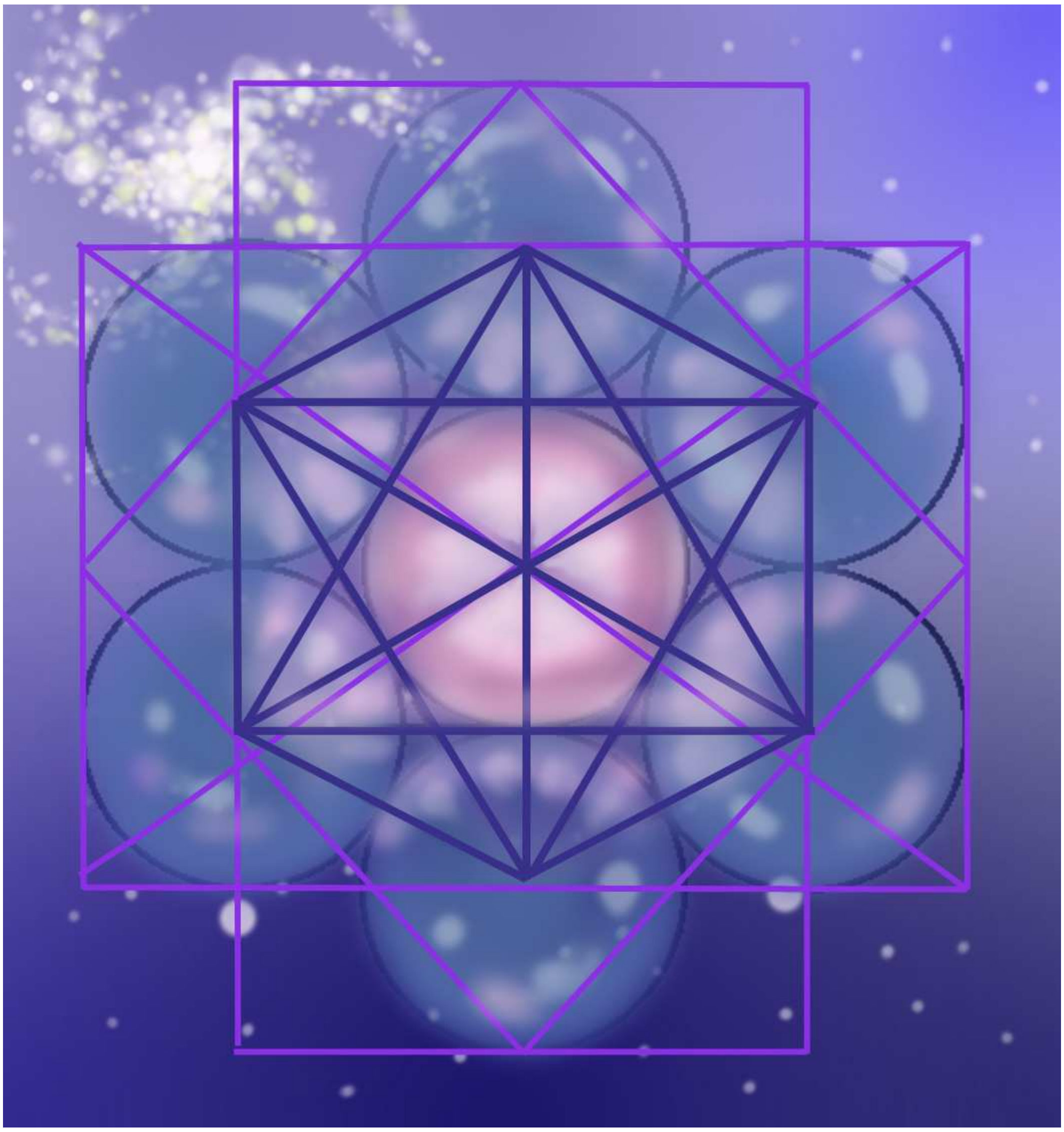
Solmu

Matematiikkalehti
1/2009

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 1/2009

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

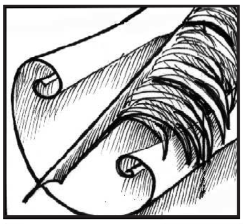
http://solmu.math.helsinki.fi/

Numeroon 2/2009 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 1.4.2009 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys



Matematiikka ja kauneus

Me matematiikkaa työksemme tehneet olemme usein ja eri tavoin kohdanneet ajatuksen matematiikan kauneudesta. Lauseke sievennetään, matemaattinen tulos tai todistus voi olla kaunis. Joku omistaa Lionel ja Coralie Salemin sekä Frederic Testardin kirjan Kauneimmat matemaattiset kaavat, toinen lukenut G. Hardyn Matemaatikon apologian tai Pál Erdösin insproiman, Martin Aignerin ja Günter Zieglerin kirjoittaman kirjan Proofs from the Book.

Mutta hiljattain tapaamani ylioppilaskirjoituksen pitkän matematiikan aikoinaan loistavasti suorittanut ja sittemmin matematiikkaa vahvasti soveltavalta alalta maisteriksi valmistunut nuori nainen kertoi hiukan katkeranakin, että hänen vasta aikuisena mieltämänsä ajatus siitä, että matematiikka saattaisi olla kaunista, ei ollut kohdannut häntä ollenkaan 12-vuotisten kouluopintojen aikana: hänen mielestään asia oli yllättävä ja jos se oli yleisemmin tiedetty, siitä olisi voitu hänelle kertoa vaikkapa lukiossa.

Todellakin – nuorta ihmistä kannustetaan matematiikanopintoihin monesta suunnasta, mutta aina samalla jossain määrin lattein perusteluin. Matematiikka on kovin tärkeää ja hyödyllistä, pitkää matematiikkaa opiskeleva voi pitää useampia tulevaisuuteen johtavia ovia avoimina kuin humanistisesti suuntautuva toverinsa ja numeroiden käsittelystä maksetaan parempia korvauksia kuin sanojen käsittelystä. Suomeksi: matematiikka on tylsää teknologiaa, insinöörioppia, se palvelee taloudellisen hyödyn tavoittelua, on siis ehkä viime kädessä tuhon voimien apuneuvo.

Toki matematiikkaa markkinoidaan sen esteettiseen viehätykseen vedoten. Solmunkin kansissa on kuvioita, joiden säännöllisyys on tulkittavissa matemaattiseksi. Fraktaaligeometrian kuviot, mielellään väritetyt, M.C. Escherin usein hyperbolisen geometrian inspiroimat teokset tai Alhambran linnan ihmeellinen seinälaattaornamentiikka saattaa kuvittaa matematiikan oppikirjoja.

Mutta mitä pohjimmiltaan on matematiikan kauneus? Kauneus on joka tapauksessa subjektiivista. Se on katsojan silmässä, kertoo universaali viisaus. Voin siis esittää vain mielipiteeni. Mielestäni matematiikan kauneus on sen yksinkertaisessa, pelkistetyssä totuudessa ja varmuudessa. Runo, kertomus tai romaani on kaunis, jos se on jossain yleisessä mielessä totta ja yleispätevää, ja ollakseen tätä sen on myös oltava yksinkertaista, heijastettava jotain monen ihmisen kokemuksen yhteistä osaa. Maalaus, veistos, kuva on (monen mielestä) kaunis, jos se pelkistää kohdettaan, muttei aivan liikaa.

Kaunis matemaattinen tulos – sanokaamme Pythagoraan lause – pelkistää, kokoaa yhteen yksinkertaiseen rakenteeseen äärettömän monta yksittäistapausta. Ja matemaattinen tulos on tosi, varmemmin kuin mikään aistihavaintoihin tai mielipiteisiin perustuva tietomme tai uskomusperäinen mielipiteemme. Nämä kaksi perusnäkökohtaa muodostavat matematiikan kauneuden todellisen perustan.

Miksi sitten matematiikan kauneus saattaa jäädä piiloon hyvältäkin koulun matematiikan osaajalta? Yksi syy on varmaan tavassa, jolla matematiikka tuodaan nuorison tietoisuuteen opetussuunnitelmien rajaamis-

Pääkirjoitus

sa paketeissa. Ne ovat täynnä laskennon ohjeita, oli laskento sitten peruslaskutoimituksia, todennäköisyyslaskentaa tai differentiaali- ja integraalilaskentaa. Ne eivät anna huomata matematiikan sisäistä totuusrakennetta, jossa lähes kaikki osat, joitakin perusolettamuksia lukuun ottamatta, rakennetaan matematiikan olennaisimman perustyökalun, todistamisen avulla. Matematiikka ei ole uskomuskokoelma, sitä ei kenenkään tarvitse ottaa vastaan valmiiksi pureskeltuna ilmoituksena.

Opetussuunnitelmat ja niiden mukaan kirjoitetut oppimateriaalit eivät välitä matematiikan totuuskauneutta. Pallo on opettajilla. Heidän, voisi sanoa ylevä tehtävänsä olisi johdattaa oppilaat myös matematiikan kauneuden luo. Ja osoittaa, että matematiikan ällistyttävä käyttökelpoisuus ei ole ollenkaan ristiriidassa sen syvän esteettisyyden kanssa.

Matti Lehtinen **Pääkirjoitus**

Matematiikkadiplomitoiminta alkaa Solmun sivuilla

Marjatta Näätänen
Dos., Helsingin yliopisto

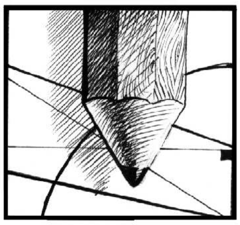
Kirjan ja Ruusun päivänä 2007 jaettiin Jyväskylän normaalikoulussa alakoululaisille diplomeita lukuharrastuksesta. Opettaja Pirjo Tikkanen alkoi miettiä, voisiko Solmun avulla aloittaa matematiikkadiplomitoiminnan. Nyt löytyvät 1. ja 2. vuoden diplomit, ohjeet ja tehtävät Solmusta. Etusivulta on reitti matematiikkadiplomin sivulle. Toimintaa rahoittaa Wihurin säätiö.

Diplomitehtävät syventävät Perusopetuksen opetussuunnitelman 2004 matematiikan sisältöalueita ja ohjaavat koululaisia käyttämään myös toimintavälineitä ongelmien ratkaisemiseksi. Lukuvuoden alussa opettaja voi käynnistää diplomitoiminnan. Tehtävät ja diplomit voi tulostaa matematiikkalehti Solmusta. Tehtäviin tutustutaan tunnilla tai parilla. Kun oppilaat ovat ymmärtäneet toiminnan idean, tehtävät voidaan antaa vapaa-ajan harrastukseksi. Diplomitoiminta ei ole kilpailua. Jotkut tehtävät ovat helppoja, jotkut haastavat vaativampaan pohdintaan. Oppilaille tarjotaan hauskoja ja haastavia tehtäviä ensi luokasta alkaen – ajattelua on kehitettävä harjoituksella. Tehtäviä ratkaistaessa voi keskustella toisten kanssa, pyytää neuvoa ja tehdä yhteistyötä. Tärkeintä on, että innostus herää ja oppilaat huomaavat oppivansa.

Matematiikkadiplomia voidaan käyttää monella tavalla. Tehtävät sopivat myös kerhotoimintaan. Opettaja voi esitellä diplomitoimintaa vanhempainillassa. Vanhemmat voivat osallistua lastensa matematiikkaharrastukseen. Lukuvuoden lopulla tehtävät tuodaan kouluun diplomin saamiseksi.

Ensimmäisen luokan tehtäviä on kokeiltu Jyväskylän normaalikoulussa. Noin puolet ekaluokkalaisista on tehnyt matematiikkadiplomitehtävät. Oppilaita ovat innostaneet erityisesti haasteelliset päättelytehtävät.

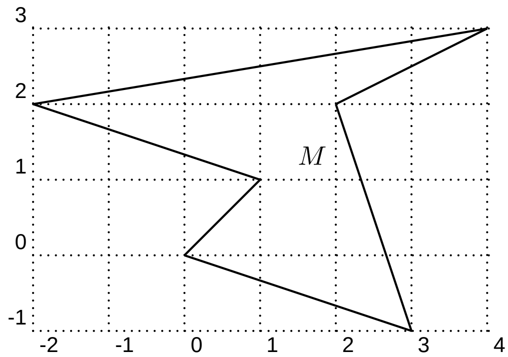
Oppilaat ovat innostuneita ja ylpeitä diplomistaan. Diplomi on monipuolistanut lasten harrastuksia. Myönteiset kokeilukokemukset kannustavat jatkamaan. Opettajien ehdotukset tehtäviksi, kommentit ja kysymykset ovat tervetulleita osoitteeseen marjatta.naatanen@helsinki.fi tai pirjo.tikkanen@hirspek.fi



Monikulmion pinta-ala koululaisille

Mika Koskenoja
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Tehtävä. Kuusikulmion M kärjet ovat tason pisteissä $(0,0)$, $(3,-1)$, $(2,2)$, $(4,3)$, $(-2,2)$ ja $(1,1)$. Laske M:n pinta-ala.



Esitän tässä kirjoituksessa tehtävälle kaksi keskenään samantapaista ratkaisua, jotka vaativat ainoastaan jo peruskoulun yläluokkien oppilaiden hallitsemia alkeisgeometrian tietoja. Jatkan samasta aiheesta Solmun jossakin tulevassa numerossa kirjoituksella ”Monikulmion pinta-ala ylioppilaille”, jossa esitän tehtävälle tyystin erilaisen ratkaisun. Tuo ratkaisu edellyttää vektorianalyysin perusteita, jotka opitaan vasta yliopistomatematiikan alussa.

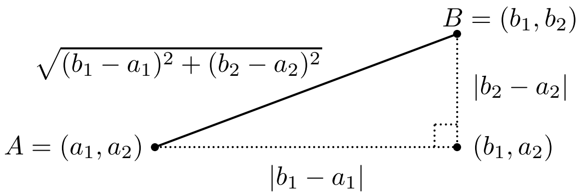
Monikulmion ositus

Osituksella tarkoitetaan monikulmion jakoa äärelliseen määrään uusia monikulmioita, jotka sisältyvät alkuperäiseen monikulmioon peittäen sen kokonaan ja jotka kohtaavat toisiaan vain reunoiltaan. Vaatimuksista seuraa, että alkuperäisen monikulmion pinta-ala on sama kuin osituksen monikulmioiden yhteenlaskettu pinta-ala. Osituksen monikulmioiden lukumäärä voidaan tarvittaessa ilmaista sanomalla, että *osituksessa on k monikulmiota.*

Pinta-alatehtävissä monikulmion osituksen tavoitteena on aikaansaada monikulmioita, joiden pinta-alan osaamme laskea. Tällaisia tuttuja monikulmioita ovat ainakin kolmiot, suorakulmiot ja (puoli)suunnikkaat. Koska muut monikulmiot voidaan osittaa kolmioiksi, niin ositus voidaan aina tehdä niin, että se koostuu ainoastaan kolmioista. Käytämme osituksissa pääasiassa kolmioita, mutta sopivissa tilanteissa myös suorakulmioita ja puolisuunnikkaita.

Osituksessa muodostettujen monikulmioiden pinta-alojen laskeminen edellyttää niiden sivujen pituuksien määräämistä, joka yleensä vaatii kärkipisteiden tuntemisen. Kun sivun (siis tason janan) päätepisteet ovat $A=(a_1,a_2)$ ja $B=(b_1,b_2)$, niin sivun pituus on Pythagoraan lauseen mukaan (katso seuraava kuva)

$$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}.$$

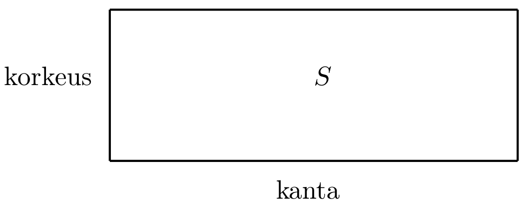


Toisinaan jonkin sivun pituuden saattaa saada helpoiten selville yhdenmuotoisuustarkastelulla, jolloin kaikkia kärkipisteitä ei edes tarvitse tuntea. Näin käy tehtävämme molemmissa ratkaisuissa. Osituksen monikulmioiden sivujen pituuksien ja kärkipisteiden selvittäminen voi joskus olla työlästä, jos alkuperäinen monikulmio on monimutkainen tai ositus monikulmioihin on tehty ajattelemattomasti.

Monikulmion erilaisia osituksia kolmioiksi ja suorakulmioiksi on olemassa lukemattomasti, sillä kolmiot ja suorakulmiot voidaan aina osittaa pienemmiksi kolmioiksi ja suorakulmioiksi. Yleensä pinta-alatehtävissä kannattaa osituksissa pitäytyä pienessä määrässä monikulmioita. Vähimpään mahdolliseen suorakulmioiden ja kolmioiden määrään pyrkiminen ei kuitenkaan aina ole laskujen kannalta suotuisaa.

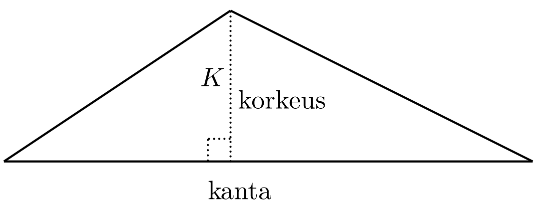
Kerrataan vielä joidenkin tuttujen monikulmioiden pinta-alojen laskukaavat. *Suorakulmion* S pinta-ala on

$$\text{ala}(S) = \text{kanta} \cdot \text{korkeus}.$$



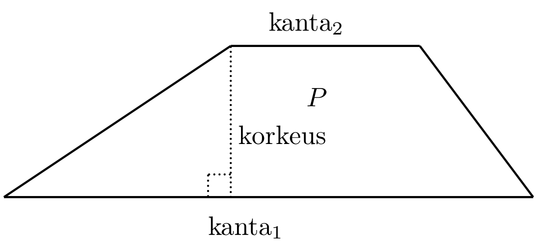
Kolmion K pinta-ala on

$$\text{ala}(K) = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}.$$



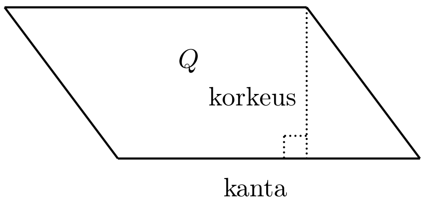
Puolisuunnikkaan P pinta-ala on

$$\text{ala}(P) = \frac{(\text{kanta}_1 + \text{kanta}_2) \cdot \text{korkeus}}{2}.$$



Suunnikkaan Q, joka on suorakulmion yleistys ja puolisuunnikkaan erikoistapaus, pinta-ala on

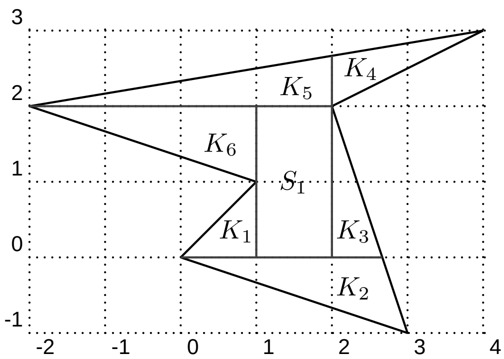
$$\text{ala}(Q) = \text{kanta} \cdot \text{korkeus}.$$



Suorakulmioille ja suorakulmaisille kolmioille kanta ja korkeus saadaan suoraan sivujen pituuksista. Myös vinokulmaisten kolmioiden sekä puolisuunnikkaiden kantojen ja korkeuden määrääminen on yleensä melko vaivatonta, sillä jotkin näistä ovat suoraan sivujen pituuksia ja muut saadaan usein helposti selville kuvan avulla päättelemällä.

Ensimmäinen ratkaisu

Tehtävämme kuusikulmion M ositus kuuteen kolmioon $K_1, \ldots, K_6$ ja yhteen suorakulmioon S_1 voidaan tehdä seuraavassa kuvassa esitetyllä tavalla.



Osituksen suorakulmion S_1 pinta-ala on

$$\text{ala}(S_1) = 1 \cdot 2 = 2.$$

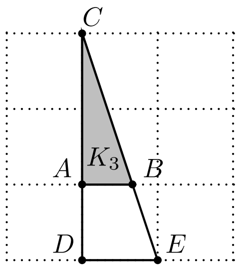
Kolmiot K_1, K_3, K_5 ja K_6 ovat suorakulmaisia. Niistä kolmioiden K_1 ja K_6 kateettien piduudet ovat selviä, ja saadaan

$$\text{ala}(K_1) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \tfrac{1}{2}$$

ja

$$\text{ala}(K_6) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \tfrac{3}{2}.$$

Molempien suorakulmaisten kolmioiden K_3 ja K_5 pidemmän kateetin pituus on selvä, mutta lyhemmän kateetin pituuden määrääminen vaatii pohdintaa kuvan avulla. Merkitään kolmion K_3 kulmia kirjaimilla A, B ja C, ja lisätään kuvaan apupisteet D ja E.



Kolmioiden ABC ja DEC yhdenmuotoisuuden perusteella

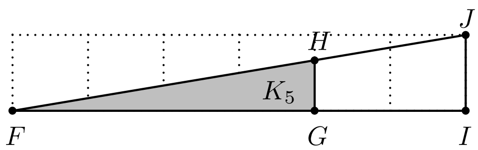
$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|DE|} \quad \text{eli} \quad \frac{2}{|AB|} = \frac{3}{1} = 3,$$

joten $|AB| = \frac{2}{3}$. Näin ollen

$$\text{ala}(K_3) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 2 = \tfrac{2}{3}.$$

Havaitsemme lisäksi, että $B = (2 + \frac{2}{3}, 0) = (\frac{8}{3}, 0)$, mutta emme tarvitse tätä tietoa kolmion K_3 vaan vasta myöhemmin kolmion K_2 pinta-alan laskemisessa.

Selvitämme kolmion K_5 korkeuden vastaavalla yhdenmuotoisuustarkastelulla. Merkitään kolmion K_5 kulmia kirjaimilla F, G ja H, ja lisätään kuvaan apupisteet I ja J.



Kolmioiden FGH ja FIJ yhdenmuotoisuuden perusteella

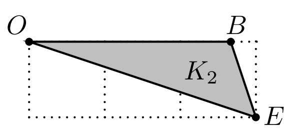
$$\frac{|FG|}{|GH|} = \frac{|FI|}{|IJ|} \quad \text{eli} \quad \frac{4}{|GH|} = \frac{6}{1} = 6,$$

joten $|GH| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Näin ollen

$$\text{ala}(K_5) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 4 = \tfrac{4}{3}.$$

Havaitsemme lisäksi, että $H = (2, 2 + \frac{2}{3}) = (2, \frac{8}{3})$, mutta tässäkään tapauksessa tietoa ei tarvita vielä kolmion K_5 vaan vasta kolmion K_4 pinta-alan määräämisessä.

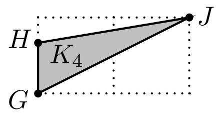
Määrätään sitten kolmion K_2 pinta-ala piirtämällä avuksi kuva, jossa ovat samat pisteet B ja E kuin kolmion K_3 pinta-alan laskemisen yhteydessä. Lisätään kuvaan vielä piste O.



Kolmion K_2 kannaksi kannattaa valita kolmion päällä oleva sivu OB. Koska aikaisemman laskun mukaan $B = (\frac{8}{3}, 0)$ ja $O = (0, 0)$, niin kanta on $\frac{8}{3}$. Kolmion K_2 korkeus on 1, joten

$$\text{ala}(K_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{8}{3} \cdot 1 = \tfrac{8}{6} = \tfrac{4}{3}.$$

Lasketaan vielä kolmion K_4 pinta-ala. Piirretään avuksi kuva, jossa ovat samat pisteet G, H ja J kuin kolmion K_5 pinta-alan laskemisen yhteydessä.



Kolmion K_4 kannaksi valitaan sen vasen, pystysuora sivu GH. Koska aikaisemman laskun mukaan $H = (2, \frac{8}{3})$ ja $G = (2, 2)$, niin kanta on $\frac{2}{3}$. Kolmion K_4 korkeus (kuvassa pikemminkin leveys) on 2, joten

$$\text{ala}(K_4) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 2 = \tfrac{2}{3}.$$

Nyt kaikkien osituksen monikulmioiden pinta-alat ovat selvillä. Laskemalla nämä yhteen saadaan kuusikulmion M pinta-alaksi

$$\begin{aligned}\text{ala}(M) &= \text{ala}(S_1) + \text{ala}(K_1) + \text{ala}(K_2) + \text{ala}(K_3) \\ &\quad + \text{ala}(K_4) + \text{ala}(K_5) + \text{ala}(K_6) \\ &= 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{3}{2} \\ &= \tfrac{12+3+8+4+4+8+9}{6} = \tfrac{48}{6} = 8.\end{aligned}$$

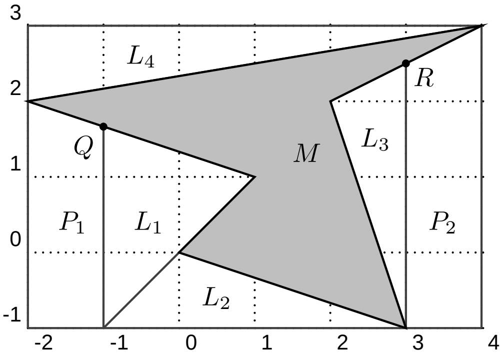
Toinen ratkaisu

Pinta-alatehtävissä monikulmion osittamista voi soveltaa myös niin, että peittää monikulmion ensin yhdellä (tai useammalla) tutulla monikulmiolla ja muodostaa peitetyn monikulmion poistamalla peittävästä monikulmiosta tuttuja monikulmioita. Toisin sanoen peittävän ja peitetyn monikulmion väliin jäävä alue (joka voi koostua yhdestä tai useammasta monikulmiosta) ositetaan monikulmioiksi, joiden pinta-alan osaamme laskea.

Peitetään kuusikulmio M suorakulmiolla S_0, jonka kärjet ovat pisteissä $(-2, -1)$, $(4, -1)$, $(4, 3)$ ja $(-2, 3)$. Tämän pinta-ala on

$$\text{ala}(S_0) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Suorakulmion S_0 ja kuusikulmion M väliin jää kolme monikulmiota: kolmio, nelikulmio ja viisikulmio. Muodostetaan peitetty kuusikulmio M poistamalla suorakulmiosta S_0 kolmiot $L_1, \ldots, L_4$ sekä puolisuunnikkaat P_1 ja P_2 seuraavassa kuvassa esitetyllä tavalla.

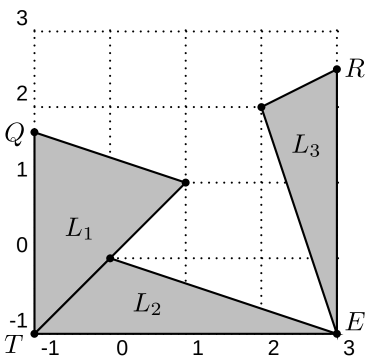


Kuvaan on merkitty pisteet Q ja R, jotka on tunnettava kolmioiden L_1 ja L_3 sekä puolisuunnikkaiden P_1 ja P_2 pinta-aloja laskettaessa. Helpohkoilla yhdenmuotoisuuspäättelyillä nähdään, että $Q = (-1, \frac{5}{3})$ ja $R = (3, \frac{5}{2})$. Jääköön näiden täsmällinen perustelu harjoitustehtäväksi lukijalle.

Kolmio L_4 on suorakulmainen ja sen pinta-alaksi saadaan

$$\text{ala}(L_4) = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3.$$

Piirretään muista kolmioista L_1, L_2 ja L_3 kuva, johon lisätään pisteiden Q ja R lisäksi apupisteet T ja E.



Koska $Q = (-1, \frac{5}{3})$ ja $T = (-1, -1)$, niin kolmion L_1 kanta QT on $\frac{8}{3}$. Kolmion L_1 korkeus on 2, joten sen pinta-alaksi saadaan

$$\text{ala}(L_1) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{8}{3} \cdot 2 = \tfrac{8}{3}.$$

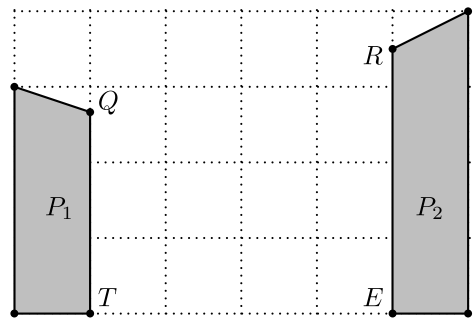
Kolmion L_2 kanta TE on 4 ja korkeus on 1, joten

$$\text{ala}(L_2) = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2.$$

Koska $R = (3, \frac{5}{2})$ ja $E = (3, -1)$, niin kolmion L_3 kanta RE on $\frac{7}{2}$. Kolmion L_3 korkeus on 1, joten sen pinta-alaksi saadaan

$$\text{ala}(L_3) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{7}{2} \cdot 1 = \tfrac{7}{4}.$$

Vielä pitää laskea puolisuunnikkaiden P_1 ja P_2 pinta-alat. Piirretään kuva, johon lisätään edellisessäkin kuvassa olevat apupisteet T ja E.



Tarkastellaan molempia puolisuunnikkaita niin, että niiden kannat ovat pystyssä olevia sivuja, jolloin kummankin korkeus on kuvassamme niiden leveys. Puolisuunnikkaan P_1 korkeus on 1 ja pidempi kanta on 3. Lyhempi kanta on sama kuin kolmion L_1 kanta QT edellä eli $\frac{8}{3}$. Näin ollen

$$\text{ala}(P_1) = \tfrac{1}{2}(3 + \tfrac{8}{3}) \cdot 1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{17}{3} = \tfrac{17}{6}.$$

Puolisuunnikkaan P_2 korkeus on vastaavasti 1 ja pidempi kanta on 4. Lyhempi kanta on sama kuin kolmion L_3 kanta RE edellä eli $\frac{7}{2}$. Näin ollen

$$\text{ala}(P_2) = \tfrac{1}{2}(4 + \tfrac{7}{2}) \cdot 1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{15}{2} = \tfrac{15}{4}.$$

Lopulta saamme kuusikulmion M pinta-alaksi

$$\begin{aligned}
\text{ala}(M) &= \text{ala}(S_0) - \big[\,\text{ala}(L_1) + \text{ala}(L_2) + \text{ala}(L_3) \\
&\qquad + \text{ala}(L_4) + \text{ala}(P_1) + \text{ala}(P_2)\big] \\
&= 24 - \left(\tfrac{8}{3} + 2 + \tfrac{7}{4} + 3 + \tfrac{17}{6} + \tfrac{15}{4}\right) \\
&= 24 - \tfrac{32+24+21+36+34+45}{12} = 24 - \tfrac{192}{12} \\
&= 24 - 16 = 8,
\end{aligned}$$

kuten tuloksen tietysti pitääkin olla ensimmäisen ratkaisun perusteella.

Tehtäviä lukijalle

Tehtävä 1. Keksi kuusikulmion M ositus, jossa on kahdeksan monikulmiota.

Tehtävä 2. Keksi kuusikulmion M ositus, jossa on 2 erikokoista neliötä ja muut ovat kolmioita.

Tehtävä 3. Etsi kuusikulmiolle M ositus, joka koostuu kolmioista, suorakulmioista ja puolisuunnikkaista, ja jossa on mahdollisimman vähän kolmioita.

Tehtävä 4. Etsi kuusikulmiolle M ositus, jossa on vain kolmioita, mutta niitä on mahdollisimman vähän.

Tehtävä 5. Laske M:n pinta-ala tehtävissä 1–4 keksimiesi ositusten perusteella.

Tehtävä 6. Peitä M kolmiolla ja osita peittävän kolmion ja M:n väliin jäävä alue kolmioiksi ja suorakulmioiksi. Laske lopuksi M:n pinta-ala muodostamiesi monikulmioiden avulla.

Tehtävä 7. Keksi 10-kulmio ja laske sen pinta-ala.

Geometriaa Eukleidesta modernisoiden

Simo K. Kivelä

Matti Lehtinen, Jorma Merikoski, Timo Tossavainen, *Johdatus tasogeometriaan*, WSOY Oppimateriaalit, 2007, 163 sivua.

Geometriasta voi kirjoittaa hyvin monenlaisia kirjoja. Ääriesimerkkejä voisivat olla esillä oleva teos ja Erkki Rosenbergin 25 vuotta sitten ilmestynyt Geometria, joiden leikkaus on hyvin pieni, vaikka kumpikin on tarkoitettu yliopistollisen geometrian kurssin oppimateriaaliksi. Rosenbergin kirja keskittyy deskriptiiviseen ja projektiiviseen geometriaan, kun taas Lehtinen, Merikoski ja Tossavainen rakentavat euklidisen geometrian yksityiskohtaisesti modernista aksioomajärjestelmästä lähtien. Jälkimmäinen vastaakin suuressa määrin samaan tarpeeseen kuin Rolf Nevanlinnan 70-luvun alussa ilmestynyt Geometrian perusteet.

Lehtisen, Merikosken ja Tossavaisen kirja on suunnattu lähinnä matematiikan opettajiksi opiskeleville, minkä lisäksi sillä ainakin paikoin on käyttöä varmasti myös geometrian harrastajille ja lukion lisämateriaalina.

Kahdessa ensimmäisessä luvussa rakennetaan euklidisen geometrian järjestelmä aksioomista lähtien. Täydennystä aksiomatiikkaan saadaan luvussa 5. Esitys on Nevanlinnan kirjaa huomattavasti yksityiskohtaisempaa, jolloin tietyltä puuduttavuudelta on vaikeata välttyä. Geometrian käsitteiden yksityiskohtainen määrittely ei ole aivan lyhyt prosessi eikä ilmi selvältä tuntuvien asioiden todistaminen aksioomista lähtien läheskään aina helppoa.

Luvut 3 ja 4 ovat kevyempää luettavaa: klassisia, osittain koulukurssin ulkopuolisia tasogeometrian lauseita ja konstruktiotehtäviä sekä tärkeimmät geometriset kuvaukset. Luvussa 6 käsitellään tunnetut mahdottomuudet: kuution kahdentaminen, kulman kolmijako ja ympyrän neliöinti. Lisäksi pohditaan, mitä tapahtuu, jos luovutaan joko harpista tai viivoittimesta tai jos otetaan käyttöön muitakin välineitä.

Viimeinen luku 7 poikkeaa muusta esityksestä. Kyse ei enää ole geometriasta sinänsä, vaan sen opettamisesta koulussa: millaista opetus on ollut, miten voitaisiin tehdä. Kyseessä on didaktikon näkökulma.

Tasogeometrian aksiomaattista rakentamista ei käsittääkseni ole yhtä huolellisesti suomenkielisessä kirjallisuudessa tehty. Tätä on pidettävä merkittävänä ansiona. Paikoin häiritsee matemaattisille teksteille usein tyypillinen asennoituminen: riittää, että asia on kunnossa, mutta perustavat ideat ja vaihtoehtoiset ajattelutavat voivat jäädä piiloon. Lukija ehkä itse löytää ne asioita monipuolisesti pohdittuaan, mutta häntä voisi toki hieman auttaa.

Esimerkkeinä voisi mainita janojen yhtenevyyden (kongruenssin, samapituisuuden) määrittelyn, jossa relaatiolta vaaditaan kolme ominaisuutta, mutta pohtimatta jää, millaiset mallit toteuttavat vaatimukset. Onko harpilla piirrettävä ympyrä ainoa mahdollisuus tietystä pisteestä lähtevien samapituisten janojen päätepisteiksi (Nevanlinnan terminologialla mittaviivaksi)

Simo Kivelä on Teknillisen korkeakoulun eläkkeellä oleva matematiikan lehtori. Hänen sähköpostiosoitteensa on simo.kivela@tkk.fi.

vai voisiko jokin muukin käyrä tulla kyseeseen? Kysymys on sikäli mielenkiintoinen, että se valottaa myös konkreettisen välineen, harpin, merkitystä geometrikon työkaluna.

Samassa yhteydessä (s. 22) on myös kuva, joka saattaa johtaa harhaan. Puolisuora CE on kuvassa janan AB suuntainen, vaikka näin ei tarvitse olla. Virheellinenhän kuva ei ole, mutta lukijalle saattaa syntyä käsitys, että yhdensuuntaisuus on oleellista, ja vääristä mielikuvista voi olla vaikeata päästä eroon.

Eukleideen Pons asinorum -todistus (s. 27) tasakylkisen kolmion kantakulmien yhtäsuuruudelle puoltaa varmasti paikkaansa klassisen asemansa takia. Lauseen lähes yhtä klassinen Pappuksen (vai pitäisikö sanoa kreikkalaisittain Pappos?) todistus esiintyy vain harjoitustehtävässä. Se olisi voinut ansaita varsinaisenkin käsittelyn sisältämänsä uuden näkökulman takia (kolmio todistetaan yhteneväksi itsensä kanssa, tosin peilattuna).

Kirjan 400 harjoitustehtävää auttavatkin lukijaa syventämään tietojaan ja pohtimaan itsenäisesti asioita – edellyttäen, että ne saavat ansaitsemansa huomion.

Kirja on kirjoitettu lähinnä matematiikan opettajaksi opiskelevien kurssikirjaksi. Tällöin viimeinen didaktinen luku puoltaa paikkaansa. Geometria on kuitenkin ala, jolla pitkän historiansa ja ajattelutapojensa takia on melkoinen rooli kulttuurissamme. Se ansaitsisi pelkästään omilla ehdoillaankin elävän tietokirjan. Tästä ei itse asiassa jää paljon puuttumaan: hieman väljempi taustoja ja ajattelutapoja avaava teksti, pelkkiä nimiä laajempi historiallinen näkökulma. Erillinen luettelo aksioomista olisi myös hyödyksi: koska teksti näiltä osin on väistämättä raskaanpuoleista luettavaa, voisi aksioomat aluksi silmäillä kevyesti ja vasta vähitellen syventää näkemystään niiden merkityksestä.

Geometrian opetus koulussa ja sen didaktiikka kuuluisi tällöin luontevimmin kokonaan eri kirjaan. Ulottuvuuksiahan on paljon lisääkin: erilaiset aksioomista riippumattomat lähestymistavat (yhtenä esimerkkinä opettajakoulutukseen tarkoitettu ruotsalaisen Torbjörn Tambourin esitys `http://www.matematik.su.se/~torbjorn/Undervisn/Geometri.pdf`), vaikkapa peilauskuvaukset geometrian perustana, dynaamisen geometrian tietokoneohjelmistot jne.

Jokaisessa inhimillisen työn tuotoksessa on myös virheensä. Tekijät ovat olleet realisteja ja julkaisevat verkkosivulla `http://mtl.uta.fi/geometria/` luettelon löydetyistä virheistä. Tämä on hyvä käytäntö.

Kaikkiaan Lehtisen, Merikosken ja Tossavaisen kirja on hyvä lisä geometriaa käsittelevään suomenkieliseen kirjallisuuteen. Tällaisia voisi toivoa olevan enemmänkin ja niiden saavan paremmin näkyvyyttä. Omaan tietoisuuteeni kirja tuli sattumalta toista vuotta sen ilmestymisen jälkeen.

Potenssisummia numeerisella integroinnilla

Jorma Merikoski
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Tampereen yliopisto

Johdanto

Olkoon f välillä $[a, b]$ jatkuva reaalifunktio. Lukion pitkän matematiikan kurssiin 12 kuuluu integraalin

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

likimääräinen laskeminen puolisuunnikassäännöllä

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

ja Simpsonin säännöllä

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Tässä n on positiivinen kokonaisluku,

$$h = \frac{b-a}{n}$$

ja

$$y_i = f(a + ih), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Lisäksi Simpsonin säännössä n on parillinen. Tulosten tarkkuutta selvittävät virhekaavat. Jos f on kahdesti derivoituva, niin

$$I - T = -\frac{h^2}{12}f''(\xi)(b-a), \tag{1}$$

missä $a < \xi < b$ (mutta ξ:stä ei yleensä tiedetä sen enempää). Jos f on neljästi derivoituva, niin

$$I - S = -\frac{h^4}{180}f^{(4)}(\xi)(b-a), \tag{2}$$

missä $a < \xi < b$. Näiden kaavojen johto (ks. esim. [2], [5]) ei kuulu lukion kurssiin.

Toisaalta, jos f:n integraalifunktio F tunnetaan, niin $I = F(b) - F(a)$ saadaan tarkasti, jolloin syntyy kiinnostava käänteisprobleema: esitettävä tietylle summalausekkeelle likimääräiskaava I:n avulla. Jos $a = 0$, $b = n$, $h = 1$ ja $f(x) = x^k$, missä $k = 1, 2, 3, 4$, niin tulemme huomaamaan, että saamme T:n tai S:n avulla tarkan kaavan, jossa summa

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

esitetään n:n $(k+1)$-asteisena polynomina. Tapaukset $k = 2$ ja $k = 3$ ovat kirjan [1] harjoitustehtävänä (teht. 138), mutta me käsittelemme tätä aihetta laajemmin.

Eulerin-McLaurinin summakaava on, kuten Lindelöf ([5], s. 377) sanoo, analyysin kaikkein mielenkiintoisimpia kaavoja. Emme esitä sitä yleisessä muodossaan (ks. esim. [5], s. 389) vaan tyydymme kahteen erikoistapaukseen. Jos f on neljästi derivoituva, niin

$$I - T = -\frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) + \frac{h^4}{720}f^{(4)}(\xi)(b-a), \tag{3}$$

missä $a < \xi < b$. Jos f on kuudesti derivoituva, niin

$$I - T = -\frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) + \frac{h^4}{720}(f'''(b) - f'''(a)) - \frac{h^6}{30240}f^{(6)}(\xi)(b-a), \quad (4)$$

missä $a < \xi < b$.

Triviaali tapaus $k = 1$

Tiedämme aritmeettisen summan kaavan perusteella, että

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Siksi tapaus $k = 1$ ei ole kiinnostava, mutta täydellisyyden vuoksi käsittelemme senkin. Koska funktiolle $f(x) = x$ on $f''(x) = 0$, on virhekaavan (1) mukaan $T = I$. Siis

$$\frac{1}{2}\big[0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + \ldots + 2(n-1) + n\big] = \int_0^n x\mathrm{d}x = \frac{n^2}{2},$$

joten

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\ &\quad = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \\ &\quad = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Tapaus $k = 2$

Tapa 1. Käytetään puolisuunnikassääntöä. Vaikka se ei laske tarkasti integraalia

$$I = \int_0^n x^2\mathrm{d}x,$$

saamme virhekaavalla (1) lausekkeen $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ tarkasti, koska funktion $f(x) = x^2$ toinen derivaatta $f''(x) = 2$ on vakio. Virhekaavan perusteella

$$T = I + \frac{1}{12}\cdot 2(n-0) = I + \frac{n}{6}$$

eli

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\big[0 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2 + \ldots + 2(n-1)^2 + n^2\big] \\ &\quad = \int_0^n x^2\mathrm{d}x + \frac{n}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n}{6}, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} &1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 \\ &\quad = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \\ &\quad = \frac{n^3}{3} + \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &\quad = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Tapa 2. Käytetään Simpsonin sääntöä. Mutta kannattaako se, koska laskut tulevat pitemmiksi kuin tavassa 1? Voimme vastata myönteisesti, jos kuvittelemme, että tunnemme vain puolisuunnikassäännön ja Simpsonin säännön johtoineen mutta emme virhekaavoja (1) ja (2). Silloin emme voi käyttää tapaa 1, mutta tiedämme, että funktiolle $f(x) = x^2$ on $S = I$.

Jos n on parillinen, niin

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\big[0 + 4\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2 + 4\cdot 3^2 + \ldots + 2(n-2)^2 \\ &\qquad + 4(n-1)^2 + n^2\big] = \int_0^n x^2\mathrm{d}x = \frac{n^3}{3} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\big[1^2 + 4\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 4\cdot 4^2 + \ldots + 2(n-1)^2 \\ &\qquad + 4n^2 + (n+1)^2\big] = \int_1^{n+1} x^2\mathrm{d}x = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Yhteenlaskemalla saamme

$$\begin{aligned} &\frac{5}{3}\cdot 1^2 + 2\big[2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\big] \\ &\qquad + \frac{5}{3}n^2 + \frac{1}{3}(n+1)^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

josta

$$\begin{aligned} &2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 \\ &\quad = \frac{1}{6}\big[n^3 + (n+1)^3 - 5n^2 - (n+1)^2\big] - 1 \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} &1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 \\ &= \frac{1}{6}\big[n^3 + (n+1)^3 - 5n^2 - (n+1)^2\big] - 1 + 1 + n^2 \\ &= \frac{1}{6}\big(2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 5n^2 - n^2 - 2n - 1 + 6n^2\big) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n\cdot 2(n+1)(n + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Jos n on pariton, niin voimme tarkastella vastaavasti integraaleja

$$\int_0^{n-1} x^2\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \int_1^n x^2\mathrm{d}x.$$

Kuitenkin on mukavampi todeta, että $n-1$ on tällöin parillinen, joten

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\\
&\quad=\frac{1}{6}(n-1)n[2(n-1)+1]+n^2\\
&\quad=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+n^2\\
&\quad=\frac{1}{6}[n(2n^2-3n+1)+6n^2]\\
&\quad=\frac{1}{6}n(2n^2-3n+1+6n)\\
&\quad=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

Tapa 3. Käytetään Eulerin-McLaurinin summakaavaa (3). Jätämme sen lukijan tehtäväksi.

Tapaus $k=3$

Tapa 1. Käytetään Simpsonin sääntöä. Koska Simpsonin säännössä integroitava korvataan paloittain polynomeilla, joiden aste on enintään kaksi, on selvää, että tämä sääntö laskee tarkasti kaikkien tällaisten polynomien integraalit. Mutta on yllättävää, että se laskee tarkasti myös kolmannen asteen polynomien integraalit. Jos nimittäin f on tällainen polynomi, niin $f^{(4)}(x)=0$, joten virhekaavan (2) mukaan $S=I$.

Voimme olettaa, että n on parillinen. (Jos n on pariton, niin menettelemme kuten tapauksessa $k=2$.) Tällöin

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\big[0+4\cdot1^3+2\cdot2^3+4\cdot3^3+\ldots+2(n-2)^3\\
&\qquad+4(n-1)^3+n^3\big]=\int_0^n x^3\mathrm{d}x=\frac{n^4}{4}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\big[1^3+4\cdot2^3+2\cdot3^3+4\cdot4^3+\ldots+2(n-1)^3\\
&\qquad+4n^3+(n+1)^3\big]=\int_1^{n+1} x^3\mathrm{d}x=\frac{(n+1)^4}{4}-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Jatkamme kuten tapauksessa $k=2$. Saamme

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{3}\cdot1^3+2\big[2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\big]\\
&\qquad+\frac{5}{3}n^3+\frac{1}{3}(n+1)^3=\frac{n^4}{4}+\frac{(n+1)^4}{4}-\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

josta

$$\begin{aligned}
&2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\\
&\quad=\frac{1}{8}\big[n^4+(n+1)^4\big]-\frac{1}{6}\big[5n^3+(n+1)^3\big]-\frac{23}{24},
\end{aligned}$$

ja siis

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+n^3\\
&\quad=\frac{1}{8}\big[n^4+(n+1)^4\big]-\frac{1}{6}\big[5n^3+(n+1)^3\big]\\
&\qquad-\frac{23}{24}+1+n^3\\
&\quad=\frac{1}{8}(2n^4+4n^3+6n^2+4n+1)\\
&\qquad-\frac{1}{6}(6n^3+3n^2+3n+1)+\frac{1}{24}+n^3\\
&\quad=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{8}\\
&\qquad-n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+n^3\\
&\quad=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.
\end{aligned}$$

Tapa 2. Käytetään Eulerin-McLaurinin summakaavaa (3). Jos $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=n$ ja $h=1$, niin $f'(x)=3x^2$ ja $f^{(4)}(x)=0$, joten

$$T=I+\frac{1}{12}(3n^2-0)-0=I+\frac{n^2}{4}$$

eli

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big[0+2\cdot1^3+2\cdot2^3+\ldots+2(n-1)^3+n^3\big]\\
&\qquad=\int_0^n x^3\mathrm{d}x+\frac{n^2}{4}=\frac{n^4}{4}+\frac{n^2}{4}.
\end{aligned}$$

Saamme siis

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+n^3\\
&\quad=1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+\frac{n^3}{2}+\frac{n^3}{2}\\
&\quad=\frac{n^4+n^2}{4}+\frac{n^3}{2}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Tapaus $k=4$

Tapa 1. Käytetään Simpsonin sääntöä. Se ei laske tarkasti funktion $f(x)=x^4$ integraalia, mutta koska $f^{(4)}(x)=24$ on vakio, saamme tehtävän ratkaistuksi virhekaavan (2) avulla (vrt. puolisuunnikassääntö tapauksessa $k=2$).

Voimme olettaa, että n on parillinen. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\big[0+4\cdot1^4+2\cdot2^4+4\cdot3^4+\ldots+2(n-2)^4\\
&+4(n-1)^4+n^4\big]=\int_0^n x^4\mathrm{d}x+\frac{24}{180}(n-0)=\frac{n^5}{5}+\frac{2n}{15}
\end{aligned}$$

ja

$$\frac{1}{3}\big[1^4+4\cdot 2^4+2\cdot 3^4+4\cdot 4^4+\ldots+2(n-1)^4$$
$$+4n^4+(n+1)^4\big]=\int\limits_1^{n+1} x^4\mathrm{d}x+\frac{24}{180}(n+1-1)$$
$$=\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{1}{5}+\frac{2n}{15}.$$

Jatkamme kuten tapauksissa $k=2$ ja $k=3$. Saamme

$$\frac{5}{3}\cdot 1^4+2\big[2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4\big]+\frac{5}{3}n^4+\frac{1}{3}(n+1)^4$$
$$=\frac{n^5}{5}+\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{1}{5}+\frac{4n}{15},$$

josta

$$2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4$$
$$=\frac{1}{10}[n^5+(n+1)^5-1]$$
$$+\frac{2n}{15}-\frac{1}{6}[5n^4+(n+1)^4+5].$$

Täten

$$1^4+2^4+\ldots+(n-1)^4+n^4$$
$$=\frac{1}{10}[n^5+(n+1)^5-1]+\frac{2}{15}n$$
$$-\frac{1}{6}[5n^4+(n+1)^4+5]+1+n^4$$
$$=\frac{1}{10}(2n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n)+\frac{2}{15}n$$
$$-\frac{1}{6}(6n^4+4n^3+6n^2+4n+6)+1+n^4$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+n^3+n^2+\frac{1}{2}n+\frac{2}{15}n-n^4$$
$$-\frac{2}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n-1+1+n^4$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$
$$=\frac{1}{30}n(6n^4+15n^3+10n^2-1).$$

Huomaamme kokeilemalla, että polynomilla $p(n)=6n^4+15n^3+10n^2-1$ on rationaaliset nollakohdat $n=-1$ ja $n=-\frac{1}{2}$, joten se on jaollinen polynomilla $q(n)=(n+1)(n+\frac{1}{2})$. Suorittamalla jakolaskun saamme $p(n)/q(n)=6n^2+6n-2$, joten $p(n)=(n+1)(n+\frac{1}{2})(6n^2+6n-2)=(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$. Näin saamme tuloksen muotoon

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Tapa 2. Käytetään Eulerin-McLaurinin summakaavaa (3). Jos $f(x)=x^4$, $a=0$, $b=n$ ja $h=1$, niin $f'(x)=4x^3$ ja $f^{(4)}(x)=24$, joten

$$T=I+\frac{1}{12}(4n^3-0)-\frac{1}{720}\cdot 24(n-0)$$
$$=\int\limits_0^n x^4\mathrm{d}x+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

eli

$$\frac{1}{2}\big[0+2\cdot 1^4+2\cdot 2^4+\ldots+2(n-1)^4+n^4\big]=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.$$

Siis

$$1^4+2^4+\ldots+(n-1)^4+n^4$$
$$=1^4+2^4+\ldots+(n-1)^4+\frac{n^4}{2}+\frac{n^4}{2}$$
$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}+\frac{n^4}{2}$$
$$=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n).$$

Tapaukset $k=5$ ja $k=6$

Puolisuunnikassäännössä integroitava korvataan paloittain polynomeilla, joiden aste on enintään yksi. Simpsonin säännössä käytetään vastaavasti polynomeja, joiden aste on enintään kaksi. Periaatteessa voidaan myös käyttää polynomeja, joiden aste on enintään kolme, enintään neljä jne. Esimerkiksi käyttämällä enintään kolmannen asteen polynomeja saadaan

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{3h}{8}(y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5$$
$$+2y_6+\ldots+2y_{n-3}+3y_{n-2}+3y_{n-1}+y_n),$$

missä n on jaollinen 3:lla. (Ks. esim. [2], s. 316, missä integraali on laskettu yhden osavälikolmikon yli.) Kuitenkaan tämä sääntö ei ole Simpsonin sääntöä parempi, sillä nytkin virhe on muotoa vakio kertaa $h^4f^{(4)}(\xi)$ eli likimäärin verrannollinen potenssiin h^4. (”Likimäärin” siksi, että jos esimerkiksi h puolitetaan, niin ξ yleensä muuttuu, jolloin uusi virhe ei ole täsmälleen $\frac{1}{16}$ vanhasta vaan voi erota siitä paljonkin.) Siis tällä säännöllä saadaan lasketuksi summa $1^k+2^k+\ldots+n^k$ vain tapauksessa $k\le 4$, kuten saadaan Simpsonin säännölläkin, ja laskut ovat pitemmät. Toisaalta nämä laskut ovat hyödyllistä ”kaavamanipuloinnin” harjoittelua, joten summan $1^4+2^4+\ldots+n^4$ laskeminen tällä tavalla on hyvä harjoitustehtävä.

Korkeammankaan asteen polynomeja ei kannata käyttää. Tosin virhe yleensä pienenee, jos derivaatat pysyvät kohtuullisissa rajoissa, sillä polynomin asteen ollessa k se on muotoa vakio kertaa $f^{(k+2)}(\xi)h^{k+2}$, kun k on parillinen, ja vakio kertaa $f^{(k+1)}(\xi)h^{k+1}$, kun k on pariton. Mutta saadut kaavat tulevat kovin mutkikkaiksi:

kerrointen suuruusluokka kasvaa ja jotkin niistä saattavat olla negatiivisia. Siksi on parempi soveltaa joko Simpsonin sääntöä pienemmällä h:lla tai jotakin aivan muuta menetelmää.

Korkeamman asteen polynomeilla saatuja integrointikaavoja ei myöskään kannata käyttää summan $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ laskemiseksi. Periaatteessa niin voitaisiin tehdä, mutta käytännössä laskut tulevat varsin työläiksi. Sen sijaan näitäkin summia voidaan laskea helposti Eulerin-McLaurinin summakaavan avulla. Käsittelemme tapaukset $k = 5$ ja $k = 6$ soveltamalla kaavaa (4).

Funktiolle $f(x) = x^5$ on $f'(x) = 5x^4$, $f'''(x) = 60x^2$ ja $f^{(6)}(x) = 0$, joten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[0 + 2 \cdot 1^5 + 2 \cdot 2^5 + \ldots + 2(n-1)^5 + n^5] \\
&\quad = \int_0^n x^5 \mathrm{d}x + \frac{1}{12}(5n^4 - 0) - \frac{1}{720}(60n^2 - 0) + 0 \\
&\quad = \frac{n^6}{6} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
&1^5 + 2^5 + \ldots + (n-1)^5 + n^5 \\
&\quad = 1^5 + 2^5 + \ldots + (n-1)^5 + \frac{n^5}{2} + \frac{n^5}{2} \\
&\quad = \frac{n^6}{6} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} + \frac{n^5}{2} \\
&\quad = \frac{1}{12}n^2(2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1).
\end{aligned}$$

Tapaukset $k = 1$ ja $k = 3$ houkuttelevat otaksumaan, että polynomi $p(n) = 2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1$ on jaollinen polynomilla $q(n) = (n+1)^2$. Niin todellakin on, ja suorittamalla jakolaskun saamme $p(n)/q(n) = 2n^2 + 2n - 1$. Siis

$$1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1).$$

Siirrymme tapaukseen $k = 6$. Jos $f(x) = x^6$, niin $f'(x) = 6x^5$, $f'''(x) = 120x^3$ ja $f^{(6)}(x) = 720$, joten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[0 + 2 \cdot 1^6 + 2 \cdot 2^6 + \ldots + 2(n-1)^6 + n^6] \\
&\quad = \int_0^n x^6 \mathrm{d}x + \frac{1}{12}(6n^5 - 0) \\
&\qquad - \frac{1}{720}(120n^3 - 0) + \frac{n}{30240} \cdot 720 \\
&\quad = \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}.
\end{aligned}$$

Saamme siis

$$\begin{aligned}
&1^6 + 2^6 + \ldots + (n-1)^6 + n^6 \\
&\quad = 1^6 + 2^6 + \ldots + (n-1)^6 + \frac{n^6}{2} + \frac{n^6}{2} \\
&\quad = \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} + \frac{n^6}{2} \\
&\quad = \frac{1}{42}n(6n^6 + 21n^5 + 21n^4 - 7n^2 + 1).
\end{aligned}$$

Otaksumme nyt tapausten $k = 2$ ja $k = 4$ perusteella, että polynomi $p(n) = 6n^6 + 21n^5 + 21n^4 - 7n^2 + 1$ on jaollinen polynomilla $q(n) = (n+1)(2n+1)$. Osoittautuu, että näin on. Jakolaskulla saamme $p(n)/q(n) = 3n^4 + 6n^3 - 3n + 1$, joten

$$1^6 + 2^6 + \ldots + n^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1).$$

Eulerin-McLaurinin summakaavan yleisessä muodossa tarvitaan *Bernoullin lukuja* (ks. esim. [5], s. 383), joten ne näkyvät myös kertoimissa, kun summa $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ esitetään n:n $(k+1)$-asteisena polynomina. Kirjansa esipuheessa ([5], s. IV) Lindelöf kutsuu Bernoullin lukuja ”merkillisiksi”. Näiden lukujen määritelmä (palautuskaavalla tai tietyn sarjan kerrointen avulla) näyttää kovin mutkikkaalta ja keinotekoiselta (seitsemän ensimmäistä Bernoullin lukua ovat $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$, $\frac{691}{2730}$ ja $\frac{7}{6}$), joten on todellakin merkillistä, että niillä on keskeinen rooli mm. eräissä sarjakehitelmissä (esimerkiksi $\tan x$:n, ks. [5], s. 387).

Puolisuunnikassäännön parantaminen

Eulerin-McLaurinin summakaavasta (3) saamme ”paremman puolisuunnikassäännön”

$$T_1 = T - \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)),$$

jonka virhekaava on

$$I - T_1 = \frac{h^4}{720} f^{(4)}(\xi)(b-a).$$

Jos siis f on neljästi derivoituva ja $f^{(4)}$ pysyy kohtuullisissa rajoissa, niin tämän säännön virhe on likimäärin verrannollinen potenssiin h^4 eli samaa suuruusluokkaa kuin Simpsonin säännön virhe.

Vastaavasti saamme Eulerin-McLaurinin summakaavasta (4) ”vielä paremman puolisuunnikassäännön”

$$T_2 = T - \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) + \frac{h^4}{720}(f'''(b) - f'''(a)),$$

jonka virhekaava on

$$I - T_2 = -\frac{h^6}{30240} f^{(6)}(\xi)(b-a).$$

Jos siis f on kuudesti derivoituva ja $f^{(6)}$ pysyy kohtuullisissa rajoissa, niin virhe on likimäärin verrannollinen potenssiin h^6.

Täten on odotettavissa, että ”parempi puolisuunnikassääntö” on suunnilleen yhtä hyvä kuin Simpsonin sääntö, ja että ”vielä parempi puolisuunnikassääntö” on näitä parempi. Jätämme lukijan tehtäväksi tutkia kokeellisesti, onko asia todella näin.

On mielenkiintoista, että pelkkä tieto derivaatoista välin päätepisteissä saa aikaan tällaiset parannukset. Kuitenkin, jos funktiota ei ole annettu lausekkeena vaan taulukkona, niin derivaatat täytyy laskea numeerisesti likimääräismenetelmillä, jolloin tehdyt virheet saattavat kumota nämä parannukset. Erityisen painavasti tämä huomautus koskee ”vielä parempaa puolisuunnikassääntöä”, jossa tarvitaan kolmatta derivaattaa.

Muita menetelmiä

Summan $s_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ kaava voidaan johtaa monella muullakin tavalla.

Helpoin menetelmä keksiä lienee seuraava. Aritmeettisen summan kaavan perusteella $s_1(n)$ on toisen asteen polynomi, joten otaksutaan, että $s_k(n)$ on $(k+1)$-asteinen polynomi. Tarkastellaan siis polynomia $p_k(n) = a_0 n^{k+1} + a_1 n^k + \ldots + a_k n + a_{k+1}$. Vaaditaan, että

$$\begin{aligned} &p_k(1) = s_k(1), p_k(2) = s_k(2), \\ &\qquad \ldots, p_k(k+2) = s_k(k+2). \qquad (5) \end{aligned}$$

Ratkaistaan tästä lineaarisesta yhtälöryhmästä tuntemattomat $a_0, a_1, \ldots, a_{k+1}$. (Voidaan todistaa, ks. esim. [5], s. 16, että sillä on yksikäsitteinen ratkaisu.) Lopuksi osoitetaan induktiolla, että $p_k(n) = s_k(n)$ kaikilla muillakin n:n arvoilla.

Yhtälöryhmä (5) voidaan suurillakin k:n arvoilla ratkaista helposti käyttämällä jotakin matemaattista tietokoneohjelmistoa. Kuitenkin täytyy varautua seuraavaan. Jos tietokone soveltaa *liukulukuaritmetiikkaa*, niin tulokset ovat desimaalimuotoisina likiarvoina, jolloin niiden muuttaminen tarkoiksi arvoiksi voi suurilla k:n arvoilla olla vaikeaa, koska pyöristysvirheiden kasautuminen saattaa sotkea desimaaliluvun jaksollisuutta. Jos taas kone soveltaa *tarkkaa aritmetiikkaa*, niin suurilla k:n arvoilla ehkä joudutaan operoimaan niin hankalilla murtoluvuilla, että muisti loppuu tai aikaa kuluu kohtuuttomasti taikka ohjelman suoritus jumiutuu muuten. Pienillä k:n arvoilla ongelmia ei synny kummassakaan tapauksessa. Lukija voi kokeilla, millaisista k:n arvoista hänen tietokoneensa ja sen matemaattinen ohjelmisto selviytyy.

Edellä käsittelemiemme menetelmien eräänlaisena puutteena on, ettei niillä saada tietoja k:n eri arvoja vastaavien $s_k(n)$:ien välisistä yhteyksistä. Tavallisin sellainen menetelmä, jolla näitä yhteyksiä saadaan, on *Pascalin menetelmä* (ks. esim. [3], luku 2.1, [6], s. 359 ja tapauksessa $m = 3$ myös [4], s. 335-336). Se perustuu kaavaan

$$\begin{aligned} (n+1)^m - 1 = m s_{m-1} + \binom{m}{2} s_{m-2} + \binom{m}{3} s_{m-3} \\ + \ldots + m s_1 + n. \end{aligned}$$

Aluksi sijoitetaan $m = 2$, jolloin saadaan s_1. Seuraavaksi sijoitetaan $m = 3$, jolloin saadaan s_2, koska s_1 tunnetaan. Sitten sijoitetaan $m = 4$, jolloin saadaan s_3, koska s_1 ja s_2 tunnetaan. Jatkamalla vastaavasti saadaan jokainen potenssisumma s_k esitetyksi potenssisummien $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ avulla.

Muita menetelmiä löytyy Kotiahin artikkelista [3].

Kiitokset

Kiitän lehtori Markku Halmetojaa ja professori Seppo Mustosta heidän käsikirjoituksestani tekemistään huomautuksista.

Viitteet

[1] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg ja T. Tossavainen, *Matematiikan taito 12: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä.* WSOY, 2007.

[2] E. Isaacson ja H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods.* John Wiley, 1966.

[3] T. C. T. Kotiah, Sums of powers of integers - A review. *Internat. J. Math. Educ. Sci. Tech. 24* (1993), 863-874.

[4] E. Lindelöf, *Johdatus korkeampaan analyysiin.* 4. p. WSOY, 1956.

[5] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset I. Yhden muuttujan funktiot.* 2. p. WSOY, 1950.

[6] P. J. Myrberg, *Differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirja.* 4. p. Otava, 1961.

Neljä tietä derivaattaan

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Tarmo Hautajärvi, Jukka Ottelin ja **Leena Wallin-Jaakkola:** *Laudatur 7. Derivaatta.* Otava 2006. 195 s. 15,80 euroa.

Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoski, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen, Teuvo Laurinolli ja **Timo Sankilampi**: *Matematiikan taito 7. Derivaatta.* WSOY Oppimateriaalit 2006. 182 s. 12,90 euroa.

Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen, Maija Salmela ja **Jorma Tahvanainen**: *Pitkä matematiikka 7. Derivaatta.* WSOY Oppimateriaalit 2006. 209 s. 12,80 euroa.

Pekka Kontkanen, Jukka Lehtonen, Riitta Liira, Kerkko Luosto ja **Anja Ronkainen**: *Pyramidi 7. Derivaatta.* Tammi 2006. 248 s. 12,80 euroa.

Aluksi

Lukion matematiikan pitkän oppimäärän keskeisenä teemana voi pitää differentiaali- ja integraalilaskentaa. Differentiaalilaskennan keskeinen käsite on derivaatta.

Derivaatta lienee tullut matematiikan sanastoon 1700-luvun lopulla, kun Lagrange rupesi käyttämään merkintää $f'(x)$ ja nimitystä *fonction dérivée*, johdettu funktio. Niinpä derivaatta saksassa on *Ableitung* ja suomeenkin oli 1900-luvun alussa tarjolla sana *johdos*. Lagrangen teko ei ehkä kasvata hänen muuten pitkää ansiolistaansa: derivaatta-sana ja derivaatan laskennolliseen määrittämiseen viittaava merkintä ovat luultavasti häivyttäneet derivaatan, differentiaaliosamäärän, varsinaista merkitystä hetkellisen muutosnopeuden ilmaisijana.

Solmuissa 2/2006 ja 2/2007 esiteltiin rinnakkain lukion oppikirjasarjojen tekijöiden lähestymistapoja lukion pitkän matematiikan kursseihin 1 (funktiot ja yhtälöt) ja 3 (geometria). Tällä kertaa tarkastelun kohteena on kurssi 7, derivaatta, ja neljä tapaa muuntaa opetussuunnitelman keskeiset sisällöt, "rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö; funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta; polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen; polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen", oppimateriaaliksi.

Käytän kirjoista alempana lyhenteitä LA, MT, PM ja PY. Kerron vain itse kirjoista. Niihin liittyviä salasanan takaa kustantajien nettisivuilta löytyviä oheismateriaaleja ja tehtävien ratkaisuja ja mahdollisia virheiden oikaisuja en ole nähnyt, en myöskään voi ottaa huomioon sitä, että eri kirjasarjat jakavat aineistoa osin eri kursseihin.

Kirjojen sisällön tarkastelua

Muut kuin PY käyvät suoraan asiaan, opetussuunnitelman ensimmäiseen sisältöön, rationaalifunktioon. PY aloittaa lyhyellä historiallisella katsauksella, sitten luvulla, jossa lähdetään liikkeelle abstraktista funktion tai kuvauksen määritelmästä ja käsitellään seikkaperäisesti funktion monotonisuutta.

Rationaalifunktion kaikki kirjat kertovat olevan kahden yhden muuttujan polynomin osamäärä. MT sallii useamman kuin yhden muuttujan, muttei juuri näytä tätä laajennusta käyttävän. Yksikään ei mainitse, että rationaalifunktioita voisivat olla esimerkiksi

$$f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}$$

tai

$$g(x) = \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}}{\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x^2 - \sqrt{3}}},$$

siis funktiot, joiden lausekkeessa muuttujaan ja vakioihin on sovellettu vain enintään neljää peruslaskutoimitusta. PM kuitenkin ilmoittaa, että kun murtolausekkeisiin sovelletaan näitä laskutoimituksia, päädytään sievennysten jälkeen kahden polynomin osamäärään eli rationaalifunktioon.

Seuraavan oppisisällön osion käsittelyn kaikki kirjat alkavat raja-arvosta. MT on laittanut osin alkuun muutaman viittauksen siihen, että 1600-luvulla alettiin tarkastaa muutosta matemaattisesti, ja tässä on keskeisessä asemassa raja-arvo. Huomautusta voi pitää hiukan harhaanjohtavana sikäli, että raja-arvo tuli näiden muutostarkastelujen tueksi matematiikkaan oikeastaan vasta 200 vuotta myöhemmin. PY alkaa koko raja-arvotarkastelun toispuolisista raja-arvoista. Kaikki kirjat käyttävät jonkinlaisena johdantoperusteluna tyyppiä

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

olevan funktion käyttäytymistä arvon a lähellä. Funktion arvoja lasketetaan laskimella ja havaitaan niiden osuvan $2a$:n lähelle. Vain MT sanoo rehellisesti heti, että tarkasteltava lauseke on sama kuin $x + a$ aina, kun $x \neq a$. Minusta tämän ilmeisen tiedon panttaaminen siksi, kunnes laskintyötä on tarpeeksi tehty, on eräänlaista oppilaan ja matematiikan ylenkatsomista.

Raja-arvon määritelmäksi kaikki kirjat valitsevat eräänlaisen dynaamisen version: $\lim_{x \to a} f(x) = b$ tarkoittaa sitä, että f:n arvot *saadaan* mielivaltaisen lähelle arvoa b, kun x lähestyy a:ta. Raja-arvossa ei kuitenkaan oikeastaan ole kyse siitä, mitä saadaan aikaan kun muuttuja kuljeskelee rajakohdan lähellä, vaan yksinkertaisesti funktion arvojen sijainnista, aivan staattisesti. MT ja PY esittävät myös täsmällisen raja-arvon määritelmän, edellinen kurssin ulkopuolista ainesta osoittavan merkin jälkeen, jälkimmäinen kirjan lopussa olevassa syventävässä aineksessa. Muut kirjat kuin PM esittävät raja-arvojen rationaaliset laskusäännöt – ilmoitusasioina, ilman viitettäkään siihen suuntaan, että säännöt olisivat määritelmän nojalla todistettavaa ainesta. Vain MT määrittelee raja-arvon äärettömässä ja myöskin ”raja-arvon ∞”.

Erityisesti PM esittää raja-arvo-osiossa useita esimerkkejä rationaalifunktion raja-arvon laskemisesta nimittäjän nollakohdassa, pisteessä, jossa funktio ei ole määritelty. Esimerkit alkavat aina niin, että funktion argumentiksi sijoitetaan tämä nimittäjän nollakohta ja todetaan ongelma. Kun juuri edellä on opeteltu sitä, että rationaalifunktion nimittäjän nollakohdat eivät kuulu funktion määrittelyjoukkoon, menetelmä – vaikka toki harmiton – on hiukan kyseenalainen. PY on tässä kohden huolellinen.

Funktion raja-arvo liittyy funktion jatkuvuuteen. Jatkuvuutta käsittelee laajimmin PY, suppeimmin MT. LA esittää hiukan omituisen määritelmän käsitteelle funktion f jatkuvuus kohdassa a: ”Funktio on jatkuva määrittelyjoukkonsa kohdassa (sen läheisessä ympäristössä), jos tässä kohdassa funktiolla on raja-arvo ja se on yhtä suuri kuin funktion arvo.” Mitä tässä tarkoittaa läheinen ympäristö ja miksi sitä tarvittaisiin? Samalla aukeamalla LA:n kirjoittajille näyttää tulleen toinenkin oikosulku: he tarkastelevat funktiota $f(x)$, joka määritellään eri lausekkeilla, kun $x \neq -2$ ja $x = -2$; kysymys on tietysti jatkuvuudesta kohdassa -2. Tällöin ei ole mielekästä ruveta kyselemään sen edellisen arvoa kohdassa -2, kuten kirjassa tehdään, vaan raja-arvoa. PY ja PM esittävät jatkuvien funktioiden väliarvolauseen eli Bolzanon lauseen, PY lisäksi lauseen, joka takaa jatkuvan funktion saavan suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa. Bolzanon lause kuuluu myös MT:n ainekseen, mutta kirja esittää sen vasta loppupuolella funktion kulun tutkimista käsittelevässä luvussa.

Kaikki kirjat siirtyvät funktion jatkuvuudesta derivaattaan. Jokainen määrittelee derivaatan graafisesti, sekantti-tangenttitarkastelulla. Implisiittisesti oletetaan, että tangentti on ymmärrettävä ja realisoitavissa oleva käsite. Mutta mitä tarkkaan ottaen merkitsee esimerkiksi se, että ”sekantti rajatta lähenee tiettyä suoraa”? Vaihtoehtoista (ja tämän kirjoittajan mielestä huomattavasti konkreettisempaa) tarkastelukulmaa, keskinopeuden ja hetkellisen nopeuden myötä suoraan saatavaa erotusosamäärää ja sen raja-arvoa, joka myös historiallisesti perustelee koko raja-arvokäsitteen tarpeellisuuden, ei derivaatan määrittelyyn käytetä, vaikka toki kaikki kirjat kertovat derivaatan ja muutosnopeuden yhteyden, ja LA alkaa koko derivaattaluvun asian pohdiskelulla. Kirjat ovat juuri saaneet käsiteltyä enemmän tai vähemmän kattavasti raja-arvokäsitettä. Miksei siihen luoteta, miksi tarvitaan kiertotie funktion kuvaajan ja vaikeasti määriteltävän tangenttikäsitteen kautta. Kun derivaatta on – raja-arvona – käytettävissä, ei ole ongelma päätyä tangentin määritelmään suorana, jonka kulmakerroin on derivaatta.

Derivaatan merkintänä kaikki kirjat käyttävät Lagrangen pilkkumerkintää $f'(x)$. LA, MT ja PY listaavat myös operaattorimerkinnän $Df(x)$ ja Leibnizin havainnollisen ja derivoinnin kohteena olevan muuttujan ilmaisevan $\dfrac{df}{dx}$:n, PM:lle riittää vain operaattorimerkki. Newtonin derivaattamerkkiä $\dot{f}$, joka on kovin tavallinen erilaisissa aikaderivaatoissa, eivät kirjat ota esiin. – Derivaattafunktiolla saattaa olla derivaatta jne. Toinen ja n:s derivaatta mainitaan tekstiosastossa vain MT:ssa ja PY:ssa. Niitä ei kirjoissa sen tarkemmin kuitenkaan analysoida tai hyödynnetä. PM:ssa on harjoitustehtävä, jossa tulee vastaan toinen derivaatta ja sen yhteys käyrän kuperuussuuntaan, MT:ssa useitakin tehtäviä, joissa toisella derivaatalla on rooli.

Derivaatan käyttökelpoisuus perustuu luonnollisesti siihen, että derivaatan muodostaminen voidaan usein tehdä helposti muutamien derivointisääntöjen perusteella. PY listaa heti kaikki derivaatan ja rationaalisten laskutoimitusten yhteydet, MT alkaa kahden funktion summalla ja tulolla, PM rajoittuu aluksi vain kaavoihin $(kf)'(a) = kf'(a)$ ja $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$. LA:n ensimmäinen derivointikaava on potenssin derivointikaava, joka johdetaan, kun eksponentti on 1, 2 tai 3 ja tästä päätellään kaavan yleinen muoto. Jotenkin tasapainottomalta vaikuttaa se, että tämän jälkeen kahden funktion summan ja vakiolla kerrotun funktion derivaattojen muoto esitellään derivaatan määritelmän nojalla perusteltuina. – Muutkin kirjat perustelevat nämä kaavat, tietenkin nojautuen vastaavaan raja-arvojen laskusääntöön, joka on joka kirjassa annettu puhtaana ilmoitusasiana.

Potenssin derivaatan kaava on kirjoissa tärkeä, onhan käytössä olevien funktioiden valikoima melkein rajoitettu polynomifunktioihin. LA:n kevyt suhtautuminen tähän kaavaan on jo yllä mainittu. Toista äärilaitaa edustaa MT, joka käsittelee asiaa jo esipuheessa. MT ottaa potenssin derivoinnin yhteydessä esiin matemaattisen induktion ja saa perusteltua potenssin derivoinnin tulon derivointikaavan avulla. LA on lykännyt todistuksen kirjan lopun erikoisainekseen ja suoriutuu siellä tehtävästä olennaisesti laskemalla jakolaskua

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0},$$

tosin ilman jakokulmaa. PM ottaa suoraan käyttöön polynomin $x^n - a^n$ tekijöihin jaon, perusteluna alaviitteessä laskettu $x^4 - a^4$:n tekijöihin jako.

Olisikohan potenssin derivaattaa tässä kurssissa mahdollista lähestyä katselemalla potenssia $(a + h)^n = (a+h)(a+h)\cdots(a+h)$? Ei ole vaikeaa hahmottaa sitä, että lauseke saa sulkujen poistamisen jälkeen muodon $a^n + na^{n-1}h + h$:n korkeampia potensseja (ja jos halutaan, induktiota voi käyttää). Erotusosamäärän raja-arvon oikea muoto on tästä heti nähtävissä.

Kaikki kirjat perustelevat tulon derivointikaavan derivaatan määritelmän ja raja-arvojen laskusääntöjen avulla. Yleensä suoraviivainen PM ei tyydy tässä yhteydessä tavalliseen temppuun $f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x) = f(x + h)g(x + h) - f(x + h)g(x) + f(x + h)g(x) - f(x)g(x)$, vaan keksii eksoottisennäköisen hajotelman

$$\begin{aligned} &f(x)g(x) - f(a)g(a) \\ &\quad = (f(x) - f(a))g(a) + f(a)((g(x) - g(a)) \\ &\qquad +(f(x) - f(a))(g(x) - g(a)). \end{aligned}$$

Kyseessä on – niin kuin kirjassa todetaankin – pinta-alojen välinen relaatio, kun suorakaide jaetaan neljäksi osasuorakaiteeksi.

Osamäärän derivointikaavan johto löytyy täydellisempänä vain LA:sta ja MT:stä. PM ilmoittaa osamäärän derivoituvaksi ja määrittää derivaatan lausekkeen tulon derivointikaavan avulla. PY esittää saman asian harjoitustehtävänä, muttei viittaa siihen, että tämä laskutapa edellyttää osamäärän olevan derivoituvan.

Derivaatan määrityksen olennaisimpia peruspilareita on mahdollisuus muodostaa yhdistetyn funktion derivaatta, kun yhdistämiseen osallistuvien funktioiden derivaatat ovat hallinnassa. Lukion opetussuunnitelman omituisuuksien takia derivaatta-kurssin funktiovalikoima on suppea, joten yhdistetyn funktion derivoinnin lykkääntyminen myöhemmäksi ei liene katastrofi. MT ja PM ilmoittavat kuitenkin kaavan $(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x)$.

Derivaattaa sovelletaan joka kirjassa tangentin määritykseen – joka toisaalta on ollut derivaattakäsitteen lähtökohtana. LA ja PY esittävät yhtenä sovelluksena kahden toisiaan leikkaavan käyrän välisen kulman määrittämisen. Tässähän on kyse leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välisestä kulmasta, johon päästään käsiksi, kun tangenttien kulmakertoimet tunnetaan. LA esittää kaavan, joka periytyy tangenttien suuntaisten vektorien pistetulosta, PY puolestaan kaavan, joka lähtee kahden kulman erotuksen tangentista. Kumpikin kaava esitetään perusteluitta, *deus ex machina*. LA antaa toiseksi mahdollisuudeksi käyttää kaavaa $\tan\alpha = k$ kertomatta sanallakaan, mikä on k.

”Funktion kulun tutkiminen” on kaikissa kirjoissa käsitelty derivaatan sovellus. PM esittää tämän kirjoittajalle aikaisemmin tuntemattoman, näppärän termin *terassikohta*. Sellainen on esimerkiksi funktiolla x^3 origon kohdalla. LA puhuu *tasannekohdasta* ja kertoo tällaisia kohtia nimitettävän ”käännepisteiksi”. Kun käännepisteen yleisempi merkitys ei tule mainituksi, saattaa oppilaalle jäädä hiukan virheellinen käsitys.

Derivaatasta funktion kululle saatava keskeisin tulos on

$$f'(x) \geq 0 \text{ välillä }]a, b[\Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

Kirjat perustelevat sen yleensä graafisesti, nojautuen ajatukseen nousevien tangenttien ja kasvavuuden samansisältöisyydestä. PY esittää lisätieto-osastossaan asian täsmällisen todistuksen edellyttämän differentiaalilaskennan väliarvolauseen todistuksineen (tietysti nojautuen Rollen lauseeseen, jonka täsmällinen todistus vaatisi Bolzano-Weierstrassin tai Heine-Borelin lauseen tai vastaavan päättelyn ja viime kädessä reaalilukujen täydellisyysominaisuuden). Myös MT mainitsee väliarvolauseen lopun tutkimus- ja harrastustehtäviä -osastossa. Huolestuttava on LA:n esitys: kirja perustelee (ei kylläkään ihan korrektisti) sen, että kasvavan funktion derivaatta on positiivinen ja ilmoittaa tämän jälkeen heti, että jos derivaatta on positiivinen, funktio on kasvava! Matematiikan oppikirjan ei soisi antavan tämänlaisia riittävän ja välttämättömän ehdon sekoittamisen malleja.

Derivaattakurssin työkalupakkiin ei kuulu toinen derivaatta. Sille olisi käyttöä funktion kulun tarkastelussa. Esimerkiksi LA:n sivun 110 esimerkin ”Millä vakion $a \neq 0$ arvoilla funktiolla $f(x) = \frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ on minimikohtia?” hankalannäköinen ratkaisu lyhenisi kovin, jos saisi käyttää hyväksi tietoa funktiosta $f''(x) = 3ax^2 - 1$.

Derivaatan helposti markkinoitava ”hyödyllinen” sovellusala on yhden muuttujan funktion optimointi. (Jätän tässä kertomatta tosiperäisen kertomuksen matematiikan opetuksesta ja Kiinan kulttuurivallankumouksesta.) Kaikki kirjat esittelevät geometrisia optimointitehtäviä. Kun funktiovalikoima on pieni, esimerkkivalikoimakin jää rajalliseksi. Ainakin LA, MT ja PM käsittelevät tehtävän, jossa suorakulmaisesta levystä poistetaan neljä kärkineliötä niin, että saadaan taiteltua mahdollisimman suuritilavuuksinen uunipelti. PM:n kirjoittajat ovat keksineet hiukan innovatiivisen esimerkkialan: rakennelmat, joiden tilavuutta maksimoidaan niitä pystyssä pitävien teräsputkien pituuden suhteen. – PY markkinoi ääriarvotehtävän ratkaisuksi ”Fermat’n lausetta”, jonka mukaan ”suljetulla välillä jatkuva ja avoimella välillä derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa”. Vaikka Pierre de Fermat ratkaisikin ääriarvotehtäviä laskutoimituksin, jotka vastaavat derivaatan nollakohdan määritystä, on hänen nimensä kytkeminen asiaan, jossa kaikki käsitteet ovat huomattavasti Fermat’n kuoleman jälkeen syntyneitä, aika keinotekoista. Itse en ainakaan ole tähän Fermat’n lauseeseen muualla törmännyt.

Toista derivaatan vähintään yhtä hyödyllistä sovellusta, ”funktion argumentin pientä muutosta h vastaava funktion arvon pieni muutos on likimain $f'(x)h$” eli differentiaalikehitelmää en kirjoista löydä. Miksi?

Kirjojen pintavertailua

Kaikissa kirjoissa on kertausosasto, jossa asiat esitetään tiivistetysti. Se saattaisi olla paras opetuksen runko. Kirjoissa on asiahakemisto ja MT:ssä myös pieni suomalais-englantilainen sanasto (joka näyttää periytyvän kirjan aiemmasta versiosta, kun myös *yhdistetty funktio* on mukana).

Kirjoista ei puutu laskutehtäviä. Niiden lukumäärät ovat LA 392, MT 420, PM 437 ja PY 466. Tehtäviin on annettu ratkaisut. Jostain syystä LA ja PY jättävät ratkaisun tai ratkaisuviitteen antamatta niissä (harvoissa) tapauksissa, jossa tehtävä alkaa sanoin ”osoita, että” tai ”todista, että”. Tehtävät ovat lähes kautta linjan helppoja. Loistavan singulariteetin muodostaa MT:n tehtävä numero 340, selvästi matematiikkakilpailutasoinen tehtävä, jonka kuulumista kurssiin sopii epäillä, kun ratkaisu perustuu Vietan kaavan soveltamiseen 20. asteen yhtälöön. LA maustaa tehtäväosastoaan muutamalla erikielisellä tehtävällä – kielivalikoimaan on tullut jopa nynorsk. Vieraiden kielten kielentarkistus ei ole ehkä aivan loppuunsa hioutunut, kun tekstit ovat paikoin kömpelönoloisia ja ainakin tehtävässä 132 englannin sanan *parallel* paikalle on lipsahtanut *linear*. LA on myös sirotellut kirjaan ongelmia, vakavia ja vitsikkäitä.

LA, MT ja PM esittävät alussa ehdotuksen kurssin ajankäytöstä, LA erikseen 45 ja 75 minuutin pituisille oppitunneille. Kirjoissa LA ja PY on muutama huvittava kuva. LA, MT ja PM käyttävät painatuksessa yhtä lisäväriä, LA siniharmaata, MT sinertävää ja PM punaista. PY on muita värikkäämpi.

Siitä huolimatta, että aikaisemmissa oppikirjavertailuissa jo asiaa kummastelin, en malta olla puuttumatta LA:n, PM:n ja PY:n omituiseen kieliasuun. Onko jossain todella päätetty ja määrätty, että matematiikan kirjaa kirjoitettaessa ei toimita niin kuin suomen kielessä yleensä, vaan käytetään esim. rakenteita ”Derivoi. a) x^2 b) x^4 c) x^{28} d) x^{2007} e) x” (ilman loppupistettä tietysti)? Ja miksi malliesimerkit pitää kirjoittaa kirjaan ikään kuin liitutaululle laskua selitettäessä syntyvät välimerkinnät? Vain MT on johdonmukaisesti normaalikielinen. PM käyttää osin oikeaa kieltä. LA (josta yllä oleva lainaus oli), kirjoittaa tehtävien tekstit kunnolla silloin, kun tehtävä on lainattu vanhoista ylioppilaskirjoituksista, mutta samalla sivulla oleva aivan samanrakenteinen ”alkuperäistehtävä” on ilman välimerkkejä.

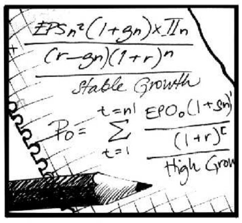
Lopuksi

Mikä olisi ”toimituksen suositus” derivaattakurssin kirjaksi? Se ei varmaankaan olisi LA. LA:sta välittyvä kuva ei ole solidia tietämystä henkivä. Kömmähdyksiä ja epätarkkuuksia on aika paljon. Kirjalle olisi varmaan ollut eduksi jonkinasteinen ennakkotarkastus. PY käyttää runsaasti tilaa ”oikean matematiikan” opettamiseen mielenkiinnoltaan kyseenalaisessa kehyksessä, funktion monotonisuuden yhteydessä, ja on muutenkin kovin laaja ja rönsyilevä – onko raja-arvoihin todellakin mentävä toispuolisten raja-arvojen kautta? Valintani kävisi MT:n ja PM:n välillä. Jälkimmäinen on ”kansanauto”, vailla erikoisominaisuuksia, mutta tekee sen, minkä tekee, ihan kunnolla. MT olisi monessa suhteessa matemaatikon valinta – ainoa kirja, josta voi ainakin nähdä, miten matematiikkaa esitetään ja kirjoitetaan. Makuasia, kumman valitsee. Ja makuasioista on parempi kiistellä kuin puhtaista faktoista.

Mutta kaikkien oppikirjojen poukkoilevat kompromissit matemaattisen – siis loogis-deduktiivisen – ja heuristis-käytännöllisen esityksen välillä panevat kyllä vakavasti miettimään matematiikanopetuksen perimmäisiä kysymyksiä. Onko opetettava matematiikkaa vai laskentoa? Jos päätetään opettaa matematiikkaa, niin ainakin nyt esillä oleva kvartetti osoittaa, että oppisisältönä analyysi ei tätä tarkoitusta oikein pysty palvelemaan. Matematiikan opetukselle ja oppimiselle saattaisi olla siunauksellista palata lukiossa *precalculus*-sisältöihin. Niissä riittäisi matemaattista ainesta, joka olisi myös rehellisesti esitettävissä.

Solmun keskustelupalsta

Solmun keskustelupalsta on osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl`



Matematiikasta, mallittamisesta – ja taloustieteestä, osa 1

Mai Allo
VTL, ekonomisti, mai.allo@helsinki.fi

Myös yhteiskuntatieteilijät ja humanistit käyttävät työssään matematiikkaa. Miten?

Aihetta lähestyttiin kansantaloustieteen näkökulmasta marraskuun matematiikkapäivillä Helsingissä.

Perinteiseen tapaan matematiikkapäivä pidettiin Maunulan koululla, jonne lukioikäistä yleisöä saapui Hämeenlinnasta ja Turusta asti. Heistä osa jo tiesi, minne lukion jälkeen aikoo, mutta monelle oma ammatinvalinta oli vielä avoin. Eniten kuulijoita yhdistikin kiinnostus matematiikkaan ja siihen, miten moneen eri alaan sitä voi soveltaa.

Ennen yhtälöiden ja graafien piirtelyä piti tietenkin selvittää, mitä moinen kansantaloustiede on ja mitä se tutkii.

Kansantaloustiede on yhteiskuntatiede

Kansantaloustiede tutkii ihmisen taloudellista käyttäytymistä ja talousjärjestelmiä sekä niiden toimintaa. Näin se kuuluu yhteiskuntatieteisiin. Kansantaloustieteen asiantuntijaa kutsutaan ekonomistiksi.

Kansantaloustiede ei ole sama asia kuin liiketaloustiede. Liiketaloustiede käsittelee asioita yrityksen ja voiton näkökulmasta, kansantaloustiede yhteiskunnan ja sen vuorovaikutusten näkövinkkelistä. Teoriat ja metodit eivät ole yhteneviä kansantaloustieteessä ja liiketaloustieteessä.

Kansantaloustiede nojaa matematiikkaan

Matematiikka on kansantaloustieteilijälle tärkeä apuväline. Myös tilastotiede kuuluu ekonomistin ammattitaitovaatimuksiin, ja käytännön työssä tulee pystyä käsittelemään erilaisia aineistoja.

Matematiikka pysyy sisällöllisesti samana asiana kaikille ja kaikkialla sovellusalueesta riippumatta. Ekonomisti käyttää sinänsä aivan samoja matemaattisia apuvälineitä kuin fyysikko tai kemisti, mutta ko. metodeilla saatujen tulosten tulkinta tietenkin eroaa fysiikan ja taloustieteen maailmassa. Puhutaanhan toisessa elottomasta luonnosta ja toisessa ihmisen luomasta järjestelmästä.

Matematiikan opiskelu kuuluu olennaisena osana ekonomistin koulutukseen. Helsingin yliopistossa opiskelevat kansantaloustieteilijät suorittavat matematiikan pakollisina sivuaineopintoina, mutta monet lukevat matematiikasta täyden oppimäärän (sivulaudatur). Useat tunnetut ekonomistit ovatkin opiskelleet alunperin matemaatikoksi, ja tutustuneet kansantaloustieteeseen sen jälkeen.

Millaisia asioita kansantaloustiede tutkii?

Taloudellisten ilmiöiden kirjo ympärillämme on suunnaton. On helppo mieltää taloudelliseksi kysymykseksi vaikka se, millainen elvytyspolitiikka parhaiten auttaisi meitä selviytymään lamasta. Tai miten eläkevarat tulisi kerätä ja sijoittaa, jotta mahdollisimman moni saisi turvatun vanhuuden.

Kansainvälinen valuuttakauppa tai pörssitoiminta niin hyvine kuin huonoine lieveilmiöineen on niin ikään helppo tajuta kansantaloustieteilijän työkentäksi.

Mutta kansantaloustiede tarjoaa paljon, paljon muitakin kysymyksiä tutkittavaksi. Ala jaetaan karkeasti mikro- ja makrotaloustieteeseen, mutta raja ei ole ehdoton.

Monet ekonomistit pyörittelevät tällä hetkellä esimerkiksi kysymystä siitä, miten kuluttajien vaatimukset eettisistä tuotantotavoista vaikuttavat yrityksen tuotantopäätöksiin. Jotkut selvittävät, miten tulisi säädellä kulutusta ja tuotantoa niin, että ympäristötuhot minimoituisivat. Entä voitaisiinko isot ympäristötuhot estää vaikkapa ympäristöveroilla? Tai millainen taloudellinen kasvu turvaisi hyvinvoinnin, mutta säästäisi luonnonvaroja tulevillekin sukupolville?

Työllisyys on aika hyvä...

Ekonomisteja työskentelee tutkijoina yliopistoissa ja työmarkkinajärjestöjen ekonomisteina. Heitä on pankeissa ja vakuutusyhtiöissä analyytikkoina. Kansainväliset järjestöt (YK, IMF, Valuuttarahasto, Worldwatch-instituutti jne.) palkkaavat ekonomisteja.

...mutta harvat rikastuvat

Yksityisissä yrityksissä (pankeissa jne.) ekonomistit ansaitsevat hyvin, järjestöissä ja yliopistoissa taas ei huippupalkkoja makseta. Useimmat yliopisto- ja järjestöekonomistit tosin hakeutuvat alalle työn kiinnostavuuden, ei niinkään palkan vuoksi.

Että kyynisiä materialistejako?

Joskus kysytään, kiinnostaako ekonomisteja vain raha. Tietysti rahatalouden ilmiöt aivan sellaisenaan kiinnostavat joitakin alan ihmisiä. Mutta kansantaloustieteen opiskelijoiksi hakeutuu joka vuosi joukoittain myös maailmanparantajia. Ja sellaisena he pysyvät valmistumisensa jälkeenkin, kuten jäljempänä käy ilmi. Osa taas opiskelee kansantaloustiedettä siksi, että on kiinnostunut yhteiskunnasta, ja osa siksi, että pitää matemaattisista haasteista.

No niin, kyllä joukkoon kuuluu pari julkikyynistä materialistiakin. Mutta luultavasti he ovat sitä koulutuksestaan huolimatta, eivät sen ansiosta.

Aatteiltaan kirjavaa joukkoa

Osa suomalaisistakin talouselämän ja -politiikan vaikuttajista on alunperin hankkinut ekonomistin koulutuksen. Näkyvimmästä päästä lienee helppo muistaa esimerkiksi Jorma Ollila (entinen Nokian pääjohtaja, nykyinen Shellin hallituksen jäsen, elinkeinoelämän vaikuttaja) tai Suvi-Anne Siimes (entinen Vasemmistoliiton puheenjohtaja, nykyinen lääketeollisuuden edustaja) tai Osmo Soininvaara, joka on vihreän liikkeen keulahahmoja. (Hän on varsinaiselta koulutukseltaan tilastotieteilijä, mutta opiskellut täyden oppimäärän kansantaloustiedettä.)

Kansantaloustieteilijöillä on hyvin standardi – kaikilla samanlainen – koulutus, ja perusteorioista vallitsee vankka yksimielisyys; mutta yhteiskunnallisilta näkemyksiltään ekonomistit siis ovat hyvin kirjavaa joukkoa!

Valtaosa ekonomisteista tekee tietenkin työtään tulematta koskaan millään tavalla tunnetuksi, mutta sehän ei liene tarkoituskaan – työ kiittää tekijäänsä yleensä muutenkin.

Malli on analyysin väline

Matemaattisia malleja käytetään lähes joka alalla fysiikasta biologiaan ja valtio-oppiin.

Mallittamalla saadaan selkeyttä ja uusia näkökulmia monimutkaisiin ilmiöihin, tapahtuivat ne sitten elottomassa luonnossa, biosfäärissä tai yhteiskunnassa.

Mallit ovat eräänlaisia matematiikan avulla tehtyjä kuvauksia tai karttoja jostakin ilmiöstä. Malli yksinkertaistaa monimutkaista ilmiötä ja helpottaa sen analysointia.

Kansantaloustieteessäkin käytetään paljon matemaattisia malleja. Ne perustuvat usein yhtälömuotoon formuloituihin oletuksiin, ja mallin tuloksista (esimerkiksi usean yhtälön ratkaisusta) voidaan tehdä empiirisesti testattava hypoteesi.

Testattavuus on tärkeää, koska tieteen tehtävähän on löytää totuus ja selvittää, onko jokin väittämä totta vai ei.

Joskus kysytään, voiko ihmisen toimintaa ylipäätään mallittaa, onhan ihminen aikomuksineen ja tunteineen kovin ailahteleva tutkimuskohde. Ja miten laskea sellaista, jota ei voi mitata rahassa?

Onkin totta, että useita asioita on vaikea mitata. Eikä kaikkea voi eikä pidä laskea rahassa, ei edes taloustieteessä. Mutta yllättävän suuri osa ihmisen elämän ja talouden ilmiöistä on jotenkin kvantifioitavissa eli lukuina ilmaistavissa. Siten ne ovat myös mallitettavissa.

Jos halutaan esimerkiksi kuvata jonkin maan hyvinvointia lukuina, pystymme ongelmitta numeroiksi pukemaan muun muassa lukutaitoprosenttia, syntyvyyttä, työpäivän pituutta, sukupuolten samapalkkaisuutta jne.

Taloustieteen kiistattomimmat tulokset perustuvat malleihin. Mutta hyvä taloustieteilijä tietää rajansa. Vaikka matematiikka itsessään on eksaktia, ei siitä seuraa, että taloustieteessä saavutettaisiin aivan joka asiassa yhtä varmoja tuloksia kuin vaikkapa fysiikassa. Ihmistä tutkivilla aloilla ei kaikkea voi testata, koska se olisi joko kallista, epäeettistä tai muuten mahdotonta.

Ja nyt harjoituksiin

Yhden matematiikkapäivän aikana ei tietenkään voi käydä läpi kansantaloustieteen mikro- ja makroteoriaa kokonaisuudessaan. Mutta valaisevia esimerkkejä ehdittiin käsitellä useampiakin. Osa niistä on matemaattisesti mahdollisimman yksinkertaisia, melkein triviaaleja, osa teknisesti vaikeampia. Helpot esimerkit on otettu mukaan, jotta oppilaat näkisivät, miten matemaattisesti yksinkertainenkin työkalu voi kertoa paljon ja antaa käyttäjälleen monipuolisen tulkinnan välineen. Toisin sanoen, tieteessä voidaan tehdä hienoja ja kiinnostavia tuloksia ja väittämiä pelkällä peruskoulualgebralla – aina ei tarvita kunnioitusta herättävän näköisiä "risuaitoja". Sitä paitsi: jos kerran kiintoisia tuloksia saa pelkällä yhteen- ja kertolaskulla, niin mitä saammekaan aikaiseksi niillä mutkikkaammilla yhtälöillä!

Edellinen pätee luultavasti kaikilla matematiikkaa käyttävillä tieteenaloilla.

Optimointia

Suuri osa kaikesta tieteellisestä laskennasta on optimointia. Meillä on siis jokin tavoitefunktio (tavoite, joka on kirjoitettu funktiomuotoon), jota maksimoidaan tai minimoidaan. Siis yritämme saada jotakin asiaa mahdollisimman suureksi tai pieneksi ottaen huomioon, että tavoitteemme saavuttamista rajoittaa jokin seikka – se on lyhyesti rajoite. Esimerkiksi: lentokoneeseen pitää mahtua mahdollisimman paljon ihmisiä, mutta koneen pitää olla aivan tietyn muotoinen ja kokoinen, jotta se kuluttaisi mahdollisimman vähän polttoainetta.

Myös kansantaloustieteessä optimoidaan. Konkreettisena esimerkkinä: haluamme ostaa tavaroita ja palveluita, mutta rahaa on vain tietty määrä. Tai: haluamme käyttää aikaa perheemme parissa mahdollisimman paljon, mutta tarvitsemme myös ruokaa. Osa ajasta on siis käytettävä työhön elannon ansaitsemiseksi tai ammattitaidon ylläpitämiseksi. Ja kaiken lisäksi aikakin on rajallinen: vuorokaudessa on vain 24 tuntia – (eikä yksittäisen ihmisen elämä jatku loputtomiin!).

Toinen esimerkki: haluamme käyttää luonnonvaroja pitääksemme yllä hyvinvointia ja vaurautta (lämmintä asuntoa, kännyköitä, hygieenisiä leikkaussaleja), mutta toisaalta luonnonvarojen käyttö tuhoaa tulevia elinmahdollisuuksiamme. Optimointikysymys: miten saamme maksimoitua elintasomme siten, ettei tiettyä luonnonvarojen käyttötasoa ylitetä?

Kaikessa optimoinnissa tarvitaan differentiaalilaskentaa. Tässä näytetään kuitenkin esimerkkejä, joista selviää ilman differentiaalilaskentaa, joten lukion ykkösluokkalaisetkin pääsevät mukaan.

Katsokaamme ensin optimointitehtävää ilman mitään erityistä tulkintaa (tehtävä löytyy Alpha Chiangin kirjasta Fundamental Methods of Mathematical Economics, 3. painos). Tehtävän kanssa lämmiteltyämme voimme siirtyä yhteen mikrotaloustieteen peruspilariin, kuluttajan valintateoriaan.

Olkoon meillä funktio

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 2x_1, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

jolle haluamme mahdollisimman suuren arvon. Näin f on tavoitefunktiomme, jota maksimoimme.

Olkoon meillä rajoite muotoa

$$4x_1 + 2x_2 = 60.$$

Haluamme siis tietää, mikä arvo tulisi antaa x_1:lle ja x_2:lle, jotta f:n arvo olisi mahdollisimman suuri, kuitenkin niin, että x_1 ja x_2 toteuttavat rajoitteen

$$4x_1 + 2x_2 = 60.$$

Formaalisti:

$$\max\ x_1 x_2 + 2x_1 \ \text{ siten, että } \ 4x_1 + 2x_2 = 60.$$

Ratkaisu 1 (ilman differentiaalilaskentaa)

Ratkaistaan rajoitteesta x_2 ja sijoitetaan se tavoitefunktioon:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 60 \\ 2x_2 &= 60 - 4x_1 \\ x_2 &= 30 - 2x_1 = -2x_1 + 30. \end{aligned}$$

Sijoittamalla saadaan tavoitefunktio muotoon

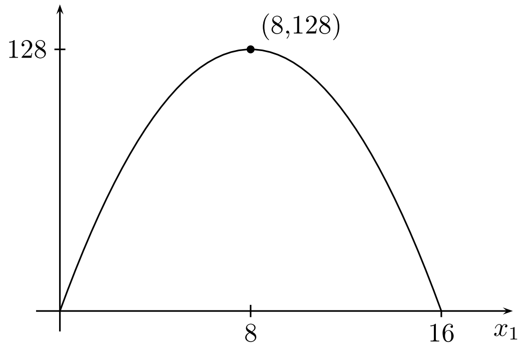
$$\begin{aligned} f^*(x_1) &= f(x_1, -2x_1 + 30) \\ &= x_1(-2x_1 + 30) + 2x_1 \\ &= -2x_1^2 + 30x_1 + 2x_1 = -2x_1^2 + 32x_1. \end{aligned}$$

Näemme, että $f^*(x_1) = -2x_1^2 + 32x_1$ on alaspäin aukeava paraabeli, joten ko. funktion maksimikohta on paraabelin huipussa.

Etsitään paraabelin nollakohdat esim. 2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla tai ratkaisemalla

$$-2x_1(x_1 - 16) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ tai } x_1 = 16.$$

Näin ollen paraabelin huippu on pisteessä $x_1 = 8$ (ks. kuva).



Kun $x_1 = 8$, saamme x_2:n sijoittamalla x_1 rajoitteeseen:

$$x_2 = -2 \cdot 8 + 30 = 14.$$

Tavoitefunktiomme saavuttaa maksiminsa pisteessä $(8, 14)$ ja maksimiarvo on näin ollen

$$f(8, 14) = 8 \cdot 14 + 2 \cdot 8 = 128.$$

Ratkaisu 2 (differentiaalilaskentaa käyttäen)

Ratkaisu olisi löytynyt ehkä suoraviivaisemmin differentiaalilaskennalla. Kun rajoitteen sisältävää tavoitefunktiota merkitään f^*, voidaan ratkaisu saada asettamalla

$$\frac{df^*}{dx_1} = 0$$

ja varmistamalla tämän jälkeen, että

$$\frac{d^2f^*}{dx_1^2} < 0.$$

Tähän esimerkkiin sovellettuna

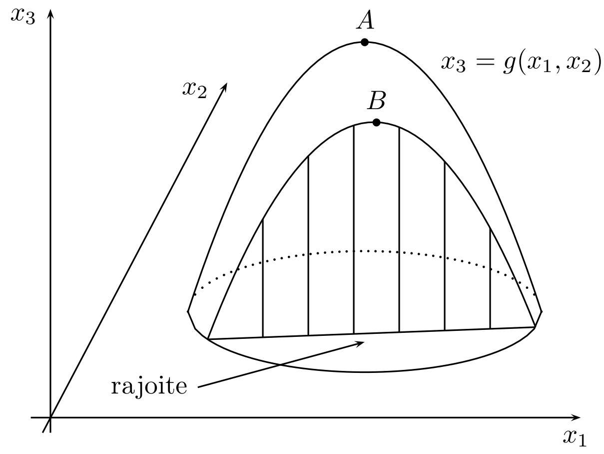
$$\frac{df^*}{dx_1} = -2x_1^2 + 32x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8$$

ja

$$\frac{d^2f^*}{dx_1^2} = -4x_1 < 0.$$

Olemme juuri ratkaisseet erään tyypillisen, joskin teknisesti helpon, optimointiongelman.

Voimme havainnollistaa rajoitettua optimointia kuvalla:



Kuvassa funktion $x_3 = g(x_1, x_2)$ rajoittamaton maksimi on pisteessä A ja rajoitettu maksimi pisteessä B.

Siirrytään nyt soveltamaan rajoitettua optimointia jo mainittuun kuluttajan valintateoriaan. Siinä ratkaistaan kuluttajan ongelma. **Haluamme tietää, miten kuluttaja valitsee hyödykkeitten välillä, kun käytettävissä on rajallinen määrä rahaa.** Hyödykkeet voivat olla tavaroita ja palveluja, vaikka leipää ja sirkushuveja. Käytettävissä olevaa rahaa nimitämme budjettirajoitteeksi.

Jotta saisimme esimerkistämme mahdollisimman helpon, oletamme yksinkertaisuuden vuoksi[1]:

1) kuluttaja kuluttaa vain kahta hyödykettä ja valitsee siis kahden hyödykkeen välillä,

2) kuluttaja on sitä tyytyväisempi, mitä enemmän hän saa hyödykkeitä ja

3) kuluttaja käyttää kaiken tulonsa näihin hyödykkeisiin.

Kuluttajan siis oletetaan maksimoivan hyötyään, ja esimerkissämme tämä hyöty riippuu vain kahdesta hyödykkeestä.

Puemme oletuksemme nyt optimointiongelmaksi näin:

Riippukoon kuluttajan hyöty U kahdesta hyödykkeestä x_1 ja x_2 siten, että $U(x_1, x_2) = x_1x_2$. Siis kun x_1:n määrä kasvaa, kasvaa myös kuluttajan hyöty U, ja sama pätee x_2:lle.

Formuloituna:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} > 0 \text{ ja } \frac{\partial U}{\partial x_2} > 0.$$

Olkoon edelleen kuluttajan käytettävissä oleva tulo $M = 24$, ja olkoot hyödykkeiden x_1 ja x_2 hinnat $p_{x_1} = 4$ ja $p_{x_2} = 8$ (lyhenne "p" tulee sanasta "price").

[1] Tyypillisesti kuluttajan teoriassa oletetaan preferenssit monotonisiksi, transitiivisiksi ja konvekseiksi, ja rajasubstituutioaste hyödykkeitten välillä väheneväksi. Esimerkkilaskumme pystyy käymään läpi ilman ko. määritteiden yksityiskohtaista hallintaa.

Kuluttajan ongelmassa kysytään, kuinka paljon hyödykkeitä x_1 ja x_2 kuluttaja valitsee yo. hinnoilla ja budjettirajoitteella.

Matemaattisesti formuloituna ongelma on

$$\max U(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ siten, että } 4x_1 + 8x_2 = 24.$$

Rajoite on nyt budjettirajoite, josta näkyy, että kuluttaja käyttää kaikki tulonsa kahteen hyödykkeeseen.

Ratkaistaan ilman differentiaalilaskentaa, kuten edellinenkin tehtävä.

Sijoitetaan rajoite tavoitefunktioon. Rajoitteesta saadaan $x_1 = -2x_2 + 6$, jolloin

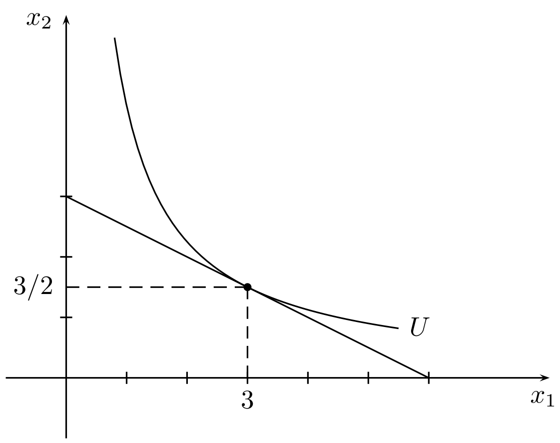
$$\begin{aligned} U^*(x_2) &= U(-2x_2 + 6, x_2) \\ &= (-2x_2 + 6)x_2 = -2x_2^2 + 6x_2. \end{aligned}$$

Ratkaisemme tästä alaspäin aukeavasta paraabelista nollakohdat ja saamme $x_2 = 0$ tai $x_2 = 3$, jolloin $U^*(x_2)$ maksimoituu, kun $x_2 = 3/2$.

$U(x_1, x_2)$ saavuttaa maksimiarvonsa, kun $x_2 = 3/2$ ja $x_1 = -2 \cdot 3/2 + 6 = 3$.

Kuluttaja siis valitsee hyödykettä x_1 3 yksikköä ja hyödykettä x_2 3/2 yksikköä.

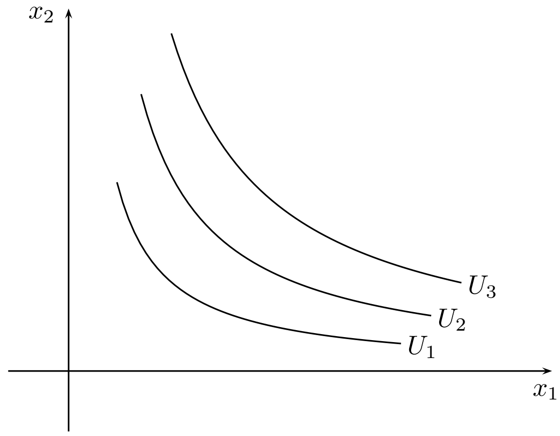
Graafisesti ratkaisu näyttää tällaiselta:



Budjettirajoite on (x_1, x_2)-koordinaatistoon piirretty suora. Sen leikkauspisteet koordinaattiakselien kanssa saadaan laskemalla, paljonko hyödykettä x_1 kuluttaja saisi, jos käyttäisi vain siihen kaikki rahansa. Esimerkiksi x_2:ta saataisiin $24/8 = 3$ kappaletta, jos x_1:tä valittaisiin 0 kappaletta.

Kuluttajan hyötyä kuvaava käyrä (sitä nimitetään indifferenssikäyräksi) sivuaa budjettirajoitetta yhdessä pisteessä, siinä, joka on optimoinnin ratkaisu.

Alla vielä indifferenssikäyriä. Palatkaamme tekemiimme oletuksiin 1), 2) ja 3) kuluttajan mieltymyksistä. Pitkin yhtä käyrää kuluttajan hyöty on vakio. Jos x_1:stä luovutaan, on tilalle saatava x_2:ta lisää, jotta hyöty pysyisi yhtä suurena. Kuluttaja saisi sitä suuremman hyödyn, mitä kauempana origosta sijoittuvalle käyrälle hän yltäisi (sitä enemmän hyödykkeitä!), mutta hän joutuu tyytymään siihen käyrään, johon pääsee budjettirajoitteen puitteissa.



Pitkin kutakin käyrää U_i, $i = 1, 2, 3$, hyöty on vakio. Hyötytaso on U_3:ssa suurempi kuin U_1:ssä ja U_2:ssa.

Myös ensin tekemämme ”lämmittelytehtävän” olisi voinut tulkita kuluttajan ongelmaksi. Siinä kuluttajan hyöty riippui niin ikään kahdesta hyödykkeestä x_1 ja x_2, ja kuluttaja maksimoi hyötyään, joka oli muotoa

$$x_1 x_2 + 2x_1.$$

Hyödykkeiden hinnat kyseisessä esimerkissä olisivat olleet 4 ja 2, ja käytettävissä oleva tulo olisi ollut 60.

Yllä olevissa esimerkeissä kuluttajan ongelma oli kovin yksinkertainen. Oletimme muun muassa, että rajoite on yhtälö. Se voisi olla myös epäyhtälö muotoa $ax_1 + bx_2 \leq M$ tai $ax_1 + bx_2 \geq M$, jolloin voisimme kuvata sitä, että kuluttaja säästää tai elää velaksi. Optimointi epäyhtälörajoitteella vain on jonkin verran monivaiheisempaa kuin yllä esitetty.

Taloustieteen arkityössä kuluttajan hyötyfunktiot ja niitä koskevat oletukset ovat niin ikään vähemmän suoraviivaisia kuin tehtävässämme. Eihän esimerkiksi kuluttaja aina tule sitä tyytyväisemmäksi, mitä enemmän hyödykkeitä saa, vaan jokin hyödyke voi olla ”haitake”.

Ja kuluttajan hyöty, tyytyväisyys ja tarpeentyydytys voi riippua myös täysin aineettomista asioista, vaikka omien lasten hoitamisesta. Ne voidaan yllä esitetyin periaattein mainiosti mallittaa, sillä nekin ovat talouteen kuuluvia ilmiöitä, vaikka ovatkin arvovalintoja ja ”tunneasioita”. Niiden formuloiminen tosin saattaa vaatia paljon työtä.

Seuraavaksi tutustumme peliteoriaan. Se on aivan oma, kiehtova maailmansa. Jo oppimiamme optimointitekniikoita käytetään myös peliteoreettisissa yhteyksissä.

Peliteorian vallankumous

Matemaatikko John Nash kehitti 50-luvulla peliteorian, joka on yksi käytetyimmistä analyyttisista kehikoista niin taloustieteessä kuin biologiassa, evoluutioteoriassa ja politiikantutkimuksessa. Kansantaloustieteen kehitykseen peliteoria vaikutti suorastaan mullistavasti; ei ihme, että Nashille myönnettiin ns. taloustieteen Nobel -palkinto hienosta elämäntyöstä.

Peliteorian avulla kuvataan tilannetta, jossa osapuolten toimet tai päätökset ovat toisistaan riippuvaisia. Lienee helppo kuvitella ekonomistien löytämiä sovellusmahdollisuuksia – talous muodostuu juuri siitä, että ihmiset, yritykset ja instituutiot ovat vuorovaikutuksessa keskenään.

Perheenjäsenet neuvottelevat siivousvuoroista ja viikkorahoista. Yritysten työnantajat ja työntekijät sopivat palkoista, valtiot asettavat itselleen ja toisilleen saastepäästörajoja Kiotossa, EU-maat kiistelevät keskenään rahaliiton säännöistä... Paljon lyhemmän listan saisi koottua hakemalla esimerkkejä siitä, millainen ihmisten välinen toiminta ei sopisi peliteorian puitteisiin.

Ohessa näemme jälleen kerran yksinkertaisimman mahdollisen pelin: se esitetään pelkkänä numerotaulukkona. Sillä havainnollistetaan tilannetta, jossa osapuolet tekevät päätöksiä sen mukaan, mitä olettavat toisen päättävän tai päättäneen (jos sinä näin, niin minä näin, mutta jos sinä noin, niin minä noin).

Peliesimerkkimme pohjautuu ns. vangin pulmaan, joka saattaa joillekin lukijoille olla tuttu yläasteen matematiikan kursseilta. Tässä vangin pulmaksi nimitetty tilanne on laitettu esittämään kahden yrityksen pyrkimystä jakaa markkinat keskenään. Ehkä voisimme puhua vaikkapa öljymarkkinoista. Merkitään näitä yrityksiä A:lla ja B:llä.

Olettakaamme, että kumpikin yritys voi valita joko korkean tuotannon tason (K) tai matalan tuotannon tason (M). Jos molemmat tuottavat paljon, öljyn hinta laskee. Olkoot tällöin voitto yritystä kohti 1 yksikkö. Jos kumpikin tuottaa vähän, öljyn tarjonta kokonaisuudessaan jää vähäiseksi ja hinta nousee. Voitto yritystä kohti olkoon silloin 2. Paras tulos yhdelle yritykselle olisi se, että toinen tuottaisi vähän ja se itse paljon; koko toimialan tuotanto pysyisi silloin riittävän alhaalla, mikä estäisi hinnan laskun. Mutta se, joka voisi tuottaa hiukan enemmän tuolla korkealla hinnalla, saisi parhaan voiton, 3 yksikköä. Oletamme, että "lyhemmän korren" vetänyt tekisi tässä tilanteessa nollatuloksen.

Taulukossa jokaisen laatikon vasemmanpuoleinen numero kuvaa A:n ja oikeanpuoleinen B:n voittoa yllä kuvatuissa eri tilanteissa.

		yritys B	
		K	M
yritys A	K	1 1	3 0
	M	0 3	2 2

Miten peli etenee? Katso ensin tilannetta yrityksen A näkökulmasta. Ensin A harkitsee, mitä tehdä, jos B päättäisi tuottaa paljon öljyä. Silloin A on jommassa kummassa vasemmanpuoleisessa kuvion laatikossa. A saa voiton 1, jos se valitsee korkean tuotannon tason, ja jää nollille, jos se valitsee matalan tuotannon tason. A:n on siis parasta tuottaa itsekin paljon. Entä jos B päättääkin tuottaa vähän? A valitsee silloin jomman kumman oikeanpuoleisista laatikoista. Silloinkin A:n näyttäisi olevan parasta valita korkea tuotannon taso ($3 > 2$).

Sanomme, että yrityksen A dominoiva strategia on tuottaa paljon, koska se on parasta, mitä A voi tehdä riippumatta siitä, mitä B tekee.

Tee nyt seuraava harjoitus: katso asiaa B:n näkökulmasta. Jos teet harjoituksen oikein, huomaat, että myös B:n dominoiva strategia on tuottaa paljon, teki A sitten miten päin tahansa.

Niinpä peli päätyy "tasapainoon" vasemmassa yläkulmassa, jossa kumpikin saa voiton 1 ja kumpikin tuottaa paljon. Nimitämme tätä tilannetta Nash-tasapainoksi.

Mutta kuinka näin käykään – näemmehän taulukosta, että kumpikin yritys saisi voiton 2, jos kumpikin tuottaisi vähän! Miksi yritykset eivät päädy siihen?

Ne eivät päädy siihen siksi, että kumpikin tietää toisen kiusauksen pettää eli tuottaa sittenkin vähän enemmän toisen tuottaessa vähemmän. Elleivät yritykset voi tehdä sitovaa sopimusta, joka estää pettämisen, päätyy tämä peli aina kummallekin epäedulliseen lopputulokseen (emme tässä nyt ota lainkaan huomioon öljyn ostajien etua).

Kumpikin yritys siis voittaisi, jos pelaajat pystyisivät sopimaan asioistaan etukäteen – ja sitovasti.

Tämän yksinkertaisenkin pelilaatikon kanssa analyysia voisi rikastaa vaikka kuinka pitkälle – kuin sakkilaudalla. Pelejä on eri mittaisia, toistuvia tai vain yhden kerran pelattavia. Ja sopimistapoja niin ikään monen tyyppisiä.

Esimerkissämme kuviteltiin kahta öljyntuottajaa (OPEC pääseekin usein peliteoreetikkojen papereihin). Mutta ei ole vaikea rakentaa itse aivan toisenlaisia asioita esittäviä pelejä. Ajatellaanpa vaikka tilannetta, jossa yhteiskunnan kannalta olisi toivottavaa, että jotakin tuotetta, joka saastuttaa, tehtäisiin ja käytettäisiin vähemmän.

Taloustieteilijän arkityössä peliteoreettiset tutkimukset eivät näytä nelikulmioon kootuilta numeroilta, vaan joukolta tavoitefunktioita, joille haetaan ratkaisua. Edellä käsittelimme optimointia. Peliteoreettinen malli voi olla esimerkiksi sellainen, jossa yksi tilanteen osapuoli ensin maksimoi tavoitettaan jollakin rajoitteella, ja tämän maksimoinnin tulos sitten asetetaan toisen osapuolen tavoitefunktion rajoitteeksi.

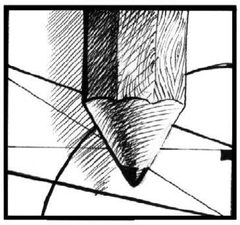
Optimoinnin ja peliteorian alkeitten jälkeen matematiikkapäivien yleisö siirtyi miettimään muun muassa keynesiläistä talouspolitiikkaa ja kansainvälisen kaupan kiemuroita. Niihin palataan osassa 2, joka julkaistaan Solmun seuraavassa numerossa 2/2009.

Lähteet

David Begg – Stanley Fischer – Rudiger Dornbusch: Economics 7th ed., 2005

Peter Birch Sorensen – Hans Jorgen Whitta-Jacobsen: Introducing Advanced Macroeconomics, 2005

Mai Allon omat luennot Helsingin yliopistossa



Kirkosta Koreaan ja kristilliselle opistolle

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Matematiikan laitos
Turun yliopisto

Olin kirkossa kuullessani ensimmäisen kerran kansainvälisistä matematiikkaolympialaisista. Informoija ei suinkaan ollut pappi saarnastuolissa, vaan vieressäni istuva ystäväni. (Hänestä ei kuitenkaan tullut matemaatikkoa myöhemmin.) Hän kertoi, että maailman parhaat matemaatikot kilpailevat matematiikkaolympialaisissa. Tämä ehkä on hieman liioittelua – tarkempi muotoilu olisi ollut, että kunkin maan parhaat koululaismatemaatikot edustavat maataan kilpailuissa. Silloin mietin, että olisi todella hienoa, jos matematiikkaolympialaisiin joskus pääsisi. Ajattelin myös, että käytännössä se kuitenkin on aivan mahdotonta.

Ehkä viitisen vuotta kului. Noiden vuosien aikana olin ryhtynyt kilpailemaan kansallisella tasolla. Joulukuun 28. päivänä vuonna 1997 sain dosentti Matti Lehtiseltä kirjeen, jossa kerrottiin, että olin päässyt matematiikan olympiavalmennukseen ja että olin ehdolla edustamaan Suomea matematiikkaolympialaisissa 1998 Taiwanissa. Olin tuolloin yhdeksäsluokkalainen ja aivan käsittämättömän riemuissani siitä, että pääsin mukaan lukiolaisten valmennusrinkiin. Mahdolliset vapaa-ajan ongelmatkin ratkesivat kirjeen mukana tulleen tehtäväsarjan avulla... Sarjassa oli 16 tehtävää, näistä 15 alkoi sanalla ”osoita” tai ”todista”. Kaikki olivat geometriaa. Räpistelin tehtävien kanssa lopun joululomaa, uudenvuoden yön, lukuisat koulutunnit ja välitunnit. Lopulta sain ehkä 2/3 omasta mielestäni ratkaistua.

Maaliskuussa pääsin ensimmäisen kerran Päivölän kansanopistolle viikonloppuvalmennukseen. Päädyin jotenkin yläastelaisten (eli Päivölään tutustujien) puolelle. Omaa tasoani tämä ehkä vastasi paremmin kuin olympiavalmennus. Tutustuin lukuteoriaan ensimmäisen kerran tuon viikonlopun aikana. Soitin lauantaiillalla äidille kertoakseni olevani yhä hengissä, ja mainitsin muiden asioiden seassa, että meille oli opetettu lukuteoriaa, ja että se oli ollut tosi kivaa. Äidiltä tuli tähän hieman hämmästyttävä vastaus: "Isä varmaan innostuu. Hänhän on lukuteoreetikko.” En ollut tiennyt tuota aiemmin. Kotiin palattuani isä ojensi minulle Väisälän Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet ja kehui kirjaa todella hyväksi. Seuraavat kolme vuotta tuo kirja matkustikin yleensä laukussani.

Ensimmäinen puoli vuotta valmennuksessa oli osaltani pitkälti räpistelyä. Seuraavana syksynä aloitin lukion. Monet olympiavalmennettavat olivat kirjoittaneet keväällä ylioppilaiksi, joten yhtäkkiä kuuluinkin mystisesti konkarien joukkoon. Baltian Tiehen (Itämeren alueen joukkuematematiikkakilpailu) olin ensimmäinen varalla. Pääsin myös kansalliseen finaaliin. Lopulta keväällä pääsin pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun, sen jälkeen sain kutsun olympiajoukkueen valintaleirille ja lopulta tulin valituksi joukkueeseen. En ollut mitenkään uskonut valintaani – matematiikkaolympialaisten aikaan minulla olisi itse asiassa ollut lippu Savonlinnan oopperajuhlille. Olin tosin tehnyt epätoivoisen ahkerasti töitä joukkueen valintaan asti. Ikävänä seurauksena oli lievästi psykedeelinen uni, jossa kolmio pyöri ympäri koko yön ajan. Tarpeetonta lienee kertoakaan, että olin geometrian tehtävän kanssa takonut päätä seinään aika pitkään.

Olympialaiset menivät hyvinkin siedettävästi. Sain yhdeksän pistettä (42 oli maksimi). Tuolla ei parempaan puoliskoon sijoittunut, mutta monia jäi vielä oman suoritukseni alle. Matematiikkaolympialaisten kummallisuus on hyvin pienet pistemäärät suhteessa maksimipisteisiin. Tämä tietysti johtuu tehtävien vaikeudesta, joka on taas välttämätöntä, jotta lapsesta saakka valmennetut kiinalaiset ja venäläiset saadaan paremmuusjärjestykseen. Opin lisäksi pelaamaan backgammonia ja ratkaisemaan tilapäisesti majoituksen torakkaongelman (kannattaa käyttää muovisia juomapulloja pyyntivälineinä). Näistä ensimmäisestä on myöhemmin ollut enemmän hyötyä. Jälkimmäinen on lähinnä luonut turvallisuuden tunnetta epämääräisiin oloihin joutuessa.

Seuraavan syksyn Baltian Tie -joukkueemme oli historiallinen: joukkueen viidestä jäsenestä neljä oli tyttöjä. (Joukkueessa olivat lisäkseni Mikko Harju, Laura Koponen, Riikka Korte ja Johanna Tikanmäki.) Meiltä jopa kyseltiin hieman hämmästyneesti, olemmeko kaikki tosiaan samassa joukkueessa.

Seuraavan kesän matematiikkaolympialaiset olivat Koreassa. Olin tähän saakka kuvitellut, että ainoa sivistysvaltio, jossa koululaisia suljetaan aidatulle alueelle, olisi Yhdysvallat (Space Campiin perustuva kokemus), mutta Koreassa näin kävi myös. Kilpailukampuksena toimi Taejonin yliopisto. Alueella saimme liikkua aika vapaasti, mutta alue oli aidattu ja alueelta poistuminen kielletty. Virolaiset tosin ainakin poistuivat, koska ei ollut mitään järkeä tulla niin kauas vain tuijottaakseen pientä plänttiä maata ja joitakin rakennuksia. Oma oppaamme oli onneksi hyvin ystävällinen ja hänen kanssaan saimme jopa luvallisesti poistua alueelta. Lisäksi virallisia ekskursioita oli useita. Kävimme Pusanissa, useilla nähtävyyksillä ja jopa presidentin vastaanotolla. Minua ei varmasti koskaan lakkaa hämmästyttämästä presidentin vartijoiden ulkonäön samankaltaisuus – ihan kuin samasta ihmisestä olisi ollut kopioita.

Varsinainen kilpailu oli jaettu kahdelle päivälle. Molempina päivinä oli 3 tehtävää ja 4,5 h aikaa. Kilpailusarja oli miellyttävän vaihteleva. Ekana päivänä oli eräänä tehtävänä hyvin herttainen kolmen muuttujan epäyhtälö. Tein typeryyksiä tehtäviä ratkoessa (jostain syystä kilpailupaniikissa voivat triviaalitkin asiat tuntua hankalilta). Lopulta sain tehtävästä täydet pisteet. Matti Lehtinen kertoi myöhemmin, että tehtävän koordinointi oli ollut hieman kummallinen. Ensin minulle oli ehdotettu nollaa (vaikka jo lausekkeen aukikertomisesta sai yhden) ja pienen lisäselityksen jälkeen täysiä pisteitä, eli seitsemää. Viimeinen paperiin kirjoittamani välivaihe oli kieltämättä verrattain epäselvä ja puutteellinen, mutta sitä kirjoittaessani aika oli loppumassa.

Seuraavan päivän tehtävät menivät osaltani paljon heikommin. Lukuteorian tehtävä ei osoittanut mitään yhteistyön merkkejä. Käytin suurimman osan ajasta geometriaan. Piirtelin kuvia ja todistin kaikenlaista, mutta ratkaisu ei kovin lähelle tullut. Pari pistettä kuitenkin sain. Myöhemmin tämä geometrian tehtävä osoittautui koko kilpailun hankalimmaksi. Varsinkaan omalla (olemattomalla) geometrian osaamisellani siihen ajan tuhlaaminen ei ehkä ollut fiksuimpia tekojani. Pronssia kuitenkin kilpailusta sain, eli kuuluin parempaan puolikkaaseen. Myös Riikka ja Mikko saivat pronssia ja Teemu Murtola kunniamaininnan.

Korealainen ruoka oli (kuten arvattavaa) käsittämättömän hyvää. Itselleni lisäksi tarrasi joku lievä addiktio metallisiin syömäpuikkoihin. Niitä olikin sitten myöhemmin hyvin hankala yrittää metsästää länsimaista, kun kaikkialla oli vain puisia ja muovisia. Onneksi olin kaksi paria jo Koreasta tuonut. Korean keittiön kummallisuudet, kuten kimchi, olivat nekin hyviä.

Seuraavaan talveen sisältyi kansallisen kilpailun voitto ja kesällä olivat taas vuorossa matematiikkaolympialaiset, tällä kertaa Yhdysvalloissa. Kilpailu ei mennyt järin loisteliaasti, mutta siitä huolimatta minut vielä huolittiin valmennusrinkiin. Valmennus toi tullessaan omat haasteensa. Aktiivikilpailijana oli ollut selkeä motivaatio harjoitella. Lisäksi omaa tasoa oli voinut testata kaikilla kokeilla ja kilpailuilla. Valmentajana tämä poistui. Lisäksi yliopisto-opinnotkin veivät aikaa. Toisaalta kuitenkin sain keskittyä lukuteoriaan ja epäyhtälöihin, joissa olin aina ollut parempi kuin muilla kilpailualoilla.

Valmennuksen myötä tulivat myös omat velvollisuutensa (tai oikeutensa), eli kilpailuihin osallistuminen sillä toisella puolella. Joukkueenjohtaja ja varajohtaja osallistuvat tehtävien arvosteluun yhdessä kilpailun koordinaattorien kanssa. Välillä tämä tarkoittaa vain yleistä hymistelyä ja myöntymistä pisteisiin, toisinaan muutaman sanan kääntämistä (suomalaisten ratkaisuissa tyypillisesti suomesta englantiin), mutta välillä kunnollista selittelyä, selvitystä ja tappelua pisteistä. Koordinaattorienkin taso vaihtelee hurjasti, joka osaltaan vaikuttaa tähän. Tukholman Baltian Tien koordinaattorit olivat uskomattoman nopeita, tehokkaita ja fiksuja. Toisaalta taas muistan eräästä toisesta kilpailusta geometrian koordinaattorin, jolle suunnistettu kulma osoittautui ylivoimaiseksi käsitteeksi.

Kolmannen osan kilpailujen kolminaisuutta muodostavat järjestäjät. Itsekin olen saanut riemun tutustua tähän puoleen Turun Baltian Tien muodossa. Syksyllä 2006 Baltian Tie -matematiikkakilpailu järjestettiin Turussa kristillisellä opistolla. Voin vaikka vannoa, että valitessamme järjestämispaikkakuntaa kaikki Turun ulkopuolella asuvat äänestivät Turun puolesta. Nuorena ja naiivina en tajunnut sen tarkoittavan, että suuri osa järjestelyistä lankeaisi minulle.

Baltian Tie on verrattain pieni kilpailu moniin muihin suhteutettuna. Kuitenkin kilpailijat on majoitettava ja ruokittava, T-paidat teetettävä kilpailijoille, ekskursiot suunniteltava, bussi vuokrattava, sponsoreita hankittava (ei ensisijaisesti minun tehtäväni), tehtävälehtinen tehtävä (ei lainkaan minun tehtäväni), kerättävä kilpailupaikkakunnasta tietopaketti kilpailijoille, verkkosivut toteutettava, kilpailutilat sovittava, oppaat ja koordinaattorit värvättävä, kilpailun lehdyskä tehtävä, yms. Kaikki näistä ei tietenkään ole välttämättä paikallisjärjestäjän tehtäviä, mutta monessa paikallisuus auttaa kummasti.

Kilpailun järjestäminen on yhtä aikaa palkitsevaa ja käsittämättömän raskasta. Oli toisaalta miellyttävää huomata järjestelyjen menevän hyvin ja kilpailun näyttävän juuri siltä kuin olisin halunnutkin (paikallisjärjestäjä pystyy tekemään despoottimaisesti useita päätöksiä). Tapahtuman jälkeen oli hauska kuulla kehuja ja kiitoksia. Toisaalta oli hirveää pitää kasvavia muistilistoja päässä, miettiä sopivinta kahvi-suklaa-vitamiini-ibuprofeiini-komboa, jolla saisi itsensä pidettyä toimintakunnossa ja terveenä ja tajuta että aikaa oli ihan liian vähän, että ehtisi kunnolla nukkumaan kilpailun järjestämisen lisäksi.

Tämän tekstin ei luonnollisestikaan ollut tarkoitus pelotella lukija pysymään mahdollisimman kaukana matematiikkakilpailuista uhkailemalla torakoilla ja univajeella, vaan pikemminkin kannustaa ja kertoa suurin piirtein rehellisesti kilpailuista. Sitä paitsi totuushan on, että torakkajahti on parempi anekdootti kuin kilpailu, jossa mitään kummallista ei ole tapahtunut.

Kaunis kirja mittaamisesta ja vähän muustakin

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Andrew Robinson: Mittaamisen historia. Suomentanut Veli-Pekka Ketola. Multikustannus 2008. 224 s. Ohjehinta 43 e.

Mittaaminen ja matematiikka kohtaavat usein. Mittaamisen perusongelma: monenko mittayksikön kokoinen mitattava kohde on, on vaikuttanut moneen matematiikan peruskysymyksenasetteluun. Mitattava ei yleensä ole tasan jonkin mittayksikön kokonaislukumäärän suuruinen, joten tarpeen tulee ottaa käyttöön jokin uusi, pienempi mittayksikkö, alkuperäisen mittayksikön jokin tasaosa. Mikä osa otetaan? Tässä alkaa vaihtelu: on kuudeskymmenesosia, kahdeskymmenesosia, kahdestoistaosia, puolikkaita ja neljäsosia jne. Lukujen ilmaiseminen kymmenjärjestelmässä on tehnyt mittayksikön kymmenesosan suosituksi ja standardoiduksi. Ja kun mittaus pienemmälläkään yksiköllä ei mene tasan, on johdonmukaista ottaa käyttöön alkuperäisen yksikön sadasosat, tuhannesosat jne. Tämän meidän rationaalisen mittajärjestelmämme, metrijärjestelmän, kehittivät pääosin matemaatikot, Lagrange, Laplace, Monge ym., Ranskan vallankumouksen aikana toimineessa mittakomiteassa.

Mutta alkeisgeometria ja alkeellinen jaollisuusoppi näyttävät, että vaikka mittayksikköä pilkotaankin, mittaus ei aina mene tasan. Jos mittayksikkönä on neliön sivu, ei lävistäjälle saada tarkkaa mittaa millään äärellisellä mittayksikön tasaosalla, ei myöskään säännöllisen viisikulmion lävistäjälle, jos mittayksikkönä on viisikulmion sivu. Tämä yhteismitattomuusominaisuus aiheutti noin kaksi ja puoli tuhatta vuotta sitten tilanteen, jota on kutsuttu matematiikan ensimmäiseksi suureksi kriisiksi. Se johti toisaalta siihen, että puhdas geometria tavallaan syrjäytti numeriikan, ja toisaalta ateenalaismatemaatikko Eudoksoksen loistavaan ajatuskonstruktioon, jonka avulla oli täsmällisesti ilmaistavissa se, milloin kaksi suureparia olivat keskenään samassa suhteessa, vaikka suureiden vertaaminen yhteisen mitan avulla olikin mahdotonta. Eudoksoksen teorian moderni vastine on reaaliluku, objekti, jota yleensä ei voi lopullisen tarkasti määrittää, mutta jonka ilmaisu on mahdollista millä hyvänsä tarkkuudella (siis esimerkiksi kirjoittamalla riittävän monta desimaalia).

Jotkin suureet ovat vähemmän primäärisiä kuin toiset. Esimerkiksi pituuden mittaukset saattavat antaa tietoa pinta-aloista tai tilavuuksista. Kolmion, suorakaiteen ja yleensä minkä tahansa monikulmion alan tai monitahokkaan tilavuuden määritystä varten ei tarvitse sovitella esimerkiksi mittayksikköneliötä kuvioon tai mittayksikkökuutiota kappaleeseen, vaan tiettyjen pituuksien mittaaminen ja asianmukaiset laskutoimitukset antavat lopputuloksen. Mutta entä kun kuvion reunat ovatkin käyriä? Mikä on ympyrän tai ellipsin ala, mikä pallon tilavuus? Tästä tullaan matemaattisen analyysin peruskysymyksiin, äärettömiin prosesseihin: mitattava kohde pilkotaan kovin moneen pikku palaan, joiden koko on määritettävissä, ja sitten suoritetaan yhteenlasku. Tarkkaan tulokseen päästään vasta, kun paloja on äärettömän monta ja ne ovat äärettömän pieni?. Täsmälliseksi tämä ajatus tulee vasta, kun otetaan käyttöön raja-arvo.

Mittaaminen tulee vielä uudella ja syvällisemmällä tavalla matematiikkaan, kun mm. pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämisessä käytettävää integraalilaskentaa hiotaan. Henri Lebesgue oivalsi runsas 100 vuotta sitten, että funktion f integraalin laskemiseksi paras menetelmä on muodostaa kutakin funktion arvoväliä $\Delta =]y_1, y_2]$ kohden joukko, $f^{-1}(\Delta) = \{x \mid y_1 < f(x) \leq y_2\}$ ja määrittää sen koko $m = m(f^{-1}(\Delta))$, ja lähteä integraalin määritykseen summista, joiden termit ovat muotoa $f(y_2)m$. Nyt tämä joukon koko on oma ongelmansa. Lebesguen integraalikäsitteen ympärille on kasvanut kokonainen suuri matematiikan osa-alue, mittateoria. Sen yksi keskeinen sovellusalue on todennäköisyyslaskenta, epävarmuuden mittaamisen tiede.

Todennäköisyyslaskenta ja mittaaminen kietoutuvat toisiinsa konkreettisemmin mittausten epätarkkuuden teoriassa. On enemmän sääntö kuin poikkeus, että aivan samaa kohdetta aivan samalla tavalla mitattaessa mittaustulokset vaihtelevat. Todennäköisyyslaskenta antaa keinoja sen selvittämiseen, miten todennäköisesti mittaustuloksen oikea arvo on milläkin alueella. Havaintovirheen teorian suurnimi on kuka muu kuin Gauss. Hänen pikkuplaneetta Cereksestä tehtyihin epätarkkoihin havaintoihin perustuvat laskelmansa virheentasoituksineen johtivat hämmästyttävän tarkkaan pikkuplaneetan ratalaskelmaan.

Kirja Mittaamisen historia ei käsittele näitä asioita. Se on runsaasti ja kauniisti kuvitettu katselukirja, "coffee table book", jonka parin sivun artikkelit seuraavat toisiaan melkein satunnaisessa järjestyksessä. Muutamissa toki on puhe mittaamisesta, useimmissa kuitenkin erilaisista muuten vain mielenkiintoisista luonnontieteen asioista, aina Linnén eliöluokitussysteemiin asti. Vaikutelma on suunnilleen sama kuin Tiede-lehteä lukiessa. Kirja on kovin sitoutunut tekijän kotimaahan Englantiin, sen kieleen ja omaperäiseen mittajärjestelmään, joka tuntuu kirjoittajan mielestä olevan jollain lailla luonnollisempi kuin "tieteellinen" metri- tai SI-järjestelmä. Varsin eksoottinen on suomalaiselle lukijalle kirjan loppusivuilla oleva pitkä luettelo englannin kielessä eri yhteyksissä käytettävistä joukkoa ilmaisevista sanoista, ilmiöstä, jonka vastinetta suomessa olisivat vaikkapa sanat (lintu)parvi, (lammas)katras, (susi)lauma, (lehmä)karja, (ihmis)joukko samoin kuin pohdiskelut Intian kartoittajan George Everestin nimen ääntämisestä. Aika marginaalista myös mittaamisen kannalta. Lievästi ärsyynnyin kirjoittajan jokseenkin maneerinomaisesta tekniikasta joka artikkelissa suoraan siteerata jotakin toista kirjoittajaa "NN mainitsee K:ta koskevassa kirjassaan, että..."

Robinson omistaa teoksestaan 14 sivua aiheelle Numerot ja matematiikka. Jakso alkaa hämmästyttävällä toteamuksella, jonka mukaan "mittaamisesta poiketen määrän laskeminen edellyttää kykyä ajatella abstraktisti", koska luvun käsite on abstraktio. Mutta kyllä ihan samasta lukumäärän laskemisesta on mittaamisessakin kyse, nyt mittayksikköjen määrästä. Robinson esittelee kahdella sivulla muutamia muinaisia numerojärjestelmiä. Intialais-arabialaiset numeromme tulevat mukaan melkein alaviitteenä, eikä niiden alkuperästä Intian niemimaalla sanota oikeastaan mitään. Nollaa koskeva luku on aika sekava ja koordinaatiston origon rinnastaminen tyhjyyteen menee ainakin minun ymmärrykseni ohi. Geometrialle on omistettu yksi sivu. Siitä suurin osa kuluu Kheopsin pyramidin mittasuhteiden esittelyyn, mutta jotenkin Robinson pystyy kytkemään mukaan Thaleen ensimmäisenä todistamat lauseet, Eukleideen aksioomat ja epäeuklidisen geometrian. Aika saavutus. Kultaiselle leikkaukselle on sitten omistettu kokonainen sivu ja fraktaaleille kaksi. Loppuyhteenvedon otsikossa kysytään: "Matematiikka: luonnollista vai inhimillistä?" Siinä lainataan Galileita, Einsteinia, Eugene Wigneriä (jonka tunnetun esitelmän "The Unreasonable Usefulness of Mathematics" 'matematiikan yli ymmärryksen käyvä hyödyllisyys' suomentaja on kääntänyt muotoon "matematiikan perusteeton hyödyllisyys"). Kysymykseen – matematiikan platonismin ongelmaan, ei Robinsonilla ole omaa vastausta.

Kirjaa tarkkaan lukiessa ei voi olla ihmettelemättä yhtä ja toista siihen painettua tiedonsirua. SI-järjestelmä ei anna ohjeita lukujen, sellaisten kuin 10^{40} ilmaisemiseen, vaikka siihen mittayksikköjen osien ja monikertojen nimiä sisältyykin (s. 16). Logaritmitaulukot eivät ole vuodelta 1594 vaan 1614 (s. 17; Napier tosin kertoo vuonna 1614 ilmestyneessä kirjassaan saaneensa logaritmi-idean parikymmentä vuotta aikaisemmin). Kronometri ei ole John Harrisonin kädessä sivun 24 kuvassa, vaikka teksti niin väittää. Sivun 26 äärimmäisen karrikoitu maapallokuva ei todellakaan näytä sitä, mitä kuvateksti väittää, siis paikallisista painovoimakentän vaihteluista johtuvaa maapallon geoidin pientä poikkeamista pyörähdyskappalemuodosta. Cahiers de doléances -valituskirjeitä ei lähetetty Ludvig XIV:lle vaan Ludvig XVI:lle (s. 27). Kultaisen leikkauksen määritelmässä ei jaeta suoraa osiin vaan janaa (s. 42), Keplerin lain mukaan Aurinko on planeetan rataellipsin polttopisteessä eikä keskipisteessä (s. 138). Epätarkkuudet panevat epäilemään oikeitakin tietoja, joita toki valtaosa kirjassa esitetyistä on.

Mittaamisen historia on visuaalisesti kaunis ja paljon tietojakin se sisältää, mutta mittaamisen historia se ei oikein ole. Jollain tapaa johdonmukainen mittaamisen ja sen monivaiheisen historian suomenkielinen yleisesitys olisi varsin tervetullut. Toivottavasti sillekin antaisi tukeaan Suomen kirjallisuuden tiedotuskeskus, niin kuin se on nyt esillä olevan teoksen kohdalla tehnyt.