

1.1. RATIONAALILUVUN NELIÖ

1. Käyttäen tietoa $a^2 = a \cdot a$ laske:

a) 8^2 ; b) $(-3)^2$; c) $0,2^2$; d) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^2$; e) $(-12)^2$;

f) $(+2,3)^2$; g) -7^2 ; h) $-(-3^2)$; i) $\left(3\frac{2}{5}\right)^2$; j) $\left(3 \cdot \frac{2}{5}\right)^2$.

2. Laske näiden lukujen neliöt:

17; -9; 1,6; 12; $\frac{11}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; $8\frac{1}{2}$.

3. Laske:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$; $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(-1\frac{3}{4}\right)^2$.

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\frac{2^2}{3}$; $\frac{2}{3^2}$; $\frac{2^2}{3^2}$.

4. Laske a^2 , kun

a) $a = 0,5$; b) $a = -1,2$; c) $a = 1\frac{1}{2}$; d) $a = -0,05$;
e) $a = -2,4$; f) $a = 0,03$.

5. Kirjoita pinta-alan kaava:

- a) neliö, jonka sivun pituus on a ;
- b) tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on a ;
- c) tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka kateetin pituus on a ;
- d) kuutio, jonka särmän pituus on a .

6. Laske neliön pinta-ala, kun sivun pituus on:

a) 5; b) 2,8; c) $3\frac{1}{4}$; d) 0,25; e) 7,25.

7. Täydennä:

x	-4	-2,1	$-1\frac{1}{3}$	-0,2	2	$3\frac{1}{2}$	4,5
x^2							

8. Laske sellaisen tasakylkisen suorakulmaisen kolmion ala, jonka kateetin pituus on:

a) 8 cm; b) 3,5 cm; c) $2\frac{1}{4}$ cm; d) 0,8 dm.

9. Ovatko seuraavat yhtälöt tosia?

a) $\frac{3^2}{5^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$; b) $\left(\frac{0,6}{3,5}\right)^2 = \left(\frac{6}{35}\right)^2$; c) $\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$;

d) $-2a^2 = (-2a)^2$; e) $(-3a)^2 = 9a^2$.

10. Määrää lausekkeen $(2x - 3)^2 - (2x + 3)^2$ arvo, kun $x = -\frac{1}{2}$.

11. Laske:

a) $-5 \cdot (-2)^2$; b) $-(+4)^2$; c) $-(-0,4)^2$; d) $-\frac{1}{2} \cdot 4^2$;
e) $-5^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$; f) $-(-3)^2 \cdot (-2^2)$.

12. Kun $a = -2$, määrää lausekkeen arvo:

a) $5a^2$; b) $-10a^2$; c) $20,4 \cdot a^2$; d) $1\frac{2}{3} \cdot a^2$; e) $(-3a)^2$.

13. Määrää lausekkeen arvo:

a) $2^2 + 3^2 - 5^2$; b) $5 \cdot 2^2 - 3^2 : 3$; c) $2 \cdot 3^2 \cdot 2 - 5 \cdot 4^2$;
d) $120 : 2^2 - 4^2 \cdot 1^2 + (-3)^2 \cdot (-2)$.

14. Lisää lausekkeeseen $6 \cdot 2^2 - 3^2 : 3$ yksi pari sulkumerkkejä siten, että sen arvo on:

a) suurin b) pienin.

15. Kuinka monta erilaista lauseketta voi tehdä lisäämällä yhden parin sulkumerkkejä lausekkeeseen

$$12 : 2^2 - 4^2 \cdot 3^2 ?$$

Laske kaikkien lausekkeiden arvot.

16. Määrää lausekkeen arvo:

a) $-2 \cdot 4^2 + (-2)^2 \cdot 4 - (-1,5)^2$; b) $-3 \cdot 2^2 + (-4)^2 \cdot 2 - (-2,5)^2$;
c) $(-3)^2 \cdot 4 - 4 \cdot 2^2 - (-0,5)^2$; d) $(-2^2) \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 - (-4,5)^2$.

17. Määrää lausekkeen arvo:

a) $1\frac{1}{2} \cdot (-0,2)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-0,2)$; b) $3^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right) \cdot 0,9 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 - 0,2^2$.

18. Olkoot annettuina

$$A = (12 : 3) \cdot 4, \quad B = 15 : 3 - 2, \quad C = 16 - 8 : 4.$$

Määrää lausekkeen arvo: A^2 ; B^2 ; C^2 ; $(A + C)^2$; $A^2 - B^2$; $(B^2 + C)^2$.

19. Määrää lausekkeen arvo:

a) $2a^2 - b$; b) $a - b^2$; c) $2a^2 + 3b$; d) $-b^2 + (-a)^2$;
e) $-a \cdot b + a^2b^2$; f) $\frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{9}b$; g) $a^2b^2 - a^2b + ab^2$

kun $a = 2$ ja $b = -3$.

20. Kun a ja b ovat rationaalisia lukuja, kirjoita seuraavat lausekkeet:

- a) $a:n$ ja $b:n$ summan neliö; b) $a:n$ ja $b:n$ neliöiden summa;
c) $a:n$ ja $b:n$ erotuksen neliö; d) $a:n$ ja $b:n$ neliöiden erotus;
e) $a:n$ ja $b:n$ neliöiden tulo; f) $a:n$ ja $b:n$ tulon neliö;
g) $a:n$ ja $b:n$ osamäärän neliö ($b \neq 0$);
h) $a:n$ ja $b:n$ neliöiden osamäärä ($b \neq 0$).

21.

- a) Vähennä lukujen 7 ja 3 summan neliöstä niiden neliöiden summa.
b) Lisää lukujen (-3) ja 9 neliöiden erotukseen niiden erotuksen neliö.

22. Etsi pienin sellainen luonnollinen luku, että kun sillä kerrotaan luku

- a) 120; b) 252; c) 840,

saadaan luonnollisen luvun neliö.

23. Millä $a:n$ arvoilla on:

- a) $(-2a)^2 > 0$; b) $-2a^2 > 0$; c) $(a + 2)^2 \geq 0$?

1.2. YHTÄLÖN $x^2 = a$ ($a \geq 0$) RATKAISEMINEN. NELIÖJUURI. IRRATIONAALILUVUT.

24. Laske juuren arvo:

- a) $\sqrt{144}$; $\sqrt{225}$; $\sqrt{900}$; $\sqrt{1600}$ b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{\frac{1}{16}}$; $\sqrt{\frac{36}{25}}$; $\frac{\sqrt{144}}{2}$
c) $\sqrt{0,25}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{1,69}$; $\sqrt{12,25}$.

25. Laske lausekkeen arvo:

- a) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$; $\sqrt{36} - \sqrt{81}$; $5 \cdot \sqrt{4} - \sqrt{121}$
b) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; $\sqrt{\left(3\frac{3}{4}\right)^2}$; $\sqrt{6\frac{1}{4}}$
c) $\sqrt{1 + \frac{15}{49}}$; $\sqrt{1 + 1\frac{1}{4}}$; $\sqrt{2 - \frac{7}{16}}$; $\sqrt{\frac{25}{16}} - 1$.

26. Laske nelikulmion sivun pituus, jos sen pinta-ala on:

- a) 36 cm^2 ; b) 81 cm^2 ; c) 49 dm^2 ; d) 100 mm^2 .

27. Ratkaise yhtälöt:

- a) $x^2 = 4$; b) $x^2 = 25$; c) $x^2 = 9$; d) $x^2 = 16$.

28. Käyttäen taulukkoa etsi neliöjuurten likiarvot kahdella desimaalilla:

- $\sqrt{20}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{56}$; $\sqrt{112}$; $\sqrt{834}$; $\sqrt{529}$.

29. Ratkaise yhtälöt:

a) $x^2 = 81$; $x^2 = \frac{36}{25}$; $x^2 = 4\frac{76}{81}$; $x^2 = 0,09$

b) $2x^2 = 72$; $3x^2 = 0,27$; $\frac{2}{3}x^2 = \frac{3}{8}$; $1\frac{3}{4}x^2 = \frac{4}{7}$

c) $3x^2 + 3 = 30$; $59 - 7x^2 = 31$; $4(x-2)^2 = 25$; $(4x-2)^2 = 25$

d) $3\frac{1}{2}x^2 - 2 = 1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{25}x^2 - 1 = \frac{9}{16}$; $\left(\frac{1}{25}x - 1\right)^2 = \frac{9}{16}$

30.

a) Nelikulmion pinta-ala on 32 cm^2 . Laske sen lävistäjän pituus.

b) Tasakylkisen kolmion pinta-ala on 18 cm^2 . Laske sen kateetin pituus.

31. Kuution pinta-ala on 96 cm^2 . Laske sen tilavuus.

32. Kuution ja puolisuunnikkaan pinta-alat ovat samat. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 18 cm ja 14 cm ja korkeus on 24 cm . Laske kuution särmän pituus.

33. Luvun $\frac{9}{4}$ ja erään positiivisen luvun neliön tulo on $1\frac{9}{16}$. Mikä on tämä luku?

34. Kun erään negatiivisen luvun kaksinkertaiseen neliöön lisätään 18 , saadaan 90 . Määrää tämä luku.

35. Erään positiivisen luvun neliön ja luvun $\frac{1}{9}$ osamäärä on $2\frac{7}{9}$. Määrää tämä luku.

36. Ratkaise yhtälöt:

a) $40 - (5x^2 + 8) = 12$; b) $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6} - x^2\right)$;

c) $-8 - [3 + (2x^2 - 13)] = -16$.

37. Etsi irrationaaliset luvut joukosta $A = \{3,14; \sqrt{2}; 1,41; 1,002003\dots\}$.

38. Järjestä luvut pienimmästä suurimpaan.

$\sqrt{17}$; $-\sqrt{15}$; 3 ; -4 ; 5 ; $\sqrt{20}$; $-3,4$.

39. Järjestä luvut pienimmästä suurimpaan.

$-\frac{2}{3}$; $-\sqrt{3}$; $-1,7$; $-2,3$; $\sqrt{2}$; $1,41$; $1,42$; $\sqrt{2,25}$.

40. Vertaile lukuja:

a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ja $\frac{1}{4}$; b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ja $\frac{4}{9}$; c) $\sqrt{0,36}$ ja $0,36$; d) $\sqrt{16}$ ja 16 ;

e) $\sqrt{20}$ ja 20 .

41. Vertaile lukuja:

a) \sqrt{a} ja a , kun $0 < a < 1$, $a \in \mathbb{R}$. b) \sqrt{a} ja a , kun $1 \leq a$, $a \in \mathbb{R}$.

42. Jos $\sqrt{p} < \sqrt{q}$, kun $p > 0$, $q > 0$, niin kumpi on totta:

a) $p < q$ vai b) $p > q$?

43. Laske lausekkeen arvo:

a) $(\sqrt{225} - 3\sqrt{16}) \cdot (2\sqrt{64} - 9\sqrt{121})$; b) $\frac{3}{4}\sqrt{1\frac{7}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{16}$;

c) $\frac{2}{5}\sqrt{6\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\sqrt{16} - 2\sqrt{0,04}$; d) $1\frac{1}{3} : \sqrt{\frac{4}{9}} + \frac{1}{\sqrt{225}} \cdot 1\frac{2}{3}$.

44. Jos

$$A = 6 - 4\sqrt{\frac{25}{16}} - 1, \quad B = (6 - 4)\sqrt{\frac{25}{16}} - 1, \quad C = 6 - 4\sqrt{\frac{25}{16}} - 1,$$

niin mikä yhtälöistä on tosi:

a) $A = \frac{B+C}{2}$; b) $B = \frac{A+C}{2}$; c) $C = \frac{A+B}{2}$?

1.3. REAALILUVUT. YHTÄLÖ $\sqrt{a^2} = |a|$.

45. Laske:

a) $\sqrt{(1,5)^2}$; b) $\sqrt{(-4,5)^2}$; c) $\sqrt{\left(-2\frac{1}{2}\right)^2}$; d) $\sqrt{(-2,8)^2}$.

46. Mitkä luvuista:

$\sqrt{4}$; $-\sqrt{9}$; $2 + \sqrt{16}$; $2 - \sqrt{3}$; $3 + \sqrt{20}$; $0,121\overline{2}$;
 $0,232\overline{3}$; $1,454454445\dots$

ovat rationaalisia ja mitkä irrationaalisia?

47. Osoita, että luvut:

a) $0,222\overline{2}$; b) $0,121\overline{2}$; c) $0,123\overline{123}$; d) $1,55\overline{5}$

ovat rationaalisia.

48. Ovatko seuraavat yhtälöt tosia?

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{\left(1\frac{1}{4}\right)^2} - \sqrt{6 + \frac{1}{4}} = 0$;

b) $\left(\sqrt{121} - \left(1\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{\left(-\frac{9}{25}\right)^2}\right) : \left(1\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{16}{25}} - \sqrt{0,81}\right) = 100$;

$$c) \left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt{\left(1\frac{2}{3}\right)^2} + \sqrt{196} \right) : \left(\sqrt{0,25} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{81}{16}} \right) = 10;$$

$$d) \left(\sqrt{169} - 3\sqrt{81} \right) : \left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt{225} + 0,5 \cdot \sqrt{100} \right) = -1.$$

49. Laske lausekkeen arvo:

$$a) 0,5 \cdot \sqrt{x^2}, \text{ kun } x = -2,5; \quad b) \frac{4}{5} \cdot a + b, \text{ kun } a = \sqrt{225} \text{ ja } b = \sqrt{64};$$

$$c) -4\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2}, \text{ kun } a = \frac{1}{4} \text{ ja } b = -16.$$

50. Sievennä lausekkeet:

$$a) \sqrt{9x^2}; \quad b) \sqrt{81a^2b^2}; \quad c) \sqrt{\frac{1}{4}m^2}; \quad d) \sqrt{1\frac{24}{25}y^4}.$$

51. Ratkaise yhtälöt:

$$a) \sqrt{x} = 2; \quad b) 2\sqrt{x} = 5; \quad c) \sqrt{2x} = 5; \quad d) \sqrt{x-1} = 4;$$

$$e) \sqrt{x} - 1 = 4; \quad f) \sqrt{25-3x} = 2.$$

52. Käyttäen tietoa, että $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ kaikilla $a \geq 0, b \geq 0$, laske:

$$a) \sqrt{16 \cdot 9}; \quad \sqrt{36 \cdot 49}; \quad \sqrt{100 \cdot 64}; \quad \sqrt{425 \cdot 16};$$

$$b) \sqrt{900}; \quad \sqrt{2500}; \quad \sqrt{324}; \quad \sqrt{16900}.$$

53. Käyttäen yhtälöä $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$) laske:

$$a) \sqrt{\frac{25}{81}}; \quad \sqrt{\frac{64}{121}}; \quad \sqrt{\frac{144}{289}}; \quad b) \sqrt{0,25}; \quad \sqrt{0,0016}; \quad \sqrt{2,25}.$$

54. Sievennä lausekkeet:

$$a) 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 7\sqrt{2}; \quad b) 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3};$$

$$c) 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 8\sqrt{5}.$$

55. Ilmaisemalla juuret neliönä laske neliöjuuret:

$$\sqrt{900}; \quad \sqrt{18496}; \quad \sqrt{17424}.$$

56. Käyttämällä yhtälöä $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) saadaan $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Ilmaise samalla tavalla neliöjuuret:

$$a) \sqrt{32}; \quad \sqrt{18}; \quad \sqrt{50}; \quad \sqrt{72};$$

$$b) \sqrt{12}; \quad \sqrt{75}; \quad \sqrt{48}; \quad \sqrt{108};$$

$$c) \sqrt{20}; \quad \sqrt{45}; \quad \sqrt{80}; \quad \sqrt{180}.$$

57. Mitkä seuraavista yhtälöistä ovat tosia?

$$a) \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{28}; \quad b) \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}) = 12;$$

c) $18 + 2\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$; d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$?

58. Sievennä lausekkeet:

a) $5\sqrt{12} + \sqrt{75} - 4\sqrt{27}$; b) $2\sqrt{20} + \sqrt{45} - 2\sqrt{80}$;
 c) $5\sqrt{75} - \sqrt{12} - 4\sqrt{48}$; d) $3\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + 3\sqrt{80}$.

59. Laske lausekkeen arvo:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \sqrt{50} - \sqrt{98}$; b) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{27} - \sqrt{75} - \sqrt{108}$;
 c) $2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{32}$; d) $2\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + \sqrt{75} + \sqrt{80}$.

60. Esitä laskut siten, että:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = 10\sqrt{2}$; b) $\sqrt{27} + \sqrt{48} - 7\sqrt{3} = 0$;
 c) $(\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = 20$; d) $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{200}}{\sqrt{2}} = 13$.

1.4. LIKIARVO. REAALILUKU. $\sqrt{a^2} = |a|$.

61. Laske lausekkeen likiarvo kahdella desimaalilla:

a) $\sqrt{3} - (\sqrt{2} - \sqrt{5})$; b) $4\sqrt{6} + \sqrt{5} - 7\sqrt{6}$; c) $3\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{200}$;
 d) $5\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{27} - \sqrt{48}$; e) $2\sqrt{72} - \sqrt{50} - 2\sqrt{8}$; f) $\sqrt{80} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{45}$.

62. Laske lausekkeen likiarvo kahdella desimaalilla:

a) $(-2)^2 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$; b) $3 \cdot (-1)^2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$;
 c) $\sqrt{(-2)^2} + \sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

63. Jos haluaisimme sieventää murtoluvun $\frac{2}{\sqrt{2}}$, laventaisimme sen luvulla $\sqrt{2}$:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Sievennä vastaavalla tavalla murtoluvut:

$$\frac{5}{\sqrt{5}}; \quad \frac{3}{\sqrt{3}}; \quad \frac{7}{\sqrt{7}}; \quad \frac{24}{\sqrt{3}}; \quad \frac{25}{\sqrt{5}}; \quad \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

64. Sievennä lausekkeet:

a) $\sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{8} + \frac{8}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{15}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$; d) $\frac{14}{\sqrt{7}} + 14\sqrt{7}$.

65. Laske lausekkeen arvo:

$$A = 1\frac{2}{3} \cdot a + 6\frac{17}{18} \cdot b,$$

kun $a = \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$ ja $b = \sqrt{0,36 \cdot 0,16}$.

66. Laske lausekkeen arvo:

a) $\sqrt{0,36} + \sqrt{\frac{4}{25}} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}} - \sqrt{3 - \frac{11}{25}}$;

b) $\sqrt{1 + \left(1\frac{1}{3}\right)^2} + 5\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(1\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1\frac{9}{25} - 1}$.

1.5. LISÄYS I

67. Kirjoita murtoluvuksi rationaaliluku $0,12121212\dots$

68. Laskematta luvun $\sqrt{2}$ arvoa todista, että $\sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$.

69. Onko $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ rationaalinen? Perustele vastauksesi.

70. Todista, että $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ei ole rationaaliluku.

71. Todista, että $(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$ on rationaaliluku.

72. Kumpi on suurempi luku: $2 + \sqrt{2}$ vai $6 - \sqrt{6}$?

73. Ratkaise yhtälö: $(1 - y)^2 - 4 = 21$.

77. Todista, että jos a ja b ovat rationaalilukuja ja $a + b\sqrt{2} = 0$, on oltava $a = b = 0$.

78. Todista, että jos a ja b ovat reaalilukuja ja $a < b$, on $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Tehtävät on kääntänyt Mirjana Mirolovic ja kieliasun tarkistanut Juha Ruokolainen.

Kiitämme tehtävien käännös- ja julkaisuluvasta seuraavia:
professori Miodrag Mateljevic ja tohtori Ivan Anic.