Negatiivisista luvuista

Luvun alkuperäinen ja ensimmäinen merkitys on lukumäärä, kappalemäärä. Aikojen myötä lukukäsitteen ala on laajentunut. Luvuilla voidaan ilmaista kokonaisuuden osia. Näin tullaan murtolukuihin. Jos kokonaisuus on mittayksikkö, niin sen osien tarkka ilmaiseminen murtoluvuin on joissain tilanteissa mahdotonta. Tämä ongelma ratkaistiin irrationaaliluvun käsitteellä ja päättymättömillä desimaaliluvuilla.

Aikanaan havaittiin myös, että lukuun voidaan liittää sellainen lisätieto, joka kertoo määrän lisäksi jotain myös suuunnasta. Kolme omenaa voi vaihtaa omistajaa joko niin, että saan kolme tai annan kolme. Sata euroa voi olla säästössä tai velkana. Esine voi olla kahden metrin korkeudella veden pinnan tai jonkin muun perustason ylä- tai alapuolella.

Suunta liittyy muutokseen. Jos luottotililläni on katetta 100 euroa ja teen kortillani 300 euron ostoksen, tilini saldo vähenee 300 euroa. Kun 100:sta ei kuitenkaan voi ottaa pois enempää kuin 100, tilanne ilmenee niin, että tilini osoittaa 200 euron velkaa. Jos olen metrin korkeudessa veden pinnan yläpuolella ja siirryn kolme metriä alemmas, olen kaksi metriä pinnan alla.

Tällaiset tarkastelut ovat tehneet tarpeelliseksi laajentaa lukukäsitettä. Jokaiseen ”perinteiseen” lukuun, sellaiseen kuin 1, 58, 2,45601 tai $\frac{5}{6}$ liitetään uusi luku, *vastaluku*, jolla on se ominaisuus, että luvun ja vastaluvun summa on nolla. ”Perinteisten” lukujen, joita sanotaan *positiivisiksi luvuiksi* vastalukuja merkitään kirjoittamalla luvun numeromerkkien eteen $-$-merkki: -1, -58, $-2{,}45601$, $-\frac{5}{6}$. Tällaisia lukuja kutsutaan *negatiivisiksi luvuiksi*. Sana on alkuaan latinaa ja tarkoittaa kielteistä. Ennen kuin sana negatiivinen vakiintui tähän käyttöön, tavallisten lukujen vastalukuja saatettiin nimittää vaikkapa kuvitelluiksi luvuiksi tai vajausluvuiksi.

Negatiivisten lukujen hyöty ei tietenkään ole vain siinä, että niiden avulla voidaan lukumääriin tai mittoihin liittää tuota suuntaan liittyvää lisätietoa. Olennaista on, että negatiivisilla luvuilla voi myös laskea. Kaikki negatiivisilla luvuilla laskeminen ei ole aivan itsestään selvää. Katsotaan hiukan, mistä oikein on kysymys. Lähdetään siitä, että laskusäännöt ovat pyhiä ja muuttumattomia.

Ensimmäinen laskutoimitus on yhteenlasku. Mitä tapahtuu, kun negatiivinen luku lisätään johonkin? Tiedämme, että vähennyslasku määritellään yhteenlaskun avulla: luku $a-b$ on se luku, johon on lisättävä b, että saataisiin a. Mutta jos lukuun $a+(-b)$ lisätään b, niin laskusääntöjen mukaan käy näin: $(a+(-b))+b = a+(b+(-b)) = a+0 = a$. Siis $a-b$ ja $a+(-b)$ ovat välttämättä sama luku! Siksipä emme yleensä kirjoitakaan $a+(-b)$, vaan lyhyesti $a-b$.

Negatiivinen lukujen laskuominaisuudet johtuvat niiden vastalukuominaisuudesta. Jokaiseen lukuun, niin positiiviseen kuin negatiiviseenkin, liittyy sellainen luku, että sen ja alkuperäisen luvun summa on 0. Merkitään mitä hyvänsä lukua kirjaimella x ja sen vastalukua aluksi kirjaimella y. Laskusääntöjen voimassolon seuraus on, että x:llä ei voi olla kuin yksi vastaluku. Jos nimittäin olisi $x+y=0$ ja myöskin $x+z=0$, niin olisi $y = y+0 = y+(x+z) = (y+x)+z = z+(x+y) = z+0 = z$. Tästä vastaluvun yksikäsitteisyydestä seuraa, että luvun vastaluvulle voidaan ilman lisäharmeja antaa merkintä, joka muistuttaa alkuperäisestä luvusta. Tapana on merkitä luvun x vastalukua $-x$:llä. Jotkut ylenmääräistä johdonmukaisuutta tavoittelevat ovat halunneet erottaa vastaluvun merkin vähennyslaskun merkistä kirjoittamalla merkin luvun tai sitä edustavan kirjainsymbolin yläkulmaan: $^{-}2$, ^{-}a, mutta tällainen merkintä ei ole vakiintunut. Muinaiset kiinalaiset käyttivät värikoodia: positiiviset luvut kirjoitettiin punaisin merkein, negatiiviset mustin. Nykyaikainen kirjanpito, ainakin anglosaksinen, käyttää värejä toisin päin merkitsemällä velat punaisella.

Vastaluvun määritelmästä ja vastaluvun merkinnästä on seurauksensa. Jos x on positiivinen luku, sen vastaluku on $-x$. Luvulla $-x$ on vastaluku silläkin, ja tätä vastalukua tulisi merkintäsopimuksen mukaan merkitä $-(-x)$. Mutta vastaluvun määritelmän mukaan $x+(-x) = 0$ ja $(-x)+(-(-x)) = 0$. Kun mukaan liitetään yhteenlaskun liitäntä- ja vaihdantalait, voidaan kirjoittaa yhtälöketju $-(-x) = (-(-x)) + 0 = (-(-x)) + (x + (-x)) = (-(-x)) + ((-x) + x) = ((-x) + (-(-x))) + x = 0 + x = x$, eli $-(-x) = x$. Negatiivinen luku on positiivisen luvun vastaluku, ja tämän viimeksi mainitun luvun vastaluku siis taas se alkuperäinen positiivinen luku: $-(-1) = 1$, $-(-207) = 207$. Negatiivisia lukuja kutsutaan joskus miinusmerkkisiksi ja positiivisia lukuja plusmerkkisiksi. Tätä puhetapaa on käytettävä varoen silloin, kun lukuja merkitään kirjaimilla. $a = +a$ saattaa olla negatiivinen ja "miinusmerkkinen" $-a$ positiivinen!

Negatiivisten lukujen kertolasku ei heti näytä aivan talonpoikaisjärjen mukaiselta. Kun kertolasku on alkuaan lyhennysmerkintä saman luvun toistuvalle yhteenlaskulle: $2 \cdot 6 = 6+6 = 12$ tai $4 \cdot 3 = 3+3+3+3 = 12$, niin $(-3) \cdot (-4)$ ei tunnu millään lailla konkreettisesti ymmärrettävältä. Avuksi tulee taas laskutoimitusten pysyvyys. Negatiivisten lukujen kertolasku on toimenpide, joka noudattaa samoja sääntöjä kuin positiivistenkin lukujen kertolasku. Avainasemassa on se, että luvun kertominen nollalla tuottaa aina nollan. (Miksi muuten? Vaikkapa siksi, että luku 1 on sama kuin $1 + 0$ ja jos a on mikä hyvänsä luku, niin $a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + a \cdot 0$. Luvun $a \cdot 0$ lisääminen lukuun a ei muuta a:ta, joten $a \cdot 0 = 0$.)

Jos nyt a ja b ovat mitä hyvänsä lukuja, niin $0 = a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot b + a \cdot (-b)$. Mutta tämähän tarkoittaa sitä, että $a \cdot (-b)$ on luvun $a \cdot b$ vastaluku: $a \cdot (-b) = -(ab)$. Siis vaikkapa $2 \cdot (-3) = -(2 \cdot 3) = -6$ tai $(-100) \cdot (1000) = 1000 \cdot (-100) = -100000$. Positiivisen ja negatiivisen luvun tulo on negatiivinen. Samaa jatkaen saadaan $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(ab)) = ab$. Siispä tuo kummallinen $(-3) \cdot (-4)$ onkin $3 \cdot 4$ eli 12. Kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen. – Tämän asian lienee ensimmäisenä oivaltanut vuoden 600 vaiheilla elänyt intialainen matemaatikko *Brahmagupta*.

Jos tulossa on monta tekijää, osa negatiivisia ja osa positiivisia, niin tulon positiivisuus tai negatiivisuus ratkeaa tekijöiden miinusmerkkien lukumäärän parillisuudesta tai parittomuudesta: pariton määrä negatiivisia tekijöitä johtaa negatiiviseen tuloon, parillinen positiiviseen: $(-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 = 24$, $(-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) = -120$.

Positiivisten ja negatiivisten lukujen ajatellaan usein olevan suoran, ns. *lukusuoran* pisteitä. Miksi näin? Valitaan pituudelle mittayksikkö, kiinnitetään jokin suoran piste, kutsutaan sitä origoksi ja nimetään se O:ksi. Suoralta löytyy tasan kaksi pistettä A ja B, joiden etäisyys O:sta on yksi mittayksikön pituus. Nyt syntyy kaksi toisistaan erotettavissa olevaa suoran puolikasta, puolisuoraa: se joka alkaa O:sta ja sisältää A:n eli puolisuora OAja sitten se toinen puoli eli puolisuora OB. Kutsutaan edellistä positiiviseksi ja jälkimmäistä negatiiviseksi. Jokaisella positiivisen puolen pisteellä X on jokin etäisyys pisteestä O. Se tarkoittaa, että OX:n pituuden suhde janan OA pituuteen on jokin positiivinen luku x. X on ainoa puolisuoran OA piste, jolle $OX : OA = x$. On mahdollista liittää x ja X toisiinsa. Nyt puolisuoralla OB on myös jokin yksikäsitteinen piste Y, jonka etäisyys O:sta on x. Liitämmekin Y:hyn luvun $-x$. Kun vielä O:hon eli origoon liitetään luku 0, on kaikkien suoran pisteiden ja kaikkien reaalilukujen välille saatu yhteys. (Oikeasti asia ei ole ihan näin yksinkertainen, sillä reaaliluku on lopulta varsin vaikea ja syvällinen käsite.) Lukusuora havainnollistaa hyvin lukujen keskinäistä järjestystä ja siirtyminen pisteistä toisiin havainnollistaa yhteen- ja vähennyslaskuja. Sen sijaan kertolaskusäännöille ei lukusuorahavainnollistus oikeastaan anna erityistä tukea.