Gaussin jalanjäljissä

Gauss[1] on kaikkien aikojen suurimpia matemaatikoita. Kerrotaan, mutta tarinan todenperäisyys on epävarma, että Gauss sai yhdeksänvuotiaana opettajaltaan tehtäväksi laskea yhteen kokonaisluvut yhdestä sataan. Hän suoritti laskun välittömästi päässään ja kirjoitti tuloksen 5050 *rihvelitauluunsa*[2] opettajan suureksi hämmästykseksi. Miten hän menetteli? Luultavasti hän huomasi, että jos luvut lasketaan yhteen ensin pareittain $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101, \ldots, 50 + 51 = 101$, niin jokaisen parin summa on 101 ja näitä pareja on 50 kappaletta. Siis kysytty summa on $50 \cdot 101 = 5050$. Tämä sinänsä helppo, mutta lapselta aivan ällistyttävä suoritus, oli mahdollinen siksi, että yhteenlaskettavia oli parillinen määrä. Gauss olisi epäilemättä selvinnyt myös parittomasta määrästä yhteenlaskettavia.

Tutkimme tätä ongelmaa hieman yleisemmällä tasolla laskemalla kokonaislukujen summan yhdestä n:ään, missä n on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku. Merkitsemällä t_n:llä tätä summaa, kirjoittamalla se kahteen kertaan vastakkaisiin suuntiin

$$t_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1, \qquad t_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n,$$

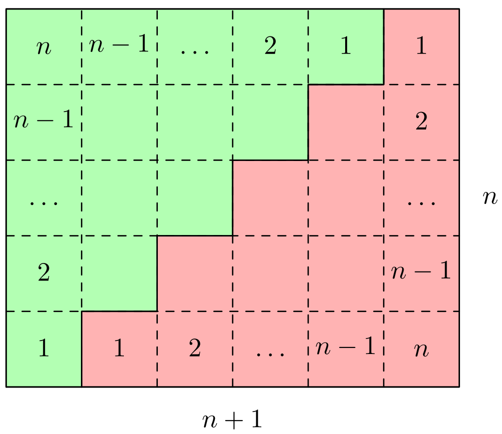
ja laskemalla luvut yhteen pareittain vasemmalta oikealle, saadaan

$$2\,t_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n\,\mathrm{kpl}} = n(n+1),$$

josta edelleen

$$t_n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Kuvio havainnollistaa menettelyä. Suorakulmion ala on $n(n+1)$, ja porras-



viiva jakaa sen kahteen yhtäsuureen osaan.

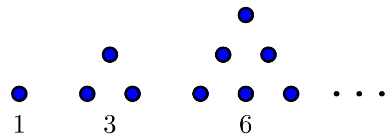
[1] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), saksalainen matemaatikko.
[2] Googlaa rihvelitaulu.

Nyt voit jatkaa Gaussin jalanjäljissä! Alla olevat tehtävät ratkeavat äskeistä soveltamalla.

1. Mikä on n:s *parillinen* positiivinen luku? Laske n:n ensimmäisen parillisen positiivisen luvun summa. Havainnollista summaa edellisen kuvion tapaan.

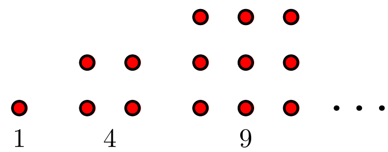
2. Mikä on n:s *pariton* positiivinen luku? Laske n:n ensimmäisen parittoman positiivisen luvun summa.

3. Kuviossa on havainnollistettu kolme ensimmäistä *kolmiolukua*.

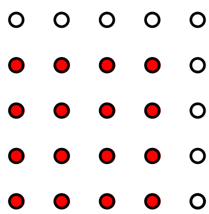


Piirrä kolme seuraavaa kolmiolukua. Selvitä niiden muodostumisperiaate, eli miten annetusta kolmioluvusta saadaan kätevästi seuraava kolmioluku. Määritä n:s kolmioluku.

4. Myös *neliöluvut* 1, 4, 9, ... voidaan havainnollistaa kuvioilla.



Jos punaisten (tummempien) pallojen esittämä neliöluku on n^2, niin



mikä on seuraava neliöluku ja montako valkoista palloa on n^2:een on lisättävä sen saamiseksi? Kirjoita vastaus yhtälöksi. Mitä yhteistä neliöluvuilla on kakkostehtävän kanssa?

5. Määritä t_{n-1} ja t_{n+1}, kun $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

6. Olkoot m ja n ($m < n$) positiivisia kokonaislukuja. Johda kaava summalle

$$s = m + (m+1) + (m+2) + \ldots + (n-1) + n.$$

Onko kaavasi voimassa, jos $m = n$?

7. *Varsinaisiksi murtoluvuiksi* kutsutaan murtolukuja, joiden osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia ja osoittaja on pienempi kuin nimittäjä. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Kuinka monta sellaista varsinaista murtolukua on, joiden nimittäjä on enintään n? Laske kaikkien näiden murtolukujen summa ja keskiarvo. Pystytkö arvaamaan keskiarvon ennen kuin lasket sen? Päättele tuloksen perusteella, mikä voisi olla *kaikkien* varsinaisten murtolukujen keskiarvo.

8. Olkoot a sekä d reaalilukuja ja n positiivinen kokonaisluku. Määritellään luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seuraavasti:

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & a, \\ a_2 & = & a + d, \\ a_3 & = & a + 2d, \\ a_4 & = & a + 3d, \\ \cdots & & \cdots \\ a_n & = & a + (n-1)d. \end{array}$$

Todista, että

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\,\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

9. Lukujono (a_n) muodostuu seuraavasti:

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & 1, \\ a_2 & = & 2 + 3, \\ a_3 & = & 4 + 5 + 6, \\ a_4 & = & 7 + 8 + 9 + 10, \\ a_5 & = & 11 + 12 + 13 + 14 + 15 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Määritä jonon n:s termi a_n.

Geometrinen summa

Kauan sitten eräs hallitsija ihastui shakkipeliin niin, että hän lupasi sen keksijälle palkinnoksi mitä tahansa, mitä tämä vain ymmärtäisi pyytää. Keksijä ilmoitti haluavansa vehnän jyviä jokaiselle pelilaudan ruudulle seuraavasti: yksi jyvä ensimmäiselle ruudulle, kaksi jyvää toiselle, neljä jyvää kolmannelle, kahdeksan jyvää neljännelle, jne.. Kertomuksen mukaan hallitsija piti näin vähäistä pyyntöä rikkauttaan halventavana ja loukkaantui, mutta oliko pyyntö vähäinen? Kuinka monta jyvää keksijä pyysi?

Jyvien määrän voi laskea näppäilemällä laskinta, mutta se ei ole tyylikäs ratkaisu. Seuraava tehtäväkokonaisuus johdattaa tulokseen, jonka avulla tällaiset ongelmat ratkeavat elegantisti. Esitietoina tarvitaan kerto- ja jakolaskun yhteyden ymmärtäminen sekä taito kertoa polynomi polynomilla.

10. Suorita kertolaskut

$$(1-x)(1+x), \quad (1-x)(1+x+x^2) \quad \text{ja} \quad (1-x)(1+x+x^2+x^3).$$

11. Päättele edellisen perusteella tai laske

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7).$$

12. Päättele edellisten perusteella tulo

$$(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1}).$$

13. Oletetaan, että $x \neq 1$. Miten summa

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1}$$

voidaan kirjoittaa lyhyemmin?

14. Laske summa

$$1+2+2^2+\ldots+2^{n-2}+2^{n-1}.$$

15. Yhdessä vehnäkilossa on arviolta 30000 jyvää ja vehnän pörssihinta on 300 € tonnilta. Kuinka paljon johdannossa määritelty vehnämäärä maksaisi pörssissä? Suomen valtion vuosibudjetti on noin 43 miljardia euroa. Kuinka monen vuosibudjetin arvoinen tämä vehnämäärä on?

16. Talletetaan erään vuoden alusta alkaen vuosittain 2500 € säästötilille, jonka vuosikorko oli 4,0 %. Kuinka paljon tilillä on rahaa, kun ensimmäisen erän tallettamisesta oli kulunut 15 vuotta ja viimeisin säästöerä on juuri talletettu? Korko lisätään pääomaan aina vuoden lopulla.

Ohje: Tehtävän rakenne tulee selvemmäksi, jos unohdetaan hetkeksi konkreettiset lukuarvot. Merkitään $a = 2500$ €, $q = 1{,}04$ ja $n = 15$. Lasketaan erikseen kunkin talletuserän suuruus ja lasketaan ne yhteen lopuksi. Viimeisenä talletettu erä ei ole ehtinut kasvaa korkoa ollenkaan, joten se on a. Toiseksi viimeisenä talletettu erä on kasvanut korkoa vuoden, eli sen suuruus on aq. Kolmanneksi viimeisenä talletettu erä on kasvanut korkoa 2 vuotta, joten sen suuruus on $q \cdot (aq) = aq^2$. Näin jatkamalla käydään läpi kaikki talletuserät. Mikä on ensimmäisenä talletetun erän suuruus? Muodosta nyt kaikkien talletuserien summa, sijoita siihen lukuarvot ja laske lopputulos laskimella.

17. Pankkilaina, jonka suuruus on 100000 €, maksetaan takaisin kuukausittaisissa tasaerissä, joka sisältää kuoletuksen ja kuukauden koron. Lainan vuosikorko on 4,00 %, ja kuukauden korko on siitä kahdestoistaosa. Takaisinmaksuaika on 10 vuotta lainan nostamishetkestä, ja ensimmäinen tasaerä maksetaan kuukauden kuluttua lainan nostamisesta. Laske tasaerän suuruus.

Ohje: Ota käyttöön sopivat kirjainmerkinnät kuten edellisessä tehtävässä. Voit ajatella seuraavasti: 1° Annetaan velan kasvaa korkoa korolle n kuukautta. Korko liitetään velan määrään kuukausittain. 2° Avaat säästötilin, jonka korko on sama kuin lainan korko. Talletat sinne kuukausittain tasaerän a. Korko lisätään pääomaan niin'ikään kuukausittain. Ensimmäisen säästöerän talletat kuukauden kuluttua lainan nostamisesta. Tasan n:n kuukauden kuluttua lainan nostamisesta talletat viimeisen erän, jolloin tilillä on oltava rahaa täsmälleen se määrä, jolla voit kuitata velan korkoineen. 3° Laadi yhtälö, ja ratkaise siitä kysytty tasaerä a. Operoimalla yksinomaan kirjainsymboleilla saat samalla hyödyllisen laskukaavan, jonka avulla hallitset tasaerälainat.

18. Laske summa

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \ldots + (\tfrac{1}{2})^{n-2} + (\tfrac{1}{2})^{n-1}.$$

19. Tutki laskinta käyttäen, mitä tapahtuu luvulle $(\frac{1}{2})^n$, kun n kasvaa hyvin suureksi. Päättele tuloksen ja edellisen tehtävän perusteella *päättymättömän sarjan summa*

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^4 + \ldots .$$

20. Tutki laskinta käyttäen, millä x:n arvoilla luvulle x^n käy n:n kasvaessa samoin kuin luvulle $(\frac{1}{2})^n$. Laske näille x:n arvoille määritelty päättymättömän sarjan summa

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots .$$

21. Jaksollisia desimaalilukuja voidaan käsitellä päättymättöminä sarjoina edellisten tehtävien tapaan. Kirjoita luku 0,222... päättymättömäksi sarjaksi ja muunna se sitten edellistä tehtävää soveltaen murtoluvuksi. Ohje: Mikä luku tässä vastaa edellisen tehtävän lukua x?

22. Muunna murtoluvuiksi desimaaliluvut

$$\begin{aligned} a &= 0{,}999\dots \\ b &= 1{,}353535\dots \\ c &= 2{,}1357357357\dots \end{aligned}$$

23. Kreikkalaisen Zenonin[3] kuuluisin paradoksi koskee Akilleuksen ja Kilpikonnan kilpajuoksua. Esitämme sen nykyaikaisia mittayksiköitä käyttäen. Akilleus juoksee 10 metriä ja Kilpikonna yhden metrin sekunnissa. Kilpikonna saa kymmenen metriä etumatkaa. Zenon väitti (pilke silmäkulmassaan), että Akilleus ei saa Kilpikonnaa kiinni, ja perusteli sen seuraavasti: Kun A. on juossut 10 metriä, on K. edennyt metrin, kun A. on juossut metrin, on K. edennyt 10 senttiä, kun A. on juossut 10 senttiä, on K. edennyt yhden sentin, jne.. Näin jatketaan loputtomiin, eikä Akilleus saa koskaan Kilpikonnaa kiinni! Osoita, että Akilleus kuitenkin tavoittaa Kilpikonnan **a)** laskemalla kiinni saamiseen kuluva aika tavallisena matka-aika-laskuna, **b)** seuraamalla Zenonin päättelyä ja laskemalla yhteen kaikki Akilleuksen kulkemat matkat Kilpikonnan tavoittamiseksi.

[3]Zenon Elealainen, n. 490 – 425, kreikkalainen matemaatikko.

Induktio

Edellisessä osiossa näimme melko vakuuttavasti, että jos $x \neq 1$, niin

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}. \tag{1}$$

Väitettä ei kuitenkaan voi sanoa matemaattiseksi totuudeksi ennen kuin se on perusteltu niin ehdottomasti, että epäilykselle ei jää pienintäkään sijaa. Kokeilu osoitti, että (1) on tosi, kun $n = 1$, 2, 3 ja 7, mutta meillä ei ole takeita, toimiiko (1) tapauksessa $n = 8$. Joku viitseliäs voi suorittaa kertolaskun ja todeta, että (1) on voimassa, mutta tällöin tapaus $n = 9$ ja siitä eteenpäin jäävät kuitenkin avoimiksi. Vaikka laskisimme kertolaskuja yksi kerrallaan kuinka pitkälle tahansa, niin aina on kuitenkin äärettömän monta n:n arvoa tarkistamatta. Miten todistetaan, että (1) on voimassa *kaikilla* n:n *positiivisilla kokonaislukuarvoilla*? Voimme menetellä seuraavasti:

Vaihe 1. Edellisen osion ykköstehtävän perusteella (1) todellakin on tosi n:n arvoilla 1, 2 ja 3.

Vaihe 2. Yhteenlaskettavien lukumäärä n esiintyy (1):n oikealla puolella ainoastaan x:n eksponenttina. Osoitetaan, että jos n:n termin summa voidaan laskea niin kuin (1) osoittaa, niin $(n+1)$:n termin summalle saadaan samanlainen lauseke, jossa yhteenlaskettavien lukumäärä $n + 1$ esiintyy samassa paikassa x:n eksponenttina. Siis, jos (1) on voimassa, niin

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

ja tällöin

$$\underbrace{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}}_{n\,\text{yhteenlaskettavaa}} + x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1} + x^n =$$

$$= \frac{x^n - 1}{x - 1} + \frac{x^n(x-1)}{x - 1} = \frac{x^n - 1 + x^{n+1} - x^n}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Vaihe 3. Edellinen tulos tarkoittaa sitä, että jos väite on tosi arvolla n, niin se on tosi myös arvolla $n+1$. Tämän perusteella voimme päätellä: Koska väite on tosi arvolla $n = 3$, niin se on tosi arvolla $n = 3 + 1 = 4$. Koska väite nyt tiedetään todeksi arvolla $n = 4$, niin se on tosi myös arvolla $n = 4 + 1 = 5$. Näin voidaan jatkaa äärettömän pitkälle, joten väite on tosi kaikilla n:n arvoilla.

Vaiheiden 1.-3. kautta kulkevaa todistusta kutsutaan *matemaattiseksi induktioksi* tai lyhyemmin *induktioksi*. Gaussin jalanjälkiä seuratessasi näit, miten n:n ensimmäisen positiivisten kokonaisluvun ja n:n ensimmäisen parittoman luvun summat lasketaan. Nyt voit induktiota harjoitellaksesi *todistaa* nämä väitteet.

24. Todista, että

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) \;=\; n^2$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

25. Todista, että

$$1+2+\ldots+(n-1)+n \;=\; \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

26. Todista, että

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2 \;=\; \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

27. Todista, että

$$1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+n^3 \;=\; (1+2+\ldots+n)^2$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

28. Todista, että

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n} \;=\; 1-\frac{1}{n}$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

29. Todista, että n-kulmion (sisä)kulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$.

30. Joukko-opissa sovitaan, että jokainen joukko on itsensä osajoukko, ja että tyhjä joukko $\emptyset$ on jokaisen joukon osajoukko. Esimerkiksi 2-alkioisen joukon $A = \{a\,, b\}$ kaikki osajoukot ovat $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ ja A.

a) Todista, että n-alkioisella joukolla on 2^n osajoukkoa.

b) Todista, että $n < 2^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lopuksi

Matematiikka tieteenä ja koulumatematiikka ovat suurelta osin eri asioita. Koulumatematiikan tehtävänä on totuttaa oppilas vähitellen oikean matematiikan edellyttämään eksaktiin ajatteluun. Samalla on kuitenkin varmistettava tiettyjen käytännöllisten laskutaitojen kehittyminen. Monet matematiikan käsitteet opitaan koulussa pelkästään intuitiivisen mielikuvan varassa ja usein näköhavaintoon perustuen. Esimerkiksi reaaliluvut määritellään päättymättöminä desimaalilukuina ja niitä havainnollistetaan lukusuoran pisteinä. Edellä nähty induktio ja siihen perustuvat todistustehtävät ovat kuitenkin aivan eksaktia tieteellistä matematiikkaa. Peano[1] määritteli 1800-luvulla aksiomaattisesti luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Tämä tarkoittaa sitä, että näitä lukuja koskevan teorian pohjaksi valittiin muutama selviönä pidetty lause, *aksiooma*, joihin tukeutuen kaikki luonnollisia lukuja koskevat väittämät pyritään todistamaan joko tosiksi tai epätosiksi. Aksioomissa, joita itseään ei todisteta, tiivistyy ihmiskunnan tuhansien vuosien kokemus näistä luvuista ja niillä laskemisesta. Peanon asettamia aksioomia ovat mm.

1° Jokaisella luonnollisella luvulla a on seuraaja a', joka on luonnollinen luku.

2° On olemassa luonnollinen luku 0, joka ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja.

Aksioomien pohjalta määritellään jokapäiväisessä käytännön elämässä välttämättömät käsitteet, kuten laskutoimitukset, kymmenjärjestelmä, numeromerkit yms.. Näiden määrittelyjen jälkeen luvun a seuraajaa merkitään tietenkin $a + 1$. Peanon aksioomiin kuuluu myös *induktioaksiooma*:

3° Jos luonnollisista luvuista koostuva joukko A sisältää luvun 0 ja kaikkien alkioidensa seuraajat, niin $A = \mathbb{N}$.

Juuri tätä me käytämme induktiotodistuksessa. Kun todistamme, että väite

$$0 + 1 + 2 + \ \ldots + (n-1) + n \ = \ \tfrac{1}{2}n(n+1) \qquad (1)$$

on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}$, todistamme nimenomaan sen, että joukko

$$A \ = \ \{\text{luonnolliset luvut } n, \text{ joille (1) on tosi}\}$$

sisältää nollan ja kaikkien alkioidensa seuraajat. Induktiotodistuksia on tehty ainakin 1600-luvulta alkaen. Peano siis kiteytti jo vallinneen käytännön aksioomaksi.

[1] Giuseppe Peano (1858 – 1932), italialainen matemaatikko.

Geometrisia summia tutkiessamme näimme laskimen avulla, että luku $(\frac{1}{2})^n$ lähestyy nollaa, kun n kasvaa. Tämä tulos voidaan *todistaa* vasta lukion pitkän matematiikan syventävällä kurssilla tai yliopistossa. Todistusta varten on aluksi määriteltävä, mitä luvun kasvamisella ja nollaa lähestymisellä tarkoitetaan. Ennen kaikkea, on määriteltävä tarkasti, mitä reaaliluvut ovat. Intuitiivinen, päättymättömiin desimaalilukuihin perustuva käsitys niistä riittää arkipäivän sovelluksissa ja soveltavissa tieteissäkin, mutta matematiikassa tarvitaan täsmällisempi määritelmä. Nykyaikainen käsitys reaaliluvuista muotoutui vasta 1800-luvun puolenvälin jälkeen, vaikka matematiikkaa oli harrastettu jo tuhansia vuosia. Tämä, Peanon työ luonnollisten lukujen määrittelemiseksi, ja monet muut asiat matematiikan historiassa osoittavat, että matematiikka on ehtymätön luovan ajattelun lähde. Monille jo kauan itsestään selvinä pidetyille käsitteille löytyy monesti jokin uusi ja yllättävä näkökulma. Vanha tunnettu asia osoittautuu usein erikoistapaukseksi jostakin yleisemmästä totuudesta.

Jos olet selvinnyt suurimmasta osasta edellä olevia tehtäviä ja ymmärtänyt niiden johdannoissa esitetyt ajatukset, omaat jo lukion oppimäärää syvemmän käsityksen näistä asioista. Esimerkiksi induktio ei kuulu nykylukion oppimäärään. Matematiikan harrastajat opettelevat sen itsekseen kuka mistäkin lähteestä. Yliopisto-opinnoissa se viimeistään tulee tutuksi. Matematiikka ei ole yksinomaan laskemista, vaan ennen kaikkea ajattelemista. Käytännön laskutaito on matemaatikolle sama kuin instrumentin hallinta muusikolle. Et kykene esittämään sävelteosta, jos et hallitse instrumenttiasi. Et voi muotoilla matemaattisia ajatuksiasi muidenkin ymmärrettäväksi, jos et hallitse matematiikan kirjoitustapaa. Ajatukset on osattava muuntaa lausekkeiksi, yhtälöiksi ja epäyhtälöiksi. Näiden asioiden oppiminen vaatii aikaa, keskittymistä ja toisinaan kovaakin puurtamista. Matematiikalla ja musiikilla on kuitenkin se ero, että matematiikassa kerran kunnolla opittu asiakokonaisuus jää pysyväksi henkiseksi pääomaksi. Se ei katoa muistista. Jos sen sijaan viulisti jättää jokapäiväisen asteikkoharjoittelun kerran väliin, niin hän kuulee itse soittonsa epäpuhtaudet. Jos hän on harjoittelematta kaksi päivää, niin muutkin kuulevat.

Tämän tehtäväkokonaisuuden suoritettuasi olet hyvällä alulla matematiikan taidoissa ja voit käyttää niitä huviksi ja hyödyksi. Matematiikka on erinomainen harrastus. Selkeää ajattelua ja matematiikan perustietoja ja -taitoja tarvitaan niin työ- kuin muussakin elämässä. Lukion pitkän matematiikan oppimäärän suorittaminen edellyttää keskittynyttä työntekoa. Sen kunnollinen suorittaminen takaa *todellisen* kelpoisuuden matematiikan tai sitä sivuavan alan opiskeluun yliopistossa tai teknillisessä korkeakoulussa.

Vastauksia

1. $n(n+1)$.

2. Ks. tehtävä 24.

3. $t_4 = 10$, $t_5 = 15$, $t_6 = 21$ ja $t_n = t_{n-1} + n$.

4. $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

5. $t_{n-1} = \frac{1}{2}n(n-1)$ ja $t_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

6. $s = \frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)$. Kaava on voimassa myös, jos $m = n$.

7. Keskiarvo on $\frac{1}{2}$.

9. $a_n = \frac{1}{2}n\left(n^2+1\right)$.

10. $1 - x^2$, $1 - x^3$ ja $1 - x^4$.

11. $1 - x^8$.

12. $1 - x^n$.

13. $\frac{1-x^n}{1-x}$.

14. $2^n - 1$.

15. Noin 4300 Suomen valtion vuosibudjettia.

16. 54561,33 €.

17. Kuukausierä on 1012,45 € .

18. $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

19. 2.

20. Jos $-1 < x < 1$, niin summa on $(1-x)^{-1}$.

21. $\frac{2}{9}$.

22. $a = 1$, $b = \frac{134}{99}$ ja $c = \frac{3556}{1665}$.

23. Akilleus tavoittaa Kilpikonnan $\frac{10}{9}$ sekunnissa.