto). Arkhimedes histo-

riallisten romaanien henkilönä.

Fredrik Lång: Elämäni Pythagoraana (Tammi). Oppinut fiktio matematiikan varhaisesta suurmiehestä.

Solmun uusitun etusivun kohdasta Matematiikan opetus löytyy tällaisia otsikoita

Yläaste ja lukio

- Unkarilaisvaikutteinen matematiikan opetus: yläaste ja lukio
- Tehtäviä
- Linkkejä yläasteen matematiikan opetukseen
- Linkkejä lukion matematiikan opetukseen
- K. Väisälä: Algebra
- Ylioppilaskirjoitukset

Esiopetus ja ala-aste

- Unkarilaisvaikutteinen matematiikan alkuopetus Varga-Neményi -menetelmällä
- Montessorin opetustapa

Lahjoitus matematiikan olympiavalmennukselle

Kustannusosakeyhtiö Otava on lahjoittanut Suomen matemaattisen yhdistyksen Valmennusjaostolle 40 kappaletta Kalle Väisälän kauan sitten myynnistä poistuneen ja hankalasti saatavissa olevan kirjan Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet näköispainosta. Näköispainos on erikoiserä, joka on valmistettu digipainotekniikkaa hyväksi käyttäen. Kalle Väisälän kirja sisältää – paljon muun ohessa – suomen kielellä ja helposti lähestyttävässä muodossa sen lukuteoreettisen aineksen, jonka hallinta on tarpeen matematiikkakilpailujen tehtävien ratkaisemisessa.