



## Geometriaa Eukleidesta modernisoiden

*Simo K. Kivelä*

**Matti Lehtinen, Jorma Merikoski, Timo Tossavainen**, *Johdatus tasogeometriaan*, WSOY Oppimateriaalit, 2007, 163 sivua.

Geometriasta voi kirjoittaa hyvin monenlaisia kirjoja. Ääriesimerkkejä voisivat olla esillä oleva teos ja Erkki Rosenbergin 25 vuotta sitten ilmestynyt *Geometria*, joiden leikkaus on hyvin pieni, vaikka kumpikin on tarkoitettu yliopistollisen geometrian kurssin oppimateriaaliksi. Rosenbergin kirja keskittyy deskriptiiviseen ja projektiiviseen geometriaan, kun taas Lehtinen, Merikoski ja Tossavainen rakentavat euklidisen geometrian yksityiskohtaisesti modernista aksiomajärjestelmästä lähtien. Jälkimmäinen vastaakin suuressa määrin samaan tarpeeseen kuin Rolf Nevanlinnan 70-luvun alussa ilmestynyt *Geometrian perusteet*.

Lehtisen, Merikosken ja Tossavaisen kirja on suunnattu lähinnä matematiikan opettajiksi opiskeleville, minkä lisäksi sillä ainakin paikoin on käyttöä varmasti myös geometrian harrastajille ja lukion lisämateriaalina.

Kahdessa ensimmäisessä luvussa rakennetaan euklidisen geometrian järjestelmä aksiomista lähtien. Täydennystä aksiomatiikkaan saadaan luvussa 5. Esitys on Nevanlinnan kirjaa huomattavasti yksityiskohtaisempaa, jolloin tietyltä puuduttavuudelta on vaikeata välttyä. Geometrian käsitteiden yksityiskohtainen määrittely ei ole aivan lyhyt prosessi eikä ilmi selvältä tuntuvien asioiden todistaminen aksiomista lähtien läheskään aina helppoa.

Luvut 3 ja 4 ovat kevyempää luettavaa: klassisia, osittain koulukurssin ulkopuolisia tasogeometrian lauseita ja konstruktioita sekä tärkeimmät geometriset kuvaukset. Luvussa 6 käsitellään tunnetut mahdotto-  
muudet: kuution kahdentaminen, kulman kolmijako ja ympyrän neliöinti. Lisäksi pohditaan, mitä tapahtuu, jos luovutaan joko harpista tai viivoittimesta tai jos otetaan käyttöön muitakin välineitä.

Viimeinen luku 7 poikkeaa muusta esityksestä. Kyse ei enää ole geometriasta sinänsä, vaan sen opettamisesta koulussa: millaista opetus on ollut, miten voitaisiin tehdä. Kyseessä on didaktikon näkökulma.

Tasogeometrian aksiomaattista rakentamista ei käsitteäkseni ole yhtä huolellisesti suomenkielisessä kirjallisuudessa tehty. Tätä on pidettävä merkittävänä ansiona. Paikoin häiritsee matemaattisille teksteille usein tyypillinen asennoituminen: riittää, että asia on kunnossa, mutta perustavat ideat ja vaihtoehdot ajatellut voivat jäädä piiloon. Lukija ehkä itse löytää ne asioita monipuolisesti pohdittuaan, mutta häntä voisi tuki hieman auttaa.

Esimerkkeinä voisi mainita janojen yhtenevyyden (kongruenssin, samapituisuuden) määrittelyn, jossa reaalioltilta vaaditaan kolme ominaisuutta, mutta pohdittamatta jää, millaiset mallit toteuttavat vaatimukset. Onko harpilla piirrettävä ympyrä ainoa mahdollisuus tietystä pisteestä lähtevien samapituisten janojen päätepisteiksi (Nevanlinnan terminologialla mittaviivaksi)

vai voisiko jokin muukin käyrä tulla kyseeseen? Ky-symys on sikäli mielenkiintoinen, että se valottaa myös konkreettisen välineen, harpin, merkitystä geometrikon työkaluna.

Samassa yhteydessä (s. 22) on myös kuva, joka saattaa johtaa harhaan. Puolisuora CE on kuvassa janan AB suuntainen, vaikka näin ei tarvitse olla. Virheellinen-hän kuva ei ole, mutta lukijalle saattaa syntyä käsitys, että yhdensuuntaisuus on oleellista, ja vääristä mielikuvista voi olla vaikeata päästä eroon.

Eukleideen Pons asinorum -todistus (s. 27) tasakylkisen kolmion kantakulmien yhtäsuuruudelle puoltaa varmasti paikkaansa klassisen asemansa takia. Lauseen lähes yhtä klassinen Pappuksen (vai pitäisikö sanoa kreikkalaisittain Pappos?) todistus esiintyy vain harjoitustehtävässä. Se olisi voinut ansaita varsinaisenkin käsittelyn sisältämänsä uuden näkökulman takia (kolmio todistetaan yhteneväksi itsensä kanssa, tosin peilattuna).

Kirjan 400 harjoitustehtävää auttavatkin lukijaa syventämään tietojaan ja pohtimaan itsenäisesti asioita – edellyttäen, että ne saavat ansaitsemansa huomion.

Kirja on kirjoitettu lähinnä matematiikan opettajaksi opiskelevien kurssikirjaksi. Tällöin viimeinen didaktinen luku puoltaa paikkaansa. Geometria on kuitenkin ala, jolla pitkän historiansa ja ajattelutapojensa takia on melkoinen rooli kulttuurissamme. Se ansaitsisi pelkästään omilla ehdoillaankin elävän tietokirjan. Tästä

ei itse asiassa jää paljon puuttumaan: hieman väljempi taustoja ja ajattelutapoja avaava teksti, pelkkiä nimiä laajempi historiallinen näkökulma. Erillinen luettelo aksioomista olisi myös hyödyksi: koska teksti näiltä osin on väistämättä raskaanpuoleista luettavaa, voisi aksioomat aluksi silmäillä kevyesti ja vasta vähitellen syventää näkemystään niiden merkityksestä.

Geometrian opetus koulussa ja sen didaktiikka kuuluisi tällöin luontevimmin kokonaan eri kirjaan. Ulottuvuuksiahan on paljon lisääkin: erilaiset aksioomista riippumattomat lähestymistavat (yhtenä esimerkkinä opettajakoulutukseen tarkoitettu ruotsalaisen Torbjörn Tambourin esitys <http://www.matematik.su.se/~torbjorn/Undervisn/Geometri.pdf>), vaikkapa peilauskuvaukset geometrian perustana, dynaamisen geometrian tietokoneohjelmistot jne.

Jokaisessa inhimillisen työn tuotoksessa on myös virheensä. Tekijät ovat olleet realisteja ja julkaisevat verkkosivulla <http://mtl.uta.fi/geometria/> luettelon löydettyistä virheistä. Tämä on hyvä käytäntö.

Kaikkiaan Lehtisen, Merikosken ja Tossavaisen kirja on hyvä lisä geometriaa käsittelevään suomenkieliseen kirjallisuuteen. Tällaisia voisi toivoa olevan enemmänkin ja niiden saavan paremmin näkyvyyttä. Omaan tietoisuuteeni kirja tuli sattumalta toista vuotta sen ilmestymisen jälkeen.