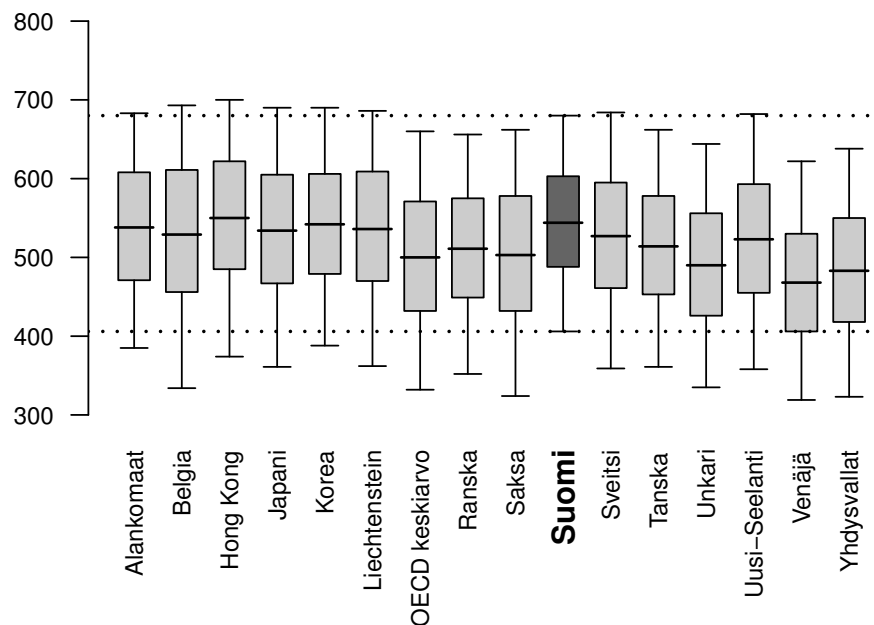


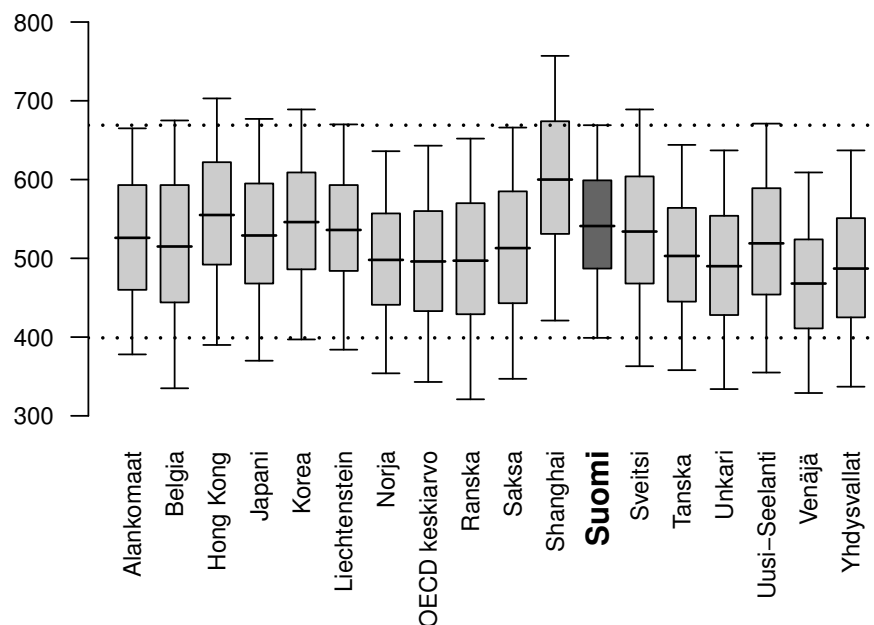
1. KESKIVARVO JA MEDIAANI

- 1) Suomessa on yleinen käsitys, että PISA-vertailun perusteella oppilaamme ovat matematiikassa maailman huippua. Seuraavat taulukot on tehty PISA-vertailujen pisteistä. Vaakaviivat osoittavat kullekin maalle (alhaalta ylöspäin) 5 %:n ja 25 %:n prosenttipisteet, keskiarvon sekä 75 %:n ja 95 %:n prosenttipisteet. Esimerkiksi 25 %:n prosenttipisteen alapuolelle jää tämä osuus jakaumasta.

PISA 2003, matematiikka



PISA 2009, matematiikka



Luettele ne maat, joiden 5 %:n prosenttipisteet olivat huonommat kuin Suomella

vuonna 2003: _____

vuonna 2009: _____

Luettele ne maat, joiden 95 %:n prosenttipisteet olivat paremmat kuin Suomella

vuonna 2003: _____

vuonna 2009: _____

Miten Suomen sijoitukseen vaikuttavat heikoimmat oppilaat?

Poikkeaako Suomen jakauma muista jakaumista jollakin tavalla?

Tukevatko taulukot mielestäsi käsitystä suomalaisten huippuosaamisesta? Perustelee.

- 2) Ryhmässä on 10 henkilöä. Heillä on kaikilla sama palkka. Ryhmään tulee lisäksi henkilö, jonka palkka on 23-kertainen verrattuna muiden palkkoihin. Miten palkkojen keskiarvo muuttuu?

Vihje: Merkitse alempaa palkkaa kirjaimella T.

Alkuperäinen keskiarvo _____

Uusi keskiarvo _____

Miten palkkojen mediaani muuttuu?

Alkuperäinen mediaani _____

Uusi mediaani _____

3) Kahdeksan luvun keskiarvo on 16. Mikä on keskiarvo, jos

a) kaikkia lukuja kasvatetaan yhdellä?

b) kaikki luvut kaksinkertaistetaan?

c) ensimmäisestä luvusta vähennetään 1, toisesta 2, kolmannesta 3 ja niin edelleen?

2. LUVUT JA LASKUTOIMITUKSET

- 1) Kirjoita seuraavat luvut muodossa $\frac{a}{b}$ tai $-\frac{a}{b}$, missä a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja.

$$\frac{1,73}{3,46} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{0,033}{-0,0027} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{-132,3}{-0,03} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{0,0002}{0,0009} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-2,3 = \underline{\hspace{2cm}} \qquad 0,00047 = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 2) Täydennä

$$-\frac{5}{7} = \frac{0,23}{\hspace{1cm}} \qquad \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 10^3}{\hspace{1cm}}$$

- 3) Etsi osoittajan ja nimittäjän yhteiset tekijät ja supista murtoluvut.

$$\frac{840}{728} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{1323}{693} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{729}{1701} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{776}{1008} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 4) Merkitse ruutuun T, jos väite on tosi, ja E, jos väite on epätosi. Jos väite on epätosi, korjaa se todeksi tai selvitä, kumpi luvuista on suurempi.

$$3^3 + 3^3 + 3^3 = 3^9 \qquad \square \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x + x = 2x \qquad \square \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x \cdot x = 2x \qquad \square \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x^2 : x = x \quad (x \neq 0) \qquad \square \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x : x^2 = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad \square \quad \underline{\hspace{10em}}$$

$$0 : 12 = 0 \quad \square \quad \underline{\hspace{10em}}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \quad \square \quad \underline{\hspace{10em}}$$

$$5^2 + 5^2 + 5^2 = 3 \cdot 5^2 \quad \square \quad \underline{\hspace{10em}}$$

$$3^2 - 2^2 = (3 - 2)^2 \quad \square \quad \underline{\hspace{10em}}$$

$$(2^3)^2 + 2 = 2^7 \quad \square \quad \underline{\hspace{10em}}$$

5) Ratkaise yhtälö ja tarkista tulos.

$$(0,4y - 3,2) : 0,1 = 2 \quad y = \underline{\hspace{10em}}$$

$$(3x - 2,8) \cdot 0,01 = 0,2x \quad x = \underline{\hspace{10em}}$$

6) Valitse oikea vastaus:

$$6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 = 6^7; \quad 6^{36}; \quad 36^{36}; \quad 36^6; \quad 6^2 \cdot 6^5;$$

joku muu: _____

7) Anna päässä laskulla yläraja tulolle

$$762 \cdot 97 \leq \underline{\hspace{10em}} \quad \text{perustelu: } \underline{\hspace{10em}}$$

$$64,8 \cdot 48 \leq \underline{\hspace{10em}} \quad \text{perustelu: } \underline{\hspace{10em}}$$

$$0,248 \cdot 37,6 \leq \underline{\hspace{10em}} \quad \text{perustelu: } \underline{\hspace{10em}}$$

8) Päättele alaraja osamäärälle

$$0,058375 : 0,83045 \geq \underline{\hspace{10em}} \quad \text{perustelu: } \underline{\hspace{10em}}$$

$$580158 : 987 \geq \underline{\hspace{10em}} \quad \text{perustelu: } \underline{\hspace{10em}}$$

9) Laske:

$$\frac{(-2)^4}{3^5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(2^4 : \frac{2^2}{3^3}\right) : \frac{3^5}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

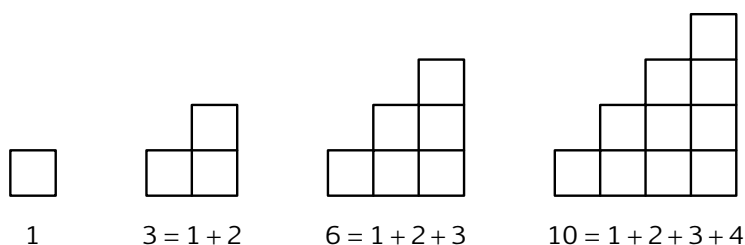
$$\frac{6 + 5 \cdot 5}{16 : (3 - 1)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\frac{-a}{5}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{a^2}{3} - \left(\frac{-a}{3}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Palautetaan mieliin Matematiikkadiplomi VII:n alussa mainitut kolmioluvut ja niiden kaksinkertaistukset.



10) Pitääkö kaava

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

paikkansa millä tahansa luonnollisella luvulla n ? Kokeile ensin pienillä luvuilla. Perustele ja havainnollista.

★ 11) Miten voit päätellä, onko jokin luku kolmioluku?

12) Mitkä seuraavista luvuista ovat kolmiolukuja?

4851 _____ 6214 _____

3655 _____ 7626 _____

8656 _____

★ 13) Millaiset luvut ovat peräkkäisten luonnollisten lukujen summia?
Kokeile ensin pienillä luvuilla. Yritä myös antaa yleinen lauseke.

14) Tutki näitä tuloja, täydennä ja kerro sanoin niiden sääntö.

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$11 \cdot 11 = 121$$

$$111 \cdot 111 = 12321$$

$$1111 \cdot 1111 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$11111 \cdot 11111 = \underline{\hspace{2cm}}$$

⋮

$$\underline{\hspace{2cm}} = 1234567654321$$

★ 15) Yritä perustella, miksi on näin.

- ★ 16) Kolmen tornin korkeudet ovat 52,5 m, 50 m ja 65 m. Tornit on tehty samanlaisista kivistä. Kuinka korkeita kivet voivat korkeintaan olla?

- 17) Perustelee tässä tehtävässä tuloksesi käyttämättä laskinta.

- a) Kirjoita luvut suurimmasta pienimpään:

$$|-5|; \sqrt{2}; -\sqrt{3}; -1,5; 1,5; \frac{4}{3}; 1\frac{7}{8}.$$

- b) Kirjoita luvut pienimmästä suurimpaan:

$$1; 2; \sqrt{2}; 1,5; 1\frac{1}{3}; \sqrt{3}.$$

- 18) Onko yhtäsuuruus tosi?

a) $5\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(1\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 4$ _____

b) $4 + 1248 : \left(11\frac{4}{5} + 0,2\right) = 108$ _____

- 19) Kirjoita seuraavat luvut muodossa $a \cdot 10^3$ ja $b \cdot 10^5$:

$$3750 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$27500 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-8700 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-27500000 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-27 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-300 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Mitä tarkoittaa se, että kaaviossa kuudella jaollisten paikka sisältyy kolmella jaollisten paikkaan?

6) Muodosta parittoman luvun lauseke.

7) Kirjoita luvulla 7 jaollisen luvun lauseke.

Muodosta lausekkeen avulla kaksi kolminumeroista lukua, jotka ovat jaollisia luvulla 7.

8) Neljän peräkkäisen luvun pienin ja suurin kerrotaan keskenään, samoin keskimmäiset. Kokeile eri luvuilla. Mitä huomaat näiden tulosten erotuksesta?

★ 9) Todista tehtävän 8 tulos.

★ 10) Yleistä tehtävän 8 tulos koskemaan $n:n$ peräkkäisen luvun tilannetta.

11) Kaksinumeroisessa luvussa vaihdetaan numeroiden järjestys ja pienempi luku vähennetään suurimmasta (esim. $42 - 24$). Osoita, että näin saatu erotus ei ole alkuluku (ks. diplomin VI s. 4).

12) a) Onko lauseke $n^2 - n + 41$ alkuluku, jos $n = 1$? _____

Entä jos $n = 2$? _____ Entä jos $n = 3$? _____

b) Onko lausekkeen $n^2 - n + 41$ arvo aina alkuluku? Perustele.

★ 13) Kahdella kaksinumeroisella positiivisella kokonaisluvulla on sama numeroiden summa. Onko lukujen erotus yhdeksällä jaollinen?

14) Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joille

$$\frac{136}{3n+5}$$

on positiivinen kokonaisluku. *Vihje: Jaa 136 tekijöihin.*

15) Kylpyhuoneen kaksi seinää halutaan laatoittaa 1 m 20 cm korkeudelta. Toisen seinän leveys on 2 m 70 cm ja toisen 2 m 85 cm. Laatan mitat ovat 15 cm \times 15 cm. Voiko seinät laatoittaa niin, ettei laattoja tarvitse paloittaa?

Kuinka monta laattaa tarvitaan suurempaan seinään?

Entä pienempään?

16) Näytä, että $n(n-1)(n+1)$ on aina jaollinen luvuilla 2 ja 3, olipa n mikä tahansa luonnollinen luku.

- ★ 17) Näytä, että $n^5 - n$ on aina jaollinen luvuilla 2, 3 ja 5, olipa n mikä tahansa luonnollinen luku.

4. TODENNÄKÖISYYS

- 1) Laske todennäköisyys, että kahta noppaa heitettäessä saadaan

silmälukujen summaksi 6: _____

molemmiksi silmäluvuiksi parillinen luku: _____

ainakin toiseksi silmäluvuksi alkuluku: _____

silmälukujen summaksi kolmella jaollinen luku: _____

- 2) Joukkueita on neljä. Merkitään niitä A , B , C ja D . Kuinka monta ottelua on pelattava, jos jokainen joukkue pelaa kerran jokaista toista joukkuetta vastaan?

Havainnollista tilannetta piirroksella niin monella tavalla kuin osaat.

Jos joukkueet ovat tasaväkisiä, niin millä todennäköisyydellä joukkue A voittaa kaikki ottelunsa?

- 3) Jos satavuotiaan ihmisen todennäköisyys elää 101-vuotiaaksi on 0,005, niin kuinka monta henkilöä 500 000 satavuotiaan joukosta todennäköisesti elää 101-vuotiaaksi?

5. MERKINTÖJEN KÄYTTÖ, YHTÄLÖT

1) Laske lausekkeen arvo

a) jos $x = 3$:

$$9x(x - 8) + 13 = \underline{\hspace{10cm}}$$

b) jos $p = -1,4$:

$$(p + 0,6)(p - 0,6) = \underline{\hspace{10cm}}$$

c) jos $k = 2$:

$$k + \frac{2}{3}\left(k - \frac{1}{5}\right) = \underline{\hspace{10cm}}$$

d) jos $m = -\frac{1}{2}$:

$$5,5 - (4m + 1) = \underline{\hspace{10cm}}$$

2) Täydennä taulukko laskemalla lausekkeiden $3x - 1$ ja $x(-3x + 1)$ arvot annetuilla muuttujan x arvoilla.

x	-2	-1	0	1	2	4	5
$3x - 1$							
$x(-3x + 1)$							

3) Laske lausekkeen $5m - 3n$ arvo,

a) jos $m = -\frac{2}{5}$ ja $n = \frac{2}{3}$:

$$5m - 3n = \underline{\hspace{10cm}}$$

b) jos $m = 0,2$ ja $n = -1,4$:

$$5m - 3n = \underline{\hspace{10cm}}$$

- 4) Tietyillä muuttujien x ja y arvoilla lausekkeen $x - y$ arvo on 0,7. Päätele, mitä muuttujien x ja y arvot voivat olla. Anna ratkaisuja:

Laske näillä muuttujien x ja y arvoilla seuraavien lausekkeiden arvot:

$$y - x = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{1}{x - y} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 10y - 10x = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 5) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 75\,000x - 125\,000y = 25\,000 \\ 40\,000x + 80\,000y = 160\,000. \end{cases}$$

$$x = \underline{\hspace{2cm}} \quad y = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 6) Kirjoita lausekkeiksi

a) lukujen b ja c summa: _____

b) lukujen a ja m erotus: _____

c) luku x korotettuna toiseen potenssiin: _____

d) luku y korotettuna potenssiin 3: _____

e) luvun x ja lukujen a ja b tulon summa: _____

f) luvun m ja lukujen x ja y osamäärän erotus: _____

g) lukujen a ja b summan ja luvun c tulo: _____

h) luvun a ja lukujen x ja y summan tulo: _____

7) Lue lauseke käyttäen sanoja "summa", "erotus", "tulo" ja "osamäärä".

a) mx

b) $n - a$

c) $10 + ab$

d) $(a + 5)x$

e) $m - 8a$

f) $2x + 1$

g) $\frac{a}{b} + c$

h) $ab + bc$

i) $(a - b)(a + b)$

8) Annikalla on 5 laatikollista omenoita ja sen lisäksi 3 omenaa. Sofialla on 4 laatikollista omenoita ja 16 omenaa. Merkitse laatikollista kirjaimella L ja vastaa seuraaviin kysymyksiin:

a) Kuinka paljon Annikalla on omenoita? _____

b) Kuinka paljon Sofialla on omenoita? _____

c) Kuinka paljon omenoita on Jyrillä, jos hänellä on niitä kolme kertaa niin paljon kuin Annikalla? _____

d) Kuinka paljon omenoita jää Annikalle, jos hän antaa pois 3 laatikollista ja 20 omenaa? _____

e) Kuinka paljon omenoita on kullakin, jos laatikossa on 28 omenaa? _____

f) Kuinka monta omenaa pitäisi laatikossa olla, jotta Sofialla olisi omenoita enemmän kuin Annikalla? _____

9) Rakennustyömaalla työskentelee 5 työporukkaa, joissa kussakin on a henkilöä, ja 3 työporukkaa, joissa kussakin on b henkilöä. Kuinka monta henkilöä on rakennustyömaalla töissä?

Laske työntekijöiden yhteismäärä siinä tapauksessa, että $a = 25$ ja $b = 32$.

10) Millä muuttujan arvoilla lausekkeen arvo voidaan laskea?

a) $5y + 2$	_____	b) $\frac{18}{y}$	_____
c) $\frac{1}{x-7}$	_____	d) $\frac{m-1}{4}$	_____
e) $\frac{7a}{3+a}$	_____	f) $\frac{2b}{10-b}$	_____

11) Amandalla, Rebekalla ja Timolla on yhteensä 477 €. He jakavat rahan niin, että Amanda saa 16 euroa enemmän kuin Rebekka ja Rebekka 17 euroa vähemmän kuin Timo. Kuinka paljon rahaa Timo saa?

Valitse merkinnät, kirjoita yhtälö, ratkaise se ja lopuksi tarkista, sopiiko ratkaisusi edellä annettuihin ehtoihin.

Merkinnät: _____

Yhtälö: _____

Ratkaisu: _____

Tarkistus: _____

12) Kirjoita sanallinen esimerkki, jonka ratkaisu sopii yhtälöön

$$2(T + 3) - 4 = 10$$

ja ratkaise yhtälö.

13) Sievennä:

a) $x - \frac{x-1}{\frac{x}{x+1}} =$	_____	b) $1 - \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x+1} =$	_____
--------------------------------------	-------	--	-------

14) Sievennä lauseke kertolaskun vaihdanta- ja liitännälakia käyttäen.

a) $-6,2a \cdot 5 =$ _____ b) $4c \cdot (-1,25) =$ _____

c) $0,3x \cdot (-12y) =$ _____ d) $-0,1b \cdot (-2,3c) =$ _____

e) $1,6 \cdot (-0,2n) =$ _____ f) $-6,4a \cdot (-5c) =$ _____

15) Järven pinta-ala on 620 km^2 . Arvotaan, että $2\,300 \text{ km}^2$:n kokois-
sen alueen sadevedet johtuvat tähän järveen puroja ja jokia pit-
kin. Kuinka paljon järven pinta nousee, jos alueella sataa 15 mm ?
Arvioidaan, että 70% sadevedestä johtuu järveen eikä oteta huo-
mioon tänä aikana järvestä pois virrannutta vettä.

16) Ovatko lausekkeet identtisiä? Perustele.

a) $2c \cdot 3$ ja $6c$ _____

b) $7 + (a + b)$ ja $(7 + a) + b$ _____

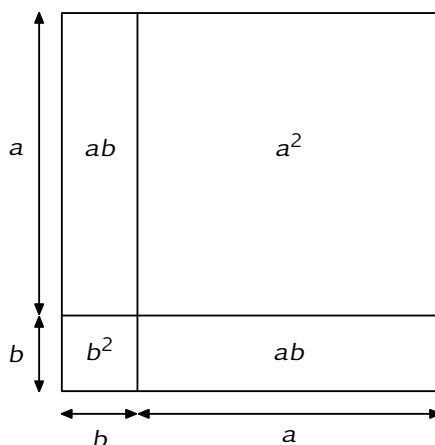
c) $-2a + 2a$ ja 0 _____

d) $(x - x)a$ ja 0 _____

e) $x - y$ ja $y - x$ _____

f) $(x - y)^2$ ja $(y - x)^2$ _____

17) Kaavaa $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ voidaan havainnollistaa piirroksella:

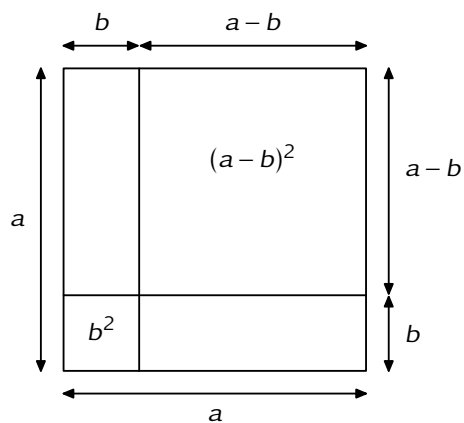


Totea kaava oikeaksi ositellen kertomalla:

$$(a + b)(a + b) = \underline{\hspace{10cm}}$$

ja myös allekkain kertomalla:

18) Kaavaa $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ voidaan havainnollistaa piirroksella:



Totea kaava oikeaksi ositellen kertomalla:

$$\underline{\hspace{10cm}} = \underline{\hspace{10cm}}$$

ja myös allekkain kertomalla:

19) Havainnollista kaavaa $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ piirroksella:

Totea tämä kaava oikeaksi ositellen kertomalla:

$$(a - b)(a + b) = \underline{\hspace{10cm}}$$

ja myös allekkain kertomalla:

20) Muunna lauseke identtiseksi osittelulakia käyttäen.

a) $(x + y)(x + y) = \underline{\hspace{10cm}}$

b) $(s + t)(s - t) = \underline{\hspace{10cm}}$

c) $(k - l)(k + l) = \underline{\hspace{10cm}}$

d) $7(x - y) = \underline{\hspace{10cm}}$

e) $(a - 4b) \cdot 3 = \underline{\hspace{10cm}}$

f) $-23 \cdot (2a - 3b + 1) = \underline{\hspace{10cm}}$

g) $1,5 \cdot (-3x + 4y - 5z) = \underline{\hspace{10cm}}$

21) Ympyröi seuraavista lausekkeista ne, jotka ovat identtiset lausekkeen $2b - 2a$ kanssa:

$$2(b - a), \quad -2(a - b), \quad -2a - 2b, \quad -2a + 2b.$$

22) Yhdistä samanmuotoiset termit.

a) $5a + 27a - a =$ _____

b) $12b - 17b - b =$ _____

c) $2(6x - 14) - 13x + 26 =$ _____

d) $-8 - y + 17 - 10y =$ _____

23) Yhdistä samanmuotoiset termit.

a) $8x - 6y^2 + 7x - 2y^2 =$ _____

b) $27p + 14q - 16p - 3q =$ _____

c) $3,5b - 2,4c - 0,6c^2 - 0,7b =$ _____

d) $1,6a^3 + 4x - 2,8a^3 - 7,5x + a =$ _____

24) Perustele, että kaikilla muuttujan a arvoilla lausekkeen $3(a + 2) - 3a$ arvo on 6.

25) Muodosta polynomiyhtälö, jonka yksi ratkaisu on $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$:

26) Onko yhtäsuuruus identtisyys?

a) $6(x - y) = 6x - 6y$ _____ b) $25(a - a) = 0$ _____

c) $3a - 4 = (2a - 4) + a$ _____ d) $a \cdot 5b = 5ab$ _____

27) a) Millä luvuilla a on voimassa yhtälö $a^2 = 2a$?

b) Perustele, että yhtäsuuruus $a^2 = 2a$ ei ole identtisyys.

28) Sievennä:

$$\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$4(x+2)^2 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$(2x-3)(2x+3) = \underline{\hspace{10em}}$$

29) Jaa tekijöihin: $9 - x^2 = \underline{\hspace{10em}}$

30) Laske $x^2y^{-3}z^{-1}$, jos

a) $x = 3$, $y = 2$ ja $z = \frac{2}{3}$:

$$x^2y^{-3}z^{-1} = \underline{\hspace{10em}}$$

b) $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$ ja $z = -\frac{1}{2}$:

$$x^2y^{-3}z^{-1} = \underline{\hspace{10em}}$$

31) Sievennä:

$$\left((m^3)^0\right)^{-4} = \underline{\hspace{10em}} \qquad m^2 : m^{-5} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$m^{-3}m^2 = \underline{\hspace{10em}} \qquad (-1)^0 = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\left((m^{-3})^2\right)^{-1} = \underline{\hspace{10em}} \qquad 1^{-1} = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\left((-1)^{-1}\right)^{-1} = \underline{\hspace{10em}} \qquad (-1)^{-1} = \underline{\hspace{10em}}$$

32) Laske:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

33) Sievennä:

$$\frac{a^2 - 2a}{2a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{a^2}{a^2 + ab} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{a^2 - 2a}{a - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2a^3 - 8a}{a + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

34) Ratkaise epäyhtälöt:

a) $5p - 45 < 5$

b) $-8(3 - x) \geq 10$

c) $11(2 - 3a) + 6a < 22 - 7a$

d) $8(2x + 5) + 7 > 40 + 20x$

e) $x(y - 2) - 3 > y(x - 3) - 2x$

35) Onko luku -2 yhtälön ratkaisu?

a) $3(x + 3) = 2x + 7$ _____

b) $(3 - x)(3 + x) = 1$ _____

c) $a - 2(a + 4) = -6$ _____

d) $-4y + 8 = 16 - (y + 2)$ _____

36) Onko joku seuraavista luvuista yhtälön $x^2 - 5x = 6$ ratkaisu?

- a) 1 _____ b) -1 _____ c) 6 _____ d) -6 _____

37) Osoita, että sekä luku 1,2 että luku -1,2 ovat yhtälön $x^2 = 1,44$ ratkaisuja.

38) Perustelee, että jokainen luku on yhtälön ratkaisu.

a) $7x + 1,5 = x + 1,5 + 6x$

b) $1,2(y + 5) = 6 + 1,2y$

39) Onko yhtälöllä ratkaisuja?

a) $2x + 3 = 2x + 8$ _____

b) $2y = y$ _____

40) Onko yhtälöllä ratkaisuja? Jos on, niin kuinka monta?

a) $|x| = 1$ _____ b) $|x| = 0$ _____

c) $|x| = -5$ _____ d) $|x| = 1,3$ _____

41) Ovatko yhtälöt yhtäpitäviä? (Eli onko niillä samat ratkaisut?)

a) $7(x - 3) = 49$ ja $x - 3 = 7$ _____

b) $\frac{2x}{3} = 9$ ja $2x = 27$ _____

c) $2x - 7 = 0$ ja $2x = 7$ _____

d) $x^2 = 5x - 6$ ja $x^2 - 5x + 6 = 0$ _____

42) Ministeriön kolmella osastolla on työssä 1274 henkilöä. Toisella osastolla on 70 henkilöä enemmän kuin ensimmäisellä ja kolmannella on 84 henkilöä enemmän kuin toisella. Kuinka monta henkilöä on työssä kullakin osastolla?

43) Puseron, pipon ja kaulaliinan neulomiseen on käytetty 555 g villalankaa. Pipon neulomiseen on käytetty 320 g vähemmän lankaa kuin puseron neulomiseen ja 5 g enemmän kuin kaulaliinan neulomiseen. Kuinka paljon lankaa on käytetty kunkin vaatteen neulomiseen?

44) Onko mahdollista järjestää 158 kirjaa kolmelle hyllylle niin, että ensimmäisellä hyllyllä olisi 8 kirjaa vähemmän kuin toisella hyllyllä ja toisella hyllyllä olisi 5 kirjaa enemmän kuin kolmannella hyllyllä? *Perustele vastauksesi.*

45) Onko mahdollista jakaa 59 säilykepurkkia kolmeen laatikkoon niin, että kolmannessa laatikossa olisi 9 purkkia enemmän kuin ensimmäisessä ja toisessa 4 purkkia vähemmän kuin kolmannessa?

46) Meillä on kolme vesimelonia. Yksi niistä on 2 kg kevyempi kuin toinen ja painaa yhden viidesosan kolmannen painosta. Ensimmäinen ja kolmas vesimeloni painavat yhdessä 3 kertaa niin paljon kuin toinen. Laske kunkin vesimelonin paino.

- 47) Laatikossa oli viinirypäleitä kaksi kertaa niin paljon kuin korissa. Sen jälkeen, kun koriin lisättiin 2 kg viinirypäleitä, korissa oli viinirypäleitä 0,5 kg enemmän kuin laatikossa. Kuinka paljon viinirypäleitä oli korissa alunperin?

- 48) Eräällä puutarhapalstalla oli karviaispensaita viisi kertaa niin paljon kuin naapurilla. Sen jälkeen, kun 22 pensasta oli siirretty tältä palstalta naapurille, kummallakin oli yhtä monta pensasta. Kuinka monta karviaispensasta oli puutarhapalstalla alunperin? Kuinka monta pensasta naapurilla oli alunperin?

- 49) Millä muuttujan arvolla

a) lausekkeen $6a - 3$ arvo on -39 ?

b) lausekkeiden $2m - 13$ ja $m + 3$ arvot ovat yhtäsuuria?

c) lausekkeen $3 - 5c$ arvo on 1 pienempi kuin lausekkeen $1 - c$ arvo?

d) lausekkeen $2x + 1$ arvo on 20 suurempi kuin lausekkeen $8x + 5$ arvo?

e) lausekkeen $9 - y$ arvo on kaksi kertaa niin suuri kuin muuttujan y arvo?

50) Kahdessa säkissä oli 50 kg sokeria kummassakin. Molemmista säkeistä otettiin sokeria pois. Sen jälkeen, kun ensimmäisestä säkistä oli otettu pois 3 kertaa niin paljon toisesta, jäi ensimmäiseen säkkiin puolet toisen säkin sokerimäärästä. Kuinka paljon sokeria jäi ensimmäiseen säkkiin? Entä toiseen säkkiin?

51) Käsineet ovat 6 euroa halvemmat kuin salkku ja 2 euroa kalliimmat kuin baskeri. Kuinka paljon käsineet maksavat, jos kaksi salkkua maksaa yhtä paljon kuin seitsemän baskeria?

52) Taululle on kirjoitettu eräs luku. Yksi oppilas lisäsi tähän lukuun 23. Toinen oppilas vähensi luvusta luvun 1. Ensimmäisen oppilaan tulos on 7 kertaa niin suuri kuin toisen oppilaan tulos. Mikä luku on kirjoitettu taululle?

53) Etsi kaksi $n:n$ lauseketta, joista toinen on suurempi, jos $n < 4$, ja ensimmäinen on suurempi, jos $n > 4$.

54) Etsi kolme $n:n$ lauseketta, joista ensimmäinen on suurin, jos $n < 3$, toinen on suurin, jos $n > 3$, ja kolmas ei ole koskaan suurin.

55) Etsi kolme $n:n$ lauseketta, joista yksi on aina suurin, riippumatta siitä, mikä luku n on.

6. MATKA, AIKA, NOPEUS

- 1) Muodosta lauseke seuraavasta tehtävästä: "Kahdesta paikasta, joiden välimatka on 40 km, lähti yhtä aikaa toisiaan vastaan kaksi jalankulkijaa. Mikä on heidän välimatkinsa 3 tunnin kuluttua, jos toisen jalankulkijan nopeus on 4 km/h ja toisen 5 km/h?"

- 2) Henkilö matkustaa Joensuusta Helsinkiin IC-junalla, jonka keskinopeus on 100 kilometriä tunnissa, ja palaa takaisin Joensuuhun Pendolinolla, jonka keskinopeus on 120 kilometriä tunnissa. Määritä hänen keskinopeutensa edestakaisella matkalla.

- 3) Henkilö matkustaa Joensuusta Helsinkiin IC-junalla, jonka keskinopeus on u kilometriä tunnissa, ja palaa takaisin Joensuuhun Pendolinolla, jonka keskinopeus on v kilometriä tunnissa. Määritä hänen keskinopeutensa edestakaisella matkalla.

- 4) Laiva kulkee 56 km pituisen matkan jokea pitkin myötävirtaan 3,5 tunnissa ja takaisin vastavirtaan 4 tunnissa. Mikä on laivan nopeus virrattomassa vedessä? Mikä on virran nopeus?

- 5) Kaksi autoa kulkee maantiellä samalla nopeudella. Jos ensimmäinen auto lisää nopeutta 10 km/h ja toinen auto vähentää nopeutta 10 km/h, niin ensimmäinen kulkee kahdessa tunnissa saman matkan kuin toinen kolmessa tunnissa. Mitkä ovat autojen nopeudet?

- 6) Pumppu A täyttää säiliön 7 tunnissa ja pumppu B tekee sen 42 tunnissa. Kauanko säiliön täytyminen kestää molempia pumppuja käyttäen?

Ohje: Käsittele tehtävä matka-aika -laskuna. Mikä on kysymyksen "matka", ja millä "nopeudella" se kuljetaan?

- 7) Kuinka pitkän ajan tarvitsevat kolme työntekijää A, B ja C tehdäksään yhdessä erään työn, johon A yksin tarvitsisi 10 päivää, B tarvitsisi 12 päivää ja C tarvitsisi 15 päivää?

Ohje: vertaa kysymystä edelliseen tehtävään.

7. ARKIPÄIVÄN MATEMATIIKKA

- 1) Koulun konserttiin yritetään saada esiintyjäksi suosittu bändi. Palkkion maksamiseen on kaksi vaihtoehtoa: joko 400 € ja lisäksi jokaisesta ostetusta lipusta 1,50 euroa tai 600 € ja lisäksi jokaisesta ostetusta lipusta 0,50 euroa. Kumpaa vaihtoehtoa kannattaisit, jos neuvottelisit palkkiosta bändin kanssa koulun edustajana? Miksi?

Kuinka monta lippua pitäisi myydä, jotta bändin palkkio olisi molemmissa vaihtoehdoissa sama?

Voitko käyttää kuviota apuna? Piirrä se tähän:

- 2) Kaksitahtimoottoreissa voitelu tapahtuu bensiiniin sekoitettavalla öljyllä. Tällöin käytetään 2–4 -prosenttisia seoksia.
- a) Miten valmistat 4-prosenttisen seoksen mopon kaksitahtimoottoria varten, jos sinulla on 5 litraa bensiiniä?

Kuinka paljon lisäät bensiiniin öljyä?

Mikä tällöin on seoksen kokonaismäärä litroina?

- b) Kuinka paljon käytät öljyä, jos tarvitset 2-prosenttisen seoksen?

- c) Sinulla on käytettävissäsi 4 litran kannu. Kuinka paljon tarvitset öljyä, jos valmistat kannun täyteen 4-prosenttista seosta?

Kuinka paljon tällöin kaadat kannuun bensiiniä?

- 3) Lähihoitajana työskentelevän Leenan tuli kotihoidon käynnillään arvioida silmätippapakkauksen riittävyttä. Antti saa sairaaseen silmäänsä silmätippoja viikon ajan ennen silmäleikkausta yhden tipan kuusi kertaa päivässä ja leikkauksen jälkeen yhden tipan kolme kertaa päivässä kolmen päivän ajan. Pakkauskoko on 5 ml ja 1 ml vastaa 20 tippaa.

- a) Kuinka monta millilitraa vuorokaudessa Antti saa silmätippoja ennen leikkausta?

- b) Kuinka monta millilitraa silmätippoja hän saa leikkauksen jälkeen yhteensä?

- c) Riittääkö yksi pakkaus lääkitykseen?

- 4) Elimistömme kuluttaa energiaa, vaikka emme liikkuisi lainkaan. Muun muassa hengitys, sydämen toiminta, ruoansulatus ja ruumiin lämpötilan ylläpito kuluttavat energiaa levossakin koko ajan. Tätä energiankulutusta kutsutaan perusaineenvaihdunnaksi tai lepoaineenvaihdunnaksi. Lihasmassa kasvattaa perusaineenvaihduntaa: kahdesta samanpainoisesta henkilöstä suurempi perusaineenvaihdunta on sillä, jolla on enemmän lihasmassaa.

Maailman terveysjärjestön (WHO eli World Health Organization) arvion mukaan 10–18-vuotiaiden poikien perusaineenvaihdunta on noin $(17,5m + 651)$ kilokaloria (kcal) vuorokaudessa ja 10–18-vuotiaiden tyttöjen puolestaan noin $(12,2m + 746)$ kilokaloria vuorokaudessa, missä m on henkilön massa kilogrammoina.

Keskiolut sisältää energiaa 34 kcal / 100 g ja tölkin tilavuus on 33 cl. Siideri sisältää 48 kcal / 100 g ja pullon tilavuus on 0,5 l. Reipas kävely kuluttaa energiaa viisinkertaisesti lepoaineenvaihduntaan verrattuna. Oletetaan, että oluen ja siiderin tiheys on sama kuin veden eli yhden litran massa on noin yksi kilogramma.

Jos Anders (18 v. 60 kg) juo 2 tölkkiä keskiolutta, niin kuinka kauan hänen tulisi kävellä reippaasti, jotta hän olisi kuluttanut juomasta saamansa energian?

Jos Elisa (19 v. 50 kg) juo yhden pullon siideriä, niin kuinka kauan hänen tulisi kävellä reippaasti, jotta hän olisi kuluttanut juomasta saamansa energian?

Tiesitkö tämän alkoholin vaikutuksesta hormoneihin: Naisilla alkoholi nostaa testosteronin (mieshormonin) pitoisuutta, mutta miehillä tapahtuu päinvastoin, alkoholi siis korostaa miehissä naisellisia piirteitä. Susanna Apterin Suomen Lääkärilehdessä 23/2006 julkaisemassa artikkelissa oikaistaan myös väärä käsitys siitä, että lyhytaikainen alkoholin käyttö saattaisi tilapäisesti nostaa miehen testosteronipitoisuutta. Testosteronitasossa tapahtuu laskua sekä lyhyt- että pitkäaikaisen juomisen aikana.

8. GEOMETRIA

1) Piirrä erilaisia suorakulmioita, joiden piirin pituus on 12 cm. Laske jokaisen piirtämäsi suorakulmion pinta-ala.

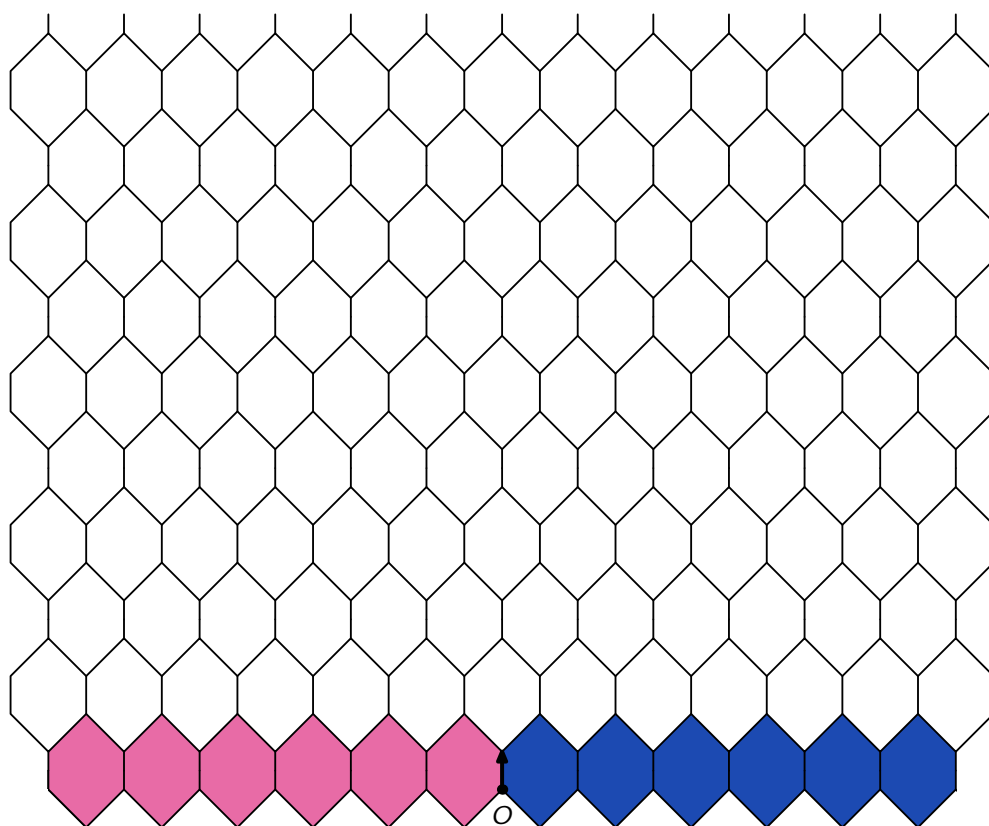
★ 2) Tarkastele edellisessä tehtävässä piirtämiesi suorakulmioiden muotoja. Millaisella suorakulmioilla näyttää olevan suurin pinta-ala?

Osaatko perustella ratkaisusi?

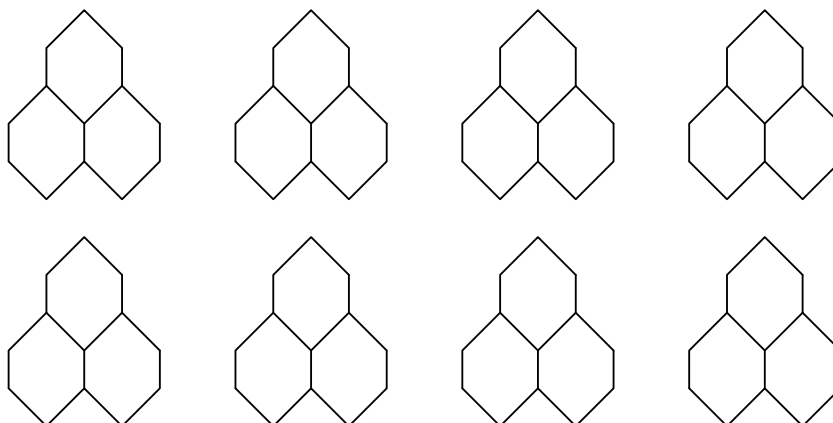
3) Piirrä erilaisia suorakulmioita, joiden pinta-ala on 16 cm^2 . Laske jokaisen piirtämäsi suorakulmion piiri.

★ 4) Tarkastele edellisessä tehtävässä piirtämiesi suorakulmioiden muotoja. Millaisella suorakulmioilla näyttää olevan suurin piiri?

- 5) Ala seurata punaisten ja sinisten laattojen välistä reunaa pisteestä O . Jatka murtoviivaa niin, että jos saat lanttia heittämällä kruunan, värjäät edessä olevan laatan punaiseksi, jos klaavan, siniseksi. Tummenna punaisten ja sinisten laattojen välinen reuna ja määritä tarvittaessa seuraavan laatan väri heittämällä kolikkoa uudelleen (ellei väritystä jo ole).



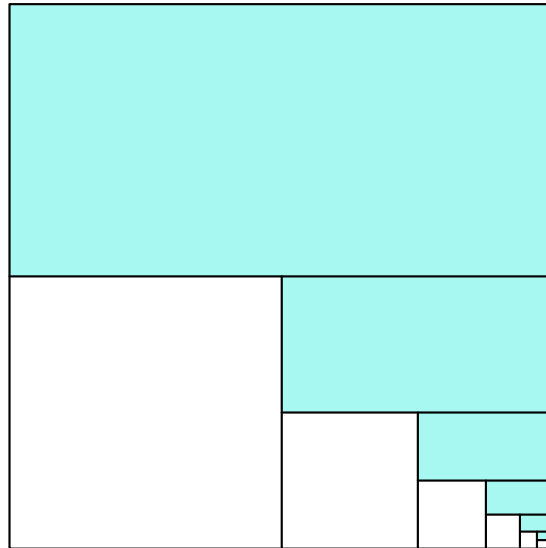
Piirrä eri vaihtoehdot, miten murtoviiva voi jatkua kolmen laatan yhteisessä kärkipisteessä.



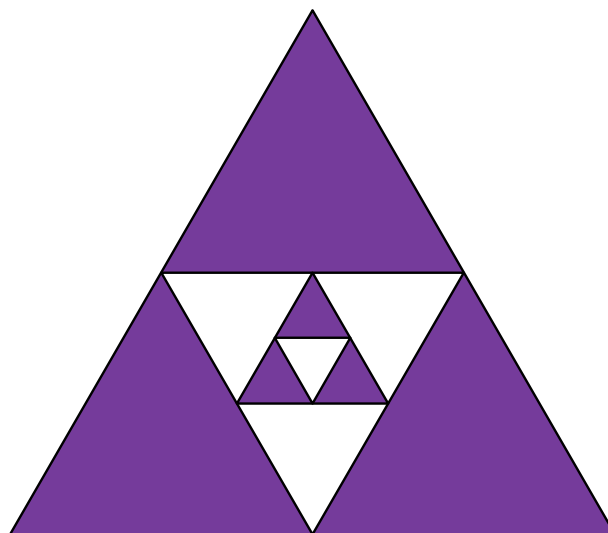
6) Tee lukujono väritetyn osan pinta-alasta kussakin vaiheessa, jos suurimman neliön sivun pituus on

a) 3: _____

b) a: _____

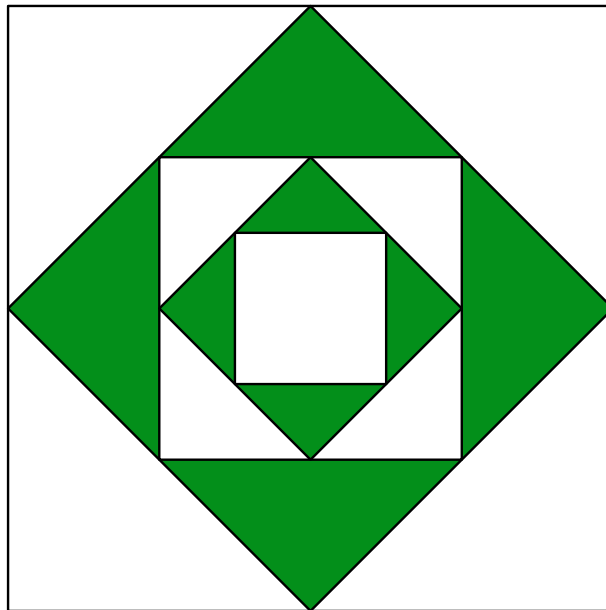


7) Kuviossa leikkauspisteet ovat kolmion sivujen keskipisteitä. Jatka kuviota kohti sen keskipistettä.



Tee lukujono väritetyn osan pinta-alasta kussakin vaiheessa, jos suurimman kolmion sivun pituus on 2:

- 8) Kuviossa leikkauspisteet ovat neliön sivujen keskipisteitä. Jatka kuviota kohti sen keskipistettä.



Tee lukujono valkoisen osan pinta-alasta kussakin vaiheessa, jos suurimman neliön sivun pituus on

a) 2: _____

b) c : _____

Tee lukujono väritetyn osan pinta-alasta kussakin vaiheessa, jos suurimman neliön sivun pituus on

a) 2: _____

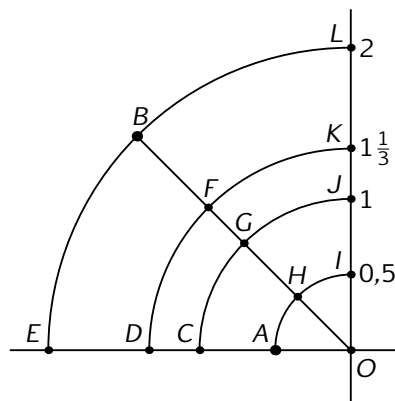
b) c : _____

Päättele, miten suuri osa neliöstä on väritetty, jos piirrosta jatketaan loputtomiin:

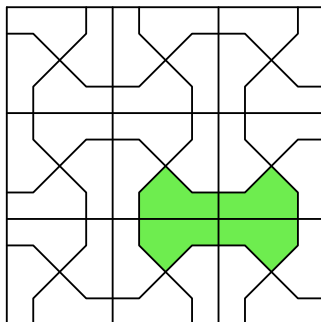
Lukion tiedoilla voidaan laskea tarkka tulos raja-arvona.

★ 9) Keksi itse loputtomiin jatkuva tehtävä:

★ 10) Alla olevassa kuviossa kulma EOB on 45° . Määritä lyhin matka pisteestä A pisteeseen B kuvion käyriä pitkin. Perustele vastauksesi.



- 11) Päättele väritetyn alueen pinta-ala, jos koko ruudun sivun pituus on 3 cm ja poikkiviivat leikkaavat pienten ruutujen sivuja suhteessa 1 : 3.



- 12) Miten neliön piiri saadaan laskettua, jos neliön sivun pituus tiedetään?

Laske neliön piiri P , jos neliön sivu on 7,5 cm.

$$P = \underline{\hspace{10em}}$$

- 13) Miten suorakulmion piiri saadaan laskettua, jos suorakulmion sivujen pituudet tiedetään?

Laske suorakulmion piiri P , jos suorakulmion sivut ovat 0,5 dm ja 66 cm.

$$P = \underline{\hspace{10em}}$$

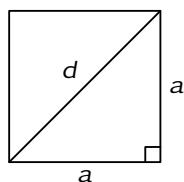
- 14) Kolmion piiri on 16 cm. Kaksi kolmion sivua on yhtä pitkiä ja kumpikin niistä on 2,9 cm pidempi kuin kolmas sivu. Mitkä ovat kolmion sivujen pituudet?

- 15) Kahdella suorakulmiolla on sama korkeus. Näistä suorakulmioista ensimmäisen pituus on 12 m ja toisen pituus on 15 m. Lisäksi tiedetään, että ensimmäisen suorakulmion pinta-ala on 60 m^2 pienempi kuin toisen suorakulmion pinta-ala. Laske suorakulmioiden korkeus.

- 16) Kolmion suurimman ja pienimmän kulman erotus on 30 astetta ja kolmas kulma on näiden keskiarvo. Määritä kulmien suuruudet asteina.

- 17) Anna pinta-ala A , piiri P ja kirjoita niin monta niiden ja kuvioon merkittyjen janojen pituuksien välistä yhtälöä kuin osaat.

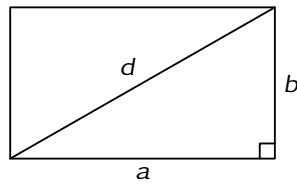
a) Neliö



$$A = \underline{\hspace{2cm}} \qquad P = \underline{\hspace{2cm}}$$

Muita yhtälöitä:

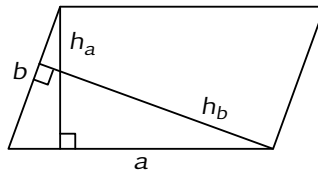
b) Suorakulmio



$$A = \underline{\hspace{2cm}} \qquad P = \underline{\hspace{2cm}}$$

Muita yhtälöitä:

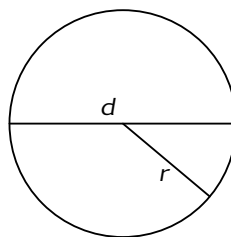
c) Suunnikas



$$A = \underline{\hspace{2cm}} \qquad P = \underline{\hspace{2cm}}$$

Muita yhtälöitä:

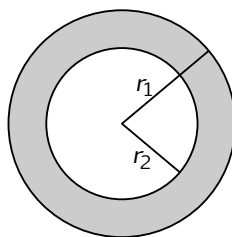
d) Ympyrä



$$A = \underline{\hspace{2cm}} \qquad P = \underline{\hspace{2cm}}$$

Muita yhtälöitä:

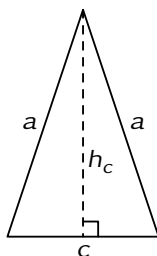
e) Ympyrärengas



$$A = \underline{\hspace{2cm}} \qquad P = \underline{\hspace{2cm}}$$

Muita yhtälöitä:

f) Tasakylkinen kolmio



$$A = \underline{\hspace{2cm}} \qquad P = \underline{\hspace{2cm}}$$

Muita yhtälöitä:
