

Solmu

Matematiikkalehti
3/2008

<http://solmu.math.helsinki.fi/>



Solmu 3/2008

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

<http://solmu.math.helsinki.fi/>

Päätoimittaja:

Matti Lehtinen, dosentti, Maanpuolustuskorkeakoulu

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti: *toimitus@solmu.math.helsinki.fi*

Toimituskunta:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Ari Koistinen, FM, Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Antti Rasila, tutkija, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Hilkka Taavitsainen, lehtori, Ressun lukio

Graafinen avustaja: *Marjaana Beddard*

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Virpi Kauko, FT, matemaatikko, *virpi@kauko.org*, Jyväskylä

Jorma K. Mattila, professori, *jorma.mattila@lut.fi*

Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, dosentti, *jorma.merikoski@uta.fi*

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Tampereen yliopisto

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, assistentti, *anne-maria.ernvall@utu.fi*

Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Matti Nuortio, jatko-opiskelija, *mnuortio@paju.oulu.fi*

Matemaattisten tieteiden laitos, Oulun yliopisto

Timo Tossavainen, lehtori, *timo.tossavainen@joensuu.fi*

Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

Numeroon 1/2009 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 11.1.2009 mennessä.

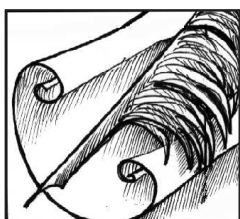
Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Kannen kuvio on yksityiskohta tilkkutyöstä. Kuvio on alunperin tehty Riverstonissa Connecticutissa vuonna 1876.

Sisällys

Pääkirjoitus: Olympialaiset, olympialaiset ja Suomi (Matti Lehtinen)	4
Analyysin alkulähteillä (Markku Halmetoja)	6
Paralleelipostulaatti (Petteri Harjulehto)	10
Käyrien välinen dualiteetti (projektiivisessä) tasossa (Georg Metsalo)	13
Mongolian opettajakilpailun tehtävien ratkaisut (Matti Lehtinen ja Janne Junnila)	20
Matematiikan opetuksesta ja osaamisesta – vielä ainakin kerran (Timo Tossavainen)	23
Lukujen uusi maailma: p -adiset luvut (Tauno Metsänkylä)	25
Dynamiikkaa, derivaattoja ja ennustavia kuumemittareita (Mikko Malinen)	30
Kansainväliset matematiikkaolympialaiset Madridissa (Matti Lehtinen)	33
Matematiikkaolympialaiset 2008 – kuusi vaikeaa tehtävää (Matti Lehtinen)	34



Olympialaiset, olympialaiset ja Suomi

Suomessa syntyy säännöllisin väliajoin keskustelua mitauksista ja tilastoista, joissa näyttää olevan kysymys koulujen asettamisesta paremmuusjärjestykseen. Opetushallintoviranomaiset asettuvat yleensä jyrkästi tuomitsemaan esimerkiksi luetteloita, joissa on laitettu paremmuusjärjestykseen lukioita niiden oppilaiden ylioppilaskirjoituksista saamien arvosanojen perusteella. Paha sana on *ranking*. Kun OECD-järjestö on julkaissut ns. PISA-tutkimuksen tuloksia, ei kritiikin ilmauksia ole kuulunut. Siitäkään huolimatta, että tulokset näyttävät kertovan eri maiden eritasoisista suorituksista. Mutta Suomen matematiikka-ranking olikin vuoden 2006 PISA-taulukossa kaksi, heti Korean jälkeen.

Maailmassa kilpaillaan, koko ajan ja mitä erilaisimmin tavoin, vakavasti ja leikillään.

Pekingin olympialaisiin osallistui noin 11200 urheilijaa hieman yli 200 maasta eli lähes koko maailmasta. He kilpailivat moninaisissa urheilulajeissa, sulkapallosta esteratsastukseen, painista taitouintiin, koskimelonasta maastopyöräilyyn.

Olympialaiset ovat paitsi niihin hyväksytyissä lajeissa maailman parhaiden yksilöiden voiman- ja taidonmittely, myös maailman valtioiden ja kansojen keskinäisen paremmuuden mittausta paikka. Joukkueet ilmoittautuvat maittain, marssivat (tai etenevät) avajaisissa lipujensa jäljessä ja jokaisen suorittajan ja suorituksen yhteydessä mainitaan kilpailijan maa. Maiden kokonaismenestyksen mittaamiseksi ei tietenkään ole yksiselitteistä laskukaavaa. Viime vuosikymmeninä on kuitenkin vakiintunut tapa asettaa kilpailijat järjestykseen mitalitilaston avulla.

Virallisen tilaston mukaan kilpailuissa jaettiin 302 kultamitalia, 303 hopeamitalia ja 353 pronssimitalia, yhteensä siis 958 mitalia, mutta kun monissa lajeissa kilpaillaan pareina, nelikkoina tai isompina joukkueina, mitaleita annettiin toista tuhatta kappaletta. Suomeen mitaleita tuli neljä, ja niiden saajina oli viisi kilpailijaa. Suomen osuus olympiamitaleista oli siis noin puoli prosenttia. Suomen osuus maailman väestöstä on noin 0,08 %. Mitalitilaston järjestämiseksi on yleisessä käytössä kaksi algoritmia. Ensimmäisenä järjestysperusteena voi olla kultamitalien lukumäärä, toisena hopeaja kolmantena pronssimitalit. Tai sitten lasketaan vain mitalien yhteismäärä. Kummallakin tavalla laskettuna Suomi oli Pekingin olympialaisten 44. maa. Siis noin parhaassa viidesosassa maailman maiden joukossa!

Maailman valtioiden asukasluvun järjestyksen mukaan Suomi on noin sijalla 110. Huippu-urheilija on harvinaisen yksilö. Tilastollinen nollahypoteesi olisi, että todella loistavien urheilijoiden lukumäärä olisi eri maissa suhteessa maan väkilukuun. Olympiamenestys osoittaa, että Suomen kohdalla tämä ensimmäinen oletus ei ole toteutunut: menestys on ollut odottamattoman hyvää. Suomessa tehdään asioita, jotka edistävät urheilumenestystä.

Noin kuukautta ennen Pekingin olympiakisoja pidettiin Madridissa olympialaiset, 49. kansainväliset matematiikkaolympialaiset. Näihin olympialaisiin otti osaa 535 nuorta matematiikan huippua 97 maasta. Matematiikkaolympialaiset on varsin kattava otos maailman nuorten matematiikkataidoista: olympialaisiin osallistuneet maat kattavat 80,5 % maapallon väestöstä. Olympialai-

Pääkirjoitus

sisä jaettiin 47 kulta-, 100 hopea- ja 120 pronssimitalia, yhteensä siis 267 mitalia. Suomeen näistä tuli yksi, eli noin 0,4 %.

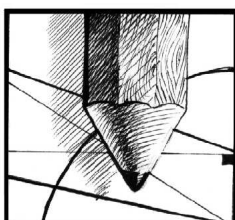
Jos matematiikkaolympialaisten mitalitaulukkoa luetaan niin kuin Pekingin kisojen taulukkoa, Suomi on kuitenkin – yhdessä 12 muun maan kanssa – jaetulla 65. sijalla. Tämä tarkoittaa sitä, että Suomi on matematiikkakisoissa huonoimmassa kolmanneksessa. Matematiikkaolympialaisten vakiintunut paremmuusjärjestysmittari on kuitenkin joukkueen saama yhteispistemäärä. Madridin olympialaisten pistetaulukossa Suomi oli sijalla 74. Euroopan maista vain Islanti, Montenegro ja Liechtenstein olivat jäljempänä – Montenegron ja Liechtensteinin joukkueet tosin olivat vakiokokoa pienempiä. No, Suomihan on pieni maa. Mutta pistetaulukossa olivat Suomen edellä Mongolia, Liettua, Moldova, Bosnia-Hertsegovina, Slovenia, Makedonia, Luxemburg, Latvia, Macao, Armenia, Albania, Kypros, Uusi-Seelanti ja Viro, kaikissa vähemmän asukkaita kuin Suomessa.

Luonnon laki on, että monen tekijän yhteisvaikutuksis-

ta koostuva suure noudattaa normaalijakauman tyypistä jakaumaa. "Matematiikan osaaminen", M , on epäilemättä tällainen suure. Madridin olympiatulokset voi tulkita niin, että M :n suuria arvoja on Suomessa aika vähän. Tämä voi tarkoittaa joko sitä, että M :n jakauman keskus on meillä alhaalla tai että M :n hajonta on pieni. Edellinen selitys ei sovi viralliseen PISA-tulkintaan, jonka mukaan M :n keskikohta on Suomessa korkealla. Siispä M :n hajonta on pieni. Koulutuksemme ei tue huippuja ja hyviä. Onko tämä uutinen?

Matematiikkaolympialaistulokset antavat mahdollisuuksia leikkiä numeroilla. Kaikki PISA-tutkimuksen maat osallistuvat matematiikkaolympialaisiin. Olympiapisteiden ja PISA-keskiarvon korrelaatiokerroin on 0,05. Korrelaatiota ei siis ole. Otetaan sitten mukaan maiden väkiluku ja ajatellaan, että suuressa populaatiossa on todennäköisemmin hajonnan laitatapauksia. Matematiikkaolympialaisten pisteet normalisoituna maan väkiluvulla korreloivat erittäin lievästi negatiivisesti PISA-tulosten kanssa. PISA ei mittaa huippuosaamista. Onko tämä uutinen?

Matti Lehtinen



Analyysin alkulähteillä

Markku Halmetoja

Mäntän lukio

Differentiaalilaskentaa harjoitettiin miltei 200 vuotta ennen kuin sen perustana olevat reaaliluvut sekä funktio ja sen raja-arvo määriteltiin täsmällisesti turvautumatta geometriseen havaintoon ja ”rajattoman lähestymisen” kaltaisiin kuvaileviin ilmaisuihin. Tämä tapahtui 1800-luvulla, ja samalla selkiytyivät funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyneet ongelmat. Sitä ennen oli jopa yritetty todistaa, että jatkuvat funktiot olisivat myös derivoituvia joitakin yksittäisiä kohtia lukuunottamatta. Käsitteiden selkiytymisen myötä keksittiin kuitenkin funktioita, jotka ovat kaikkialla jatkuvia, mutta joilla ei ole derivaattaa yhdessäkään kohdassa. Tällaisten ja muidenkin vastaavien funktioiden olemuksen ymmärtäminen edellyttää tiettyjen analyysin peruskäsitteiden täsmällistä tuntemista. Reaaliluvuista kuitenkin riittää koulumatematiikassa annettu intuitiivinen kuva. Tiedämme, että ne voidaan asettaa vastaavuuteen suoran pisteiden kanssa, joten on luontevaa puhua niiden välisistä etäisyyksistä. Tiedämme myös, että jokaisella välillä $]a, b[$ on vähintään yksi rationaalinen ja irrationaalinen luku. Analyysin täsmälliseen käsitteistöön voi perehtyä teosten [1], [2] ja [4] avulla. Lukijan mukavuutta ajatellen esitämme kuitenkin tämän artikkelin ymmärtämiseksi tarvittavat esitiedot.

Perusasioita

Lukujonon (a_n) raja-arvo on a , jos lukujen a ja a_n välinen etäisyys voidaan tehdä pienemmäksi kuin mikä ta-

hansa positiivinen luku valitsemalla n riittävän suureksi, siis jos jokaista positiivista lukua ε vastaa positiivinen kokonaisluku n_ε siten, että $n > n_\varepsilon \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$. Jos jonolla on raja-arvo, niin jono suppenee. Muussa tapauksessa jono hajaantuu. Jos jono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, tai vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin monotonisen jonon suppenemislauseen mukaan se suppenee.

Olkoon funktio f määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuunottamatta. Funktiolla on kohdassa x_0 raja-arvo a , jos jokaista positiivista lukua ε vastaa sellainen positiivinen δ_ε , että

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Jos löytyy kohti lukua x_0 suppeneva jono, jota vastaa funktion arvoista muodostuva jono hajaantuu, niin funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa x_0 . Jos taas löytyy kaksi eri jonoa, jotka suppenevat kohti lukua x_0 , mutta joita vastaavilla funktion arvoista muodostuvilla jonoilla on eri raja-arvot, niin silloinkaan funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa x_0 .

Funktio on jatkuva kohdassa x_0 , jos funktion raja-arvo kohdassa x_0 on sama kuin funktion arvo tässä kohdassa. Siis funktio f on jatkuva kohdassa x_0 , jos jokaista positiivista lukua ε vastaa sellainen positiivinen δ_ε , että

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jos funktio ei ole jatkuva kohdassa x_0 , niin se on epäjatkuva tässä kohdassa.

Funktio f on jaksollinen ja $\omega \neq 0$ on sen jakso, jos $f(x + \omega) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Pienintä positiivista jaksoa, jos sellainen on olemassa, sanotaan funktion perusjaksoksi. Esimerkiksi sinifunktion perusjakso on 2π .

Outoja funktioita

Määritelmien toimivuuden koettelemiseksi, ja pelkäästä uteliaisuudestakin, on ollut tarpeen kehittää toinen toistaan kummallisempia ”patologisista” funktioita. Esittelemme aluksi harjoitustehtävinä kolme jatkuvuutta ja derivoituvuutta havainnollistavaa esimerkkiä.

1. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

on jaksollinen ja epäjatkuva kaikkialla. Määritä funktion jaksot. Onko sillä perusjakso? Saksalainen matemaatikko Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) laati tämän esimerkin ilmeisesti osoittaakseen, että on olemassa muitakin kuin lausekkeiden avulla määriteltyjä funktioita.

2. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

on jatkuva ja derivoituva ainoastaan yhdessä kohdassa.

3. Funktio f on määritelty siten, että $f(x) = 0$, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ja jos $x = p/q$, missä $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+$ ja $\text{syt}(p, q) = 1$, niin $f(x) = 1/q$. Osoita, että tämä funktio on jatkuva irrationaalisissa kohdissa ja epäjatkuva muualla. Onko f derivoituva irrationaalisissa kohdissa?

Kuten alussa totesimme, on myös funktioita, jotka ovat kaikkialla jatkuvia mutta eivät missään derivoituvia. Ensimmäiset sellaiset keksittiin 1800-luvulla, mutta ne ovat hyvin vaikeita. Myöhemmin 1900-luvulla keksittiin funktioita, joille tämä merkillinen ominaisuus on helpompi todistaa. Käsittelemme niistä kaksi, ja aloitamme hollantilaisen matemaatikon Bartel Leendert van der Waerdenin (1903 – 1996) vuonna 1930 julkaisemalla erittäin kauniilla esimerkillä.

Olkoon $\{x\}$ luvun x etäisyys lähimmästä kokonaisluvusta. Funktio $x \mapsto \{x\}$ on jatkuva ja jaksollinen. Sen perusjakso on 1 ja $|\{x\} - \{y\}| \leq \frac{1}{2}$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Esimerkkifunktiomme on

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{10^k x\}}{10^k}.$$

Näytämme aluksi, että se on määritelty kaikilla x :n arvoilla. Osasummien

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\{10^k x\}}{10^k}$$

jono (f_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, sillä yhteenlaskettavat ovat ei-negatiivisia, ja

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\{10^k x\}}{10^k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^k} < \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{5}{9}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Monotonisen jonon suppenemislauseen perusteella jono (f_n) suppenee kaikilla x :n arvoilla, joten f on kaikkialla määritelty.

Todistamme, että f on jatkuva. Olkoot $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mielivaltaisesti valittuja. Kirjoitamme funktion muotoon

$$f(x) = f_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\{10^k x\}}{10^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\{10^k x\}}{10^k}.$$

Koska $|\{10^k x\} - \{10^k x_0\}| \leq \frac{1}{2}$, on mahdollista valita n niin suureksi, että

$$\begin{aligned} |r_n(x) - r_n(x_0)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\{10^k x\} - \{10^k x_0\}}{10^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\{10^k x\} - \{10^k x_0\}|}{10^k} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k} = \frac{1}{18} \cdot 10^{-n} \\ &< 10^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Osasummat f_n ovat jatkuvia, sillä ne ovat jatkuvien funktioiden äärellisiä summia. On siis olemassa positiivinen δ_ε niin, että

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jos siis $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, niin

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f_n(x) - f_n(x_0) + r_n(x) - r_n(x_0)| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |r_n(x) - r_n(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Täten f on kaikkialla jatkuva.

Osoitamme, että f ei ole derivoituva. Voimme rajoittaa välille $[0, 1]$, sillä f on jaksollinen ja sen perusjakso on 1. Olkoon siis $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ väliltä $[0, 1]$ mielivaltaisesti valittu luku. Sovimme, että jos sen desimaalikehitelmä on tyyppiä $0,2999\dots$, niin muutamme sen muotoon $0,3000\dots$. Jos $0, a_{k+1} a_{k+2} \dots \leq \frac{1}{2}$, niin $\{10^k x\} = 0, a_{k+1} a_{k+2} \dots$ ja muussa tapauksessa

$\{10^k x\} = 1 - 0, a_{k+1} a_{k+2} \dots$ Muodostamme kohti nol-
laa suppenevan jonon (h_m) siten, että erotusosamää-
ristä

$$d_m = \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m}$$

muodostuva jono (d_m) hajaantuu. Olkoon $h_m = -10^{-m}$, jos $a_m = 4$ tai $a_m = 9$, ja $h_m = 10^{-m}$ muul-
loin. Jos $k \geq m$, niin lukujen $10^k(x + h_m)$ ja $10^k x$ desi-
maaliosat ovat samat, jolloin $\{10^k(x + h_m)\} - \{10^k x\} =$
 0 . Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} d_m &= \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{10^k(x + h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k h_m} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\{10^k(x + h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k h_m}. \end{aligned}$$

Lukujen h_m valintatavasta johtuen tässä summassa yh-
teenlaskettavien osoittajissa olevat luvut $\{10^k(x + h_m)\}$
ja $\{10^k x\}$ ovat molemmat joko tyyppiä $0, a_{k+1} a_{k+2} \dots$,
jolloin

$$\frac{\{10^k(x + h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k h_m} = \frac{\pm 10^{k-m}}{\pm 10^{k-m}} = 1,$$

tai tyyppiä $1 - 0, a_{k+1} a_{k+2} \dots$, jolloin

$$\frac{\{10^k(x + h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k h_m} = \frac{\mp 10^{k-m}}{\pm 10^{k-m}} = -1.$$

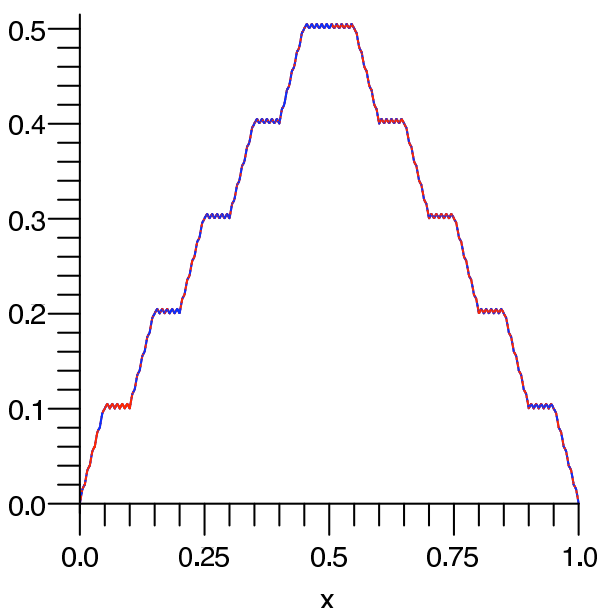
Siis summassa

$$d_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\{10^k(x + h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k h_m}$$

jokainen yhteenlaskettava on joko 1 tai -1 . Niinpä kai-
killa m :n arvoilla

$$d_{m+1} = d_m + 1 \quad \text{tai} \quad d_{m+1} = d_m - 1,$$

joten jono (d_m) hajaantuu.



Kuvassa on van der Waerdenin funktion osasumman f_5 :n kuvaajasta yksi jakso. Osoitteessa [6] olevasta ku-
vasarjasta voi visuaalisestikin oivaltaa, miksi f ei ole
derivoituva.

Tässä esimerkissä desimaalikehitelmät mahdollistivat
elegantin todistuksen. On kehitetty myös niistä riip-
pumattomia esimerkkejä. Tutkimme Walter Rudinin
teoksessaan [4] esittämää funktiota pienen esivalmis-
telun jälkeen.

Olkoon $\phi(x) = |x|$, kun $-1 \leq x \leq 1$. Jatkamme ϕ :n
määrittelyä asettamalla $\phi(x + 2) = \phi(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
Näin ϕ tulee jaksolliseksi ja sen perusjakso on 2. Kai-
killa $m \in \mathbb{Z}$ on $\phi(2m) = 0$ ja $0 \leq \phi(x) \leq 1$ kaikilla
 $x \in \mathbb{R}$. Kaikilla x :n ja y :n arvoilla on

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|,$$

ja jos välillä $]x, y[$ ei ole kokonaislukuja, niin

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|.$$

Rudinin esimerkkifunktio on

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \phi(4^k x).$$

Se osoitetaan kaikkialla määritellyksi ja jatkuvaksi sa-
amalla tavalla kuin van der Waerdenin funktiokin. Osoi-
tamme, että f ei ole derivoituva. Olkoon x mielivaltai-
nen reaali-luku, m positiivinen kokonaisluku ja

$$\delta_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m},$$

missä merkki valitaan niin, että lukujen $4^m x$ ja $4^m(x + \delta_m)$ välissä ei ole kokonaislukua. Tämä on mahdollista,
sillä $|4^m x - 4^m(x + \delta_m)| = \frac{1}{2}$. Olkoon

$$\gamma_k = \frac{\phi(4^k(x + \delta_m)) - \phi(4^k x)}{\delta_m}.$$

Jos $k > m$, niin $4^k \delta_m$ on parillinen kokonaisluku, joten
 $\gamma_k = 0$. Koska lukujen $4^m x$ ja $4^m(x + \delta_m)$ välissä ei ole
kokonaislukua, on

$$|\gamma_m| = \left| \frac{\phi(4^m(x + \delta_m)) - \phi(4^m x)}{\delta_m} \right| = \frac{1/2}{|\delta_m|} = 4^m.$$

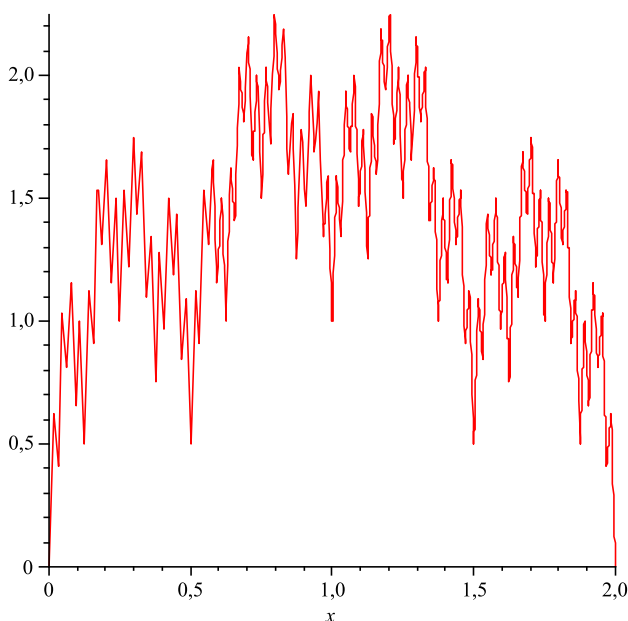
Jos vihdoin $0 \leq k < m$, niin

$$|\gamma_k| = \left| \frac{\phi(4^k(x + \delta_m)) - \phi(4^k x)}{\delta_m} \right| \leq \frac{4^k |\delta_m|}{|\delta_m|} = 4^k.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^k \gamma_k \right| = \left| \sum_{k=0}^m \left(\frac{3}{4} \right)^k \gamma_k \right| \\ &= \left| 3^m + \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4} \right)^k \gamma_k \right| \geq 3^m - \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^k \cdot 4^k \right] \\ &= 3^m - \sum_{k=0}^{m-1} 3^k = \frac{1}{2} (3^m + 1). \end{aligned}$$

Näemme, että f :n erotusosamäärästä muodostuva jono hajaantuu, sillä m :n kasvaessa $\delta_m \rightarrow 0$. Siis f ei ole derivoituva kohdassa x .



Kuvassa on Rudinin funktion osasumman f_3 kuvaajasta yksi jakso. Katso myös osoitteessa [7] olevaa kuva-sarjaa.

Netistä löytyi (googlaamalla hakusanalla "nowhere differentiable function") John McCarthyn vuonna 1953 esittämä funktio

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(2^{2^n} x),$$

missä $g(x) = 1 + x$, kun $-2 \leq x \leq 0$ ja $g(x) = 1 - x$, kun $0 < x \leq 2$ ja $g(x+4) = g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Rudinin funktio on tämän muunnelma. Itse asiassa myös van der Waerdenin funktio on muodostettu samantapaisella menetelmällä. Aluksi määritellään jaksollinen "sahanteräsfunktio", jonka kuvaajaa sitten "rypytetään" niin, että lopulta sen jokainen piste on kärkipiste, jossa derivaatta ei ole määriteltä. Tämä prosessi näkyy selvästi sivujen [6] ja [7] kuvasarjoissa. McCarthy pitää

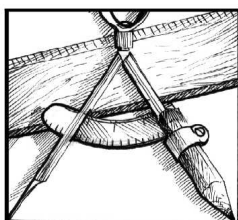
omaa esimerkkiään ja siihen liittyvää todistusta yksinkertaisimpana mahdollisena. Asiasta voi jokainen muodostaa oman käsityksensä nettilähdettä [5] tutkimalla. Tämän kirjoittaja pitää van der Waerdenin esimerkkiä esillä olleista yksinkertaisimpana. Sen ymmärtämiseksi teoksesta [3] ei tarvinnut tehdä töitä kynällä, kun taas Rudinin funktiota oli pyöriteltävä paperilla.

Samoihin aikoihin näiden konkreettisten esimerkkien keksimisen kanssa mietittiin myös kuinka yleisiä tällaiset funktiot ovat jatkuvien funktioiden joukossa. Vuonna 1931 puolalainen matemaatikko Stefan Banach (1892 – 1945) todisti välillä $[0,1]$ jatkuvien funktioiden joukolle tuloksen, jota sen käsitteellisyys takia emme voi muotoilla tähän täsmällisesti, ks. [8], s. 79. Hän todisti, että ne jatkuvat funktiot, joilla on derivaatta vähintään yhdessä välin $[0,1]$ kohdassa, sijaitsevat kaikkien välillä $[0,1]$ jatkuvien funktioiden joukossa samantyyppisesti kuin rationaaliluvut reaalilukujen joukossa. Siis suurin osa jatkuvista funktioista on juuri näitä ei-missään-derivoituvia funktioita, ja varsinaisia harvinaisuuksia ja analyysin kummajaisia ovatkin kaikkialla derivoituvat alkeisfunktiot!

Kiitän dosentti Heikki Apiolaa, dosentti Matti Lehtistä, dosentti Jorma Merikoskea sekä dosentti Timo Tossavaista tämän kirjoituksen viimeistelyä auttaneista kommentista. Heikki Apiolalle erityinen kiitos kuvista sekä tätä kirjoitusta varten laadituista nettisivuista [6] ja [7].

Lähteet

- [1] M. Halmetoja, K. Häkkinen et al.: *Matematiikan taito 13: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi*. WSOY, 2008.
- [2] J. Merikoski, M. Halmetoja, T. Tossavainen: *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan*. WSOY, 2004.
- [3] F. Riesz, B. Sz.-Nagy: *Functional Analysis*. New York, 1990.
- [4] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1987.
- [5] <http://www-formal.stanford.edu/jmc/weierstrass.html>
- [6] <http://math.tkk.fi/~apiola/solmu/08Weierstrass/mapleVanDerW1.html>
- [7] <http://math.tkk.fi/~apiola/solmu/08Weierstrass/Weierstrass.html>
- [8] J. Väisälä: *Topologia II*. Limes, 2005.



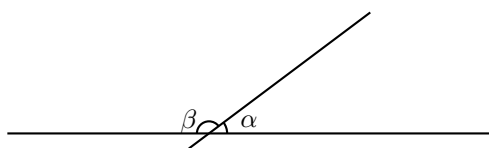
Paralleelipostulaatti

Petteri Harjulehto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Johdanto

Eukleideen eli Eukleides Aleksandrialaisen kirjoittama *Stoikheia* (Alkeet, latinaksi *Elementa*) on ensimmäinen systemaattinen esitys geometriasta. Se julkaistiin noin 300 eaa. Kirjan alussa esitellään viisi postulaattia eli yleisesti hyväksyttävää totuutta (aksiomaa) ja kaikki tulokset pyritään rakentamaan käyttäen näitä totuuksia ja yleisesti hyväksyttyjä päättelysääntöjä. Matematiikassa tällaista kutsutaan aksiomaattiseksi järjestelmäksi. Myöhemmin on osoittautunut, että Eukleideen *Elementa* sisältää useita piilo-oletuksia ja epätarkkuuksia; se voidaan kuitenkin järkevällä tavalla täydentää aksiomaattiseksi järjestelmäksi. En tässä käsittele *Elementan* virheitä ja sen postulaattien täydentämistä, vaan keskityn viidennen postulaatin rooliin. *Elementan* neljä ensimmäistä postulaattia eli aksiomaa ovat intuitiivisesti toden tuntuksia ja ne on helppo hyväksyä lähtökohdaksi. Ennen näiden esittelemistä esittelen käsitteet suorakulma ja yhdensuuntaiset suorat. Ajatellaan, että kaksi suoraa leikkaavat kuten Kuvassa 1. Jos α ja β ovat yhtäsuuria niin ne ovat suorakulmia. Suorat ovat yhdensuuntaisia, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä.



Kuva 1. Suorakulman määritelmä.

Eukleideen neljä ensimmäistä postulaattia:

(P1) *Kaksi pistettä voidaan yhdistää janalla.*

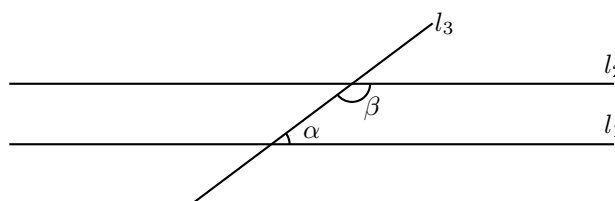
(P2) *Jokainen jana voidaan jatkaa suoraksi.*

(P3) *Jos on annettu kaksi pistettä, voidaan piirtää ympyrä siten, että toinen piste on keskipiste ja ympyrän kehä kulkee toisen pisteen kautta.*

(P4) *Kaikki suorakulmat ovat yhtäsuuria.*

Viides postulaatti nimeltään Paralleelipostulaatti on luonteeltaan erilainen. Se on huomattavasti mutkikkaampi kuin neljä muuta.

(P5) *Olkoort suorat l_1 , l_2 ja l_3 sekä kulmat α ja β kuten Kuvassa 2. Jos α ja β ovat yhteensä pienemmät kuin kaksi suorakulmaa, niin silloin suorat l_1 ja l_2 leikkaavat sillä puolella suoraa l_3 , missä α ja β ovat.*



Kuva 2. Paralleelipostulaatti.

Paralleelipostulaatin luonteesta johtuen (todella) pitkään toivottiin, että se olisi todistettavissa muista postulaateista; useat aikansa huippumatemaatikot yrittivät löytää todistuksen. Kaksituhatvuotinen unelma romahti vasta 1800-luvun puolivälissä hyperbolisen geometrian löytämisen myötä. Todistusyritykset eivät kuitenkaan menneet hukkaan, vaan tuottivat lukuisia Paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitäviä väitteitä. Yhtäpitävyydellä tarkoitan tässä sitä, että käyttäen postulaatteja P1-P4 ja niistä seuraavia lauseita ja olettaen väite saadaan Paralleelipostulaatti todistetuksi ja vastaavasti siitä saadaan todistetuksi väite.

Kaikille aiheesta kiinnostuneille voin suositella Marvin Jay Greenbergin erinomaista kirjaa ”Euclidean and Non-Euclidean Geometries”, josta W. H. Freeman and Company julkaisi neljännen laitoksen tänä vuonna.

Paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitäviä väitteitä

Tässä kappaleessa keskustellaan ehdoista, jotka ovat Paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitäviä. Olen valinnut ensimmäiseksi ehdoksi John Playfairin (1748-1819) version, koska se on yksinkertainen ja yleisesti käytössä.

Ehto 1. Olkoot l suora ja P sen ulkopuolinen piste. Tällöin pisteen P kautta kulkee **korkeintaan yksi** suoran l kanssa yhdensuuntainen suora.

Itse asiassa edellisessä ehdossa voisi olettaa, että tällaisia suoria on **täsmälleen yksi**, sillä vähintään yhden yhdensuuntaisen suoran olemassaolo seuraa postulaateista P1-P4. Myös seuraavat kaksi yhdensuuntaisia suoria koskevaa ehtoa ovat yhtäpitäviä paralleelipostulaatin kanssa.

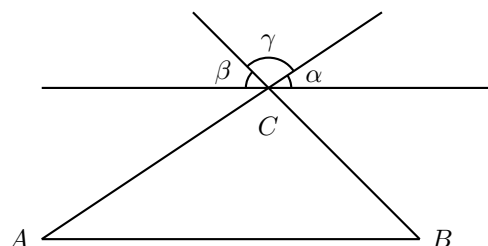
Ehto 2. Olkoot l_1 ja l_2 kaksi yhdensuuntaista suoraa. Jos suora t leikkaa suoraa l_1 , niin se leikkaa myös suoraa l_2 .

Ehto 3. Olkoot l_1 ja l_2 kaksi yhdensuuntaista suoraa. Jos suora t leikkaa suoran l_1 kohtisuoraan, niin se leikkaa myös suoran l_2 kohtisuoraan.

Ehto 4. Olkoot l suora ja P sen ulkopuolinen piste. Tällöin kaikki ne pisteet, jotka ovat yhtä kaukana suorasta l kuin pisteestä P ja ovat samalla puolella suoraa l kuin piste P , muodostavat suoran joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa.

Paralleelipostulaatille voidaan antaa yhtäpitäviä ehtoja puhumatta lainkaan yhdensuuntaisista suorista. Tarkastellaan seuraavaksi kolmiota ABC ja yritetään osoittaa, että sen kulmien summa on kaksi suorakulmaa. Tehdään kuten Kuvassa 3: piirretään pisteen C kautta sivun AB kanssa yhdensuuntainen suora ja jatketaan sivuja AC ja BC . Saamme kolme kulmaa α , β

ja γ , jotka ovat yhteensä kaksi suorakulmaa. Ristikulmana γ on yhtäsuuri kuin kulma ACB . Haluaisimme osoittaa, että α on yhtäsuuri kuin kulma CAB ja β on yhtäsuuri kuin kulma CBA . Tämä on kuitenkin mahdollista vain jos pisteen C kautta kulkee täsmälleen yksi suoran AB kanssa yhdensuuntainen suora. Itse asiassa pätee enemmän: seuraavat väitteet ovat Paralleelipostulaatin kanssa yhtäpitäviä ja siis myös keskenään.



Kuva 3. Kolmion kulmien summa.

Ehto 5. On olemassa kolmio, jonka kulmien summa on kaksi suorakulmaa.

Ehto 6. Kaikille kolmioille pätee, että kulmien summa on kaksi suorakulmaa.

Ehto 7. On olemassa suorakulmio (suunnikas, jossa on neljä suorakulmaa).

Erityisesti pätee siis, että joko kaikille kolmioille kulmien summa on kaksi suorakulmaa tai millään kolmiolla ei ole tätä ominaisuutta. Ehdosta 7 saadaan Ehto 5 piirtämällä suorakaiteelle halkaisija, jolloin meillä on kaksi yhtenevää kolmiota, joille molemmille pätee, että kulmien summa on kaksi suorakulmaa.

Kolmioiden avulla paralleelipostulaatille voidaan antaa yhtäpitäviä ehtoja, jotka ovat hyvin abstrakteja, eivätkä ensilukemalla tunnu liittyvän mitenkään yhdensuuntaisuuteen.

Ehto 8. Jokaista positiivista reaalityyppistä r kohti on olemassa kolmio, jonka pinta-ala on suurempi kuin r .

Ehto 9. Pythagoraan lause pätee suorakulmaisille kolmioille.

Ehto 10. Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma.

Historiallisesti näiden ehtojen löytyminen ulottuu laajalle aikavälille. Varhaisimmat ovat antiikin Kreikasta ja viimeisimmät 1800-luvulta. Merkittäviä geometrian tutkijoita olivat, jo mainitun John Playfairin lisäksi, esimerkiksi Alexis-Claude Clairaut (1713-1765), joka löysi Ehdon 7, sekä Girolamo Saccheri (1667-1733) ja Johann Heinrich Lambert (1728-1777), jotka tutkivat kolmion kulmien summaa.

Hyperbolinen geometria

Hyperbolinen geometria on esimerkki epäeuklidisesta geometriasta, joka jakaa yhteisen perustan euklidisen geometrian kanssa. Se perustuu Eukleideen postulaateihin P1-P4 ja hyperboliseen paralleelipostulaattiin (HPP), joka on looginen negaatio Paralleelipostulaatille. Näin ollen hyperbolisen geometrian löytyminen osoitti, että Paralleelipostulaattia ei voi todistaa postulaateista P1-P4.

(HPP) *On olemassa suora l ja sen ulkopuolinen piste P siten, että pisteen P kautta kulkee **vähintään kaksi** suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa.*

Hyperbolinen paralleelipostulaatti voidaan yleistää koskemaan kaikkia suoria ja pisteitä.

(Yleistetty HPP) *Olkoot l suora ja P sen ulkopuolinen piste. Tällöin pisteen P kautta kulkee **vähintään kaksi** suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa.*

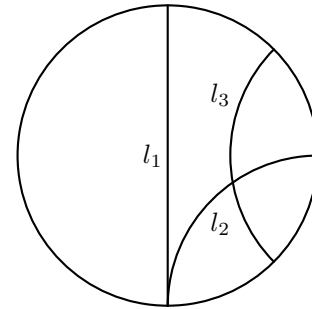
Ensimmäiset hyperbolisesta geometriasta julkaisseet matemaatikot olivat János Bolyai (1802-1860), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ja Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), joka ehti ensimmäiseksi vuonna 1829. Tiedemaailma ei ottanut uutta, ”häpeämätöntä” ja ”julkeaa”, ”imaginaarigeometriaa” lämpimästi vastaan. Myöhemmin on osoittautunut, että hyperbolisella geometrialla on runsaasti sovelluksia niin matematiikan sisällä kuin fysiikassakin.

Havainnollistan Henri Poincarén (1854-1912) mallin avulla hyperbolista geometriaa, jotta näemme minkälaisia ilmiöitä siinä esiintyy. Olkoon $D := \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Tämä avoin origokeskinen yksikkökierokko on nyt meidän ”avaruutemme”. Määritellään d-suorat, joita on kahdenlaisia ja jotka ovat yksikkökierokossa D :

- Kaikki origon kautta kulkevat kiekon D halkaisijat (tai tarkemmin se osa halkaisijasta joka sijaitsee kiekossa D).
- Kiekossa D oleva kaari niistä tason ympyröistä, jotka ovat kohtisuorassa ympyrää $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ vastaan.

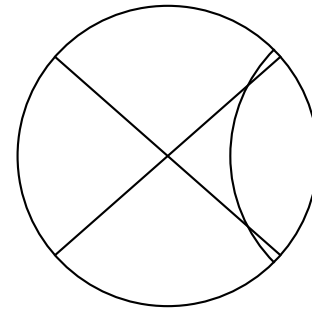
Erityisesti kannattaa huomioida, että jälkimmäistä tyyppiä olevat d-suorat eivät kulje origon kautta. Osoit-

tautuu, että nämä d-suorat toteuttavat postulaatit P1-P4 ja HPP. Kahden d-suoran välinen kulma tulkitaan leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien väliseksi kulmaksi.



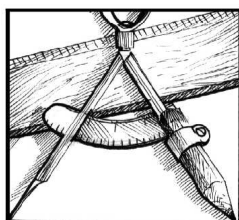
Kuva 4. Poincarén mallin d-suoria.

Kuvassa 4 on kolme d-suoraa, joista näkyy hyperbolisen geometrian erikoispiirteitä. Suorat l_1 ja l_2 ovat yhdensuuntaisia, mutta silti mielivaltaisen lähellä toisiaan (suorien jatkeet leikkaavat kiekon D reunalla, mutta tämä reuna on jo mallin ulkopuolella). Suorat l_2 ja l_3 leikkaavat ja ovat molemmat suoran l_1 kanssa yhdensuuntaisia eli suora l_3 leikkaa vain toisen yhdensuuntaisista suorista l_1 ja l_2 .



Kuva 5. Kolmio Poincarén mallissa.

Kuvassa 5 on kolme d-suoraa, joiden osat muodostavat kolmion. On helppo huomata, vaikkapa piirtämällä d-suorien kolmion päälle tavallisen kolmion, että d-suorien kolmion kulmien summa on aidosti pienempi kuin kaksi suorakulmaa. Lisäksi on selvää, että d-suorien muodostaman kolmion ala ei voi olla suurempi kuin yksikkökierokkon D ala.



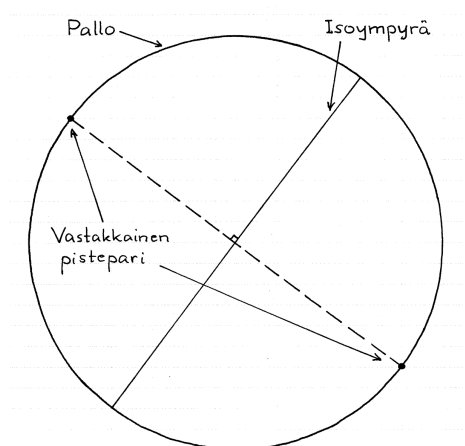
Käyrien välinen dualiteetti (projektiivisessä) tasossa

Georg Metsalo

georg.metsalo@tkk.fi

Tämä kirjoitus on yhteenveto kaksiosaisesta esitelmästä Maunulan yhteiskoulun matematiikkapäivänä 10.11.2007, jonka pidin yhteistyössä Simo Kivelän ja Mika Späran kanssa (katso Solmu 1/2008). Kirjoitus on laadittu yhteistyössä Simo Kivelän kanssa.

Keskeinen idea tässä on, että jokaista vastakkaista pisteparia pallolla vastaa isoympyrä pallolla ja päinvas-toin.



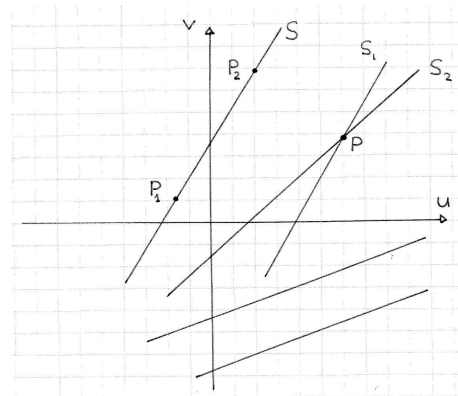
Kun yhdistämme pisteparin suoralla (jolloin se kulkee pallon keskipisteen kautta) ja otamme tason, joka myös kulkee pallon keskipisteen kautta ja on kohtisuora suoraa vastaan, niin taso leikkaa palloa pitkin isoympyrää.

Samalla tavalla saamme isoympyrystä vastakkaisen pisteparin.

Maapallolla esimerkiksi pohjois- ja etelänapaa vastaa päiväntasaaja ja vastaavasti päiväntasaajaa vastaavat navat.

Projektiivinen taso: meno-paluu äärettömyyteen

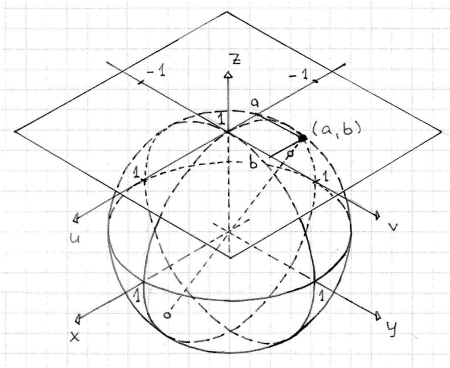
Tason kaksi eri pistettä P_1 ja P_2 määräävät tason suoran S , ja kaksi erisuuntaista suoraa S_1 ja S_2 määräävät pisteen P .



Jos suorat ovat lähes yhdensuuntaiset, on piste hyvin kaukana, joten sanomme, että kaksi yhdensuuntaista

suoraa määrää *äärettömyyspisteen*. Kaksi äärettömyyspistettä määrää puolestaan *äärettömyys-suoran* ja jos lisäämme tasoon äärettömyyspisteet ja äärettömyys-suoran, saamme *projektiivisen tason*.

Projektiivinen taso on helpompi ymmärtää pallon avulla:



Olkoon uv -taso taso $z = 1$ xyz -avaruudessa. Silloin jokainen piste uv -tasossa antaa vastakkaisen pisteparin yksikköpallolla xyz -avaruudessa, nimittäin pisteet, missä xyz -avaruuden origon ja uv -tason pisteen kautta kulkeva suora leikkaa yksikköpallon (keskusprojektio).

Piste (a, b) uv -tasossa antaa pisteet

$$\pm \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \right)$$

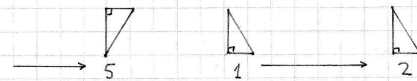
xyz -avaruuden yksikköpallolla. Suora uv -tasossa antaa isoympyrän pallolla, äärettömyyspisteet *projektiivisessa* uv -tasossa antavat vastakkaiset pisteparit pallon päiväntasaajalla (xy -tasossa) ja äärettömyys-suora antaa pallon päiväntasaajan.

Jos ajattelee palloa projektiivisen tason kaksinkertaisena versiona, niin huomaa, että äärettömyyspisteet ja äärettömyys-suora eivät ole sen kummallisempia kuin muutkaan pisteet ja suorat:

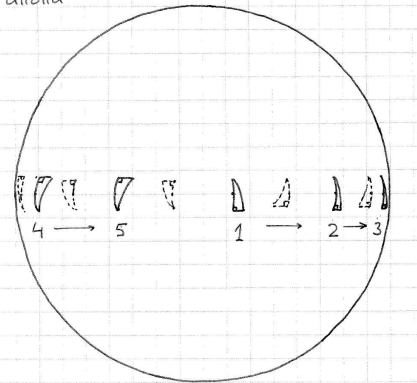
- Vastakkaiset pisteparit päiväntasaajalla ovat kuten kaikki muutkin vastakkaiset pisteparit pallolla, joten pisteet äärettömyydessä projektiivisessä uv -tasossa ovat kuten kaikki muutkin pisteet.
- Päiväntasaaja on samanlainen kuin kaikki muutkin isoympyrät pallolla, joten äärettömyys-suora projektiivisessä uv -tasossa on samanlainen kuin kaikki muutkin suorat.

Projektiivisella tasolla on kuitenkin eräs yllättävä ominaisuus:

Tasossa



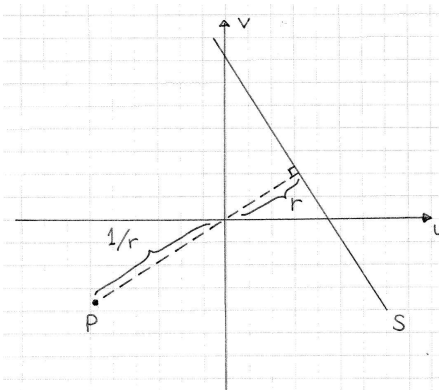
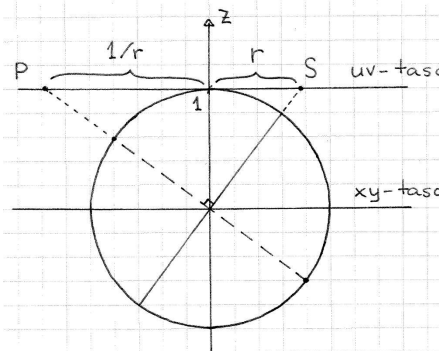
Pallolla



Jos menee äärettömyyteen ja palaa takaisin toiselta puolelta, ovat vasen ja oikea vaihtuneet! Matka äärettömyyden kautta aiheuttaa peilauksen!

Tasokäyrien välinen dualiteetti

Jokaista suoraa S projektiivisessä uv -tasossa vastaa *dualipiste* P projektiivisessä uv -tasossa.



Suora S antaa isoympyrän pallolla, isoympyrää puolestaan vastaa vastakkainen pistepari pallolla (kuten aikaisemmin kuvattiin), ja tämä pistepari pallolla antaa puolestaan suoran *duaalipisteen* P projektiivisessä uv -tasossa.

Jos suoran S (lyhin) etäisyys uv -tason origosta on r , niin sen duaalipisteen P etäisyys origosta on $1/r$ ja P on origon toisella puolella.

Jos suora kulkee uv -tason origon kautta, sen duaalipiste on jokin äärettömyyspiste ja jos suora on äärettömyys-suora, sen duaalipiste on uv -tason origo.

Lukijan todistettavaksi jää seuraava:

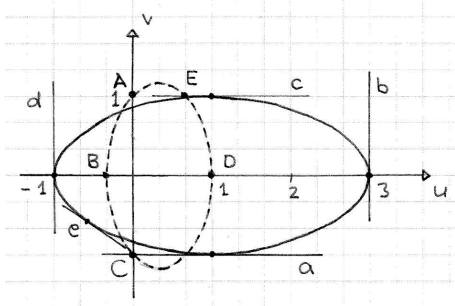
Propositio: Suoran $au + bv + 1 = 0$ duaalipiste on uv -tason piste (a, b) .

uv -tason käyrän voi esittää muodossa $v = h(u)$ (funktion h kuvaaja). Yleisempi tapa esittää käyrä on *parametrisoitu käyrä* $(u, v) = (f(t), g(t))$, missä f ja g ovat funktioita. Jos ajattelemme, että meillä on piste, joka liikkuu uv -tasossa, niin sen u -koordinaatti on ajan funktio: $u = f(t)$. Samalla tavalla myös sen v -koordinaatti on ajan funktio: $v = g(t)$. Tässä olemme kuitenkin kiinnostuneita itse käyrästä geometrisena objektina.

Funktion h kuvaajan voi esittää myös parametrisoituna käyränä $(u, v) = (t, h(t))$, joten parametrisoidut käyrät ovat yleisemmät kuin funktioitten kuvaajat. Voimme myös ajatella, että parametrisoitu käyrä on projektiivisessä uv -tasossa. Silloin sitä vastaa kaksi vastakkaista käyrää yksikköpallolla xyz -avaruudessa (keskusprojektion avulla).

Jos nyt otamme parametrisoidun käyrän projektiivisessä uv -tasossa ja piirrämme *tangenttisuoran* käyrän jokaiseen pisteeseen, on jokaisella tangenttisuoralla oma duaalipisteensä. Nämä duaalipisteet muodostavat projektiivisessä uv -tasossa uuden käyrän, jota voimme (väliaikaisesti) sanoa alkuperäisen käyrän *kaverikäyrräksi*.

Esimerkki 1:



Ellipsin $\frac{(u-1)^2}{2^2} + \frac{v^2}{1^2} = 1$ voi antaa parametrisoituna käyränä muodossa $(u, v) = (1 + 2 \cos t, \sin t)$. Sillä on

mm. tangenttisuorat a, b, c, d ja e ja niitä vastaavat duaalipisteet ovat A, B, C, D ja E . Kaikkien tangenttisuorien duaalipisteet muodostavat ellipsin kaverikäyrän, joka näyttää olevan toinen, pienempi ellipsi. Sillä puolestaan on oma kaverikäyrä, jolla taas on oma kaverikäyrä jne.

Näemme, että jos käyrä on symmetrinen origon kautta kulkevan suoran suhteen, myös kaverikäyrä on symmetrinen saman suoran suhteen.

Jotta saisimme käyrän tangenttisuoran (ja siitä suoran duaalipisteen), tarvitsemme *derivaatan*.

Pisteessä $(u_0, v_0) = (f(t_0), g(t_0))$ on käyrän kulmakerroin $g'(t_0)/f'(t_0)$, joten tähän pisteeseen asetetun tangenttisuoran yhtälö on

$$v - g(t_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} \cdot (u - f(t_0)) \quad \text{eli}$$

$$g'(t_0) \cdot u - f'(t_0) \cdot v - f(t_0) \cdot g'(t_0) + f'(t_0) \cdot g(t_0) = 0 \quad \text{eli}$$

$$\frac{g'(t_0)}{f'(t_0) \cdot g(t_0) - f(t_0) \cdot g'(t_0)} \cdot u + \frac{-f'(t_0)}{f'(t_0) \cdot g(t_0) - f(t_0) \cdot g'(t_0)} \cdot v + 1 = 0$$

Tämän (tangentti-)suoran duaalipiste on silloin proposition mukaan

$$\left(\frac{g'(t_0)}{f'(t_0) \cdot g(t_0) - f(t_0) \cdot g'(t_0)}, \frac{-f'(t_0)}{f'(t_0) \cdot g(t_0) - f(t_0) \cdot g'(t_0)} \right).$$

Kun t_0 muuttuu, liikumme pitkin käyrää, jolloin tangenttisuora muuttuu ja myös sen duaalipiste muuttuu.

Jos $(f_1(t), g_1(t))$ on alkuperäinen käyrä, on kaverikäyrän parametriesitys

$$(f_2(t), g_2(t)) = \left(\frac{g'_1(t)}{f'_1(t) \cdot g_1(t) - f_1(t) \cdot g'_1(t)}, \frac{-f'_1(t)}{f'_1(t) \cdot g_1(t) - f_1(t) \cdot g'_1(t)} \right) (*)$$

Lukijan todistettavaksi (käyttämällä tunnettuja derivoimissääntöjä) jää seuraava keskeinen tulos:

Lause: Kaverikäyrän kaverikäyrä on alkuperäinen käyrä, ts.

$$\left(\frac{g'_2(t)}{f'_2(t) \cdot g_2(t) - f_2(t) \cdot g'_2(t)}, \frac{-f'_2(t)}{f'_2(t) \cdot g_2(t) - f_2(t) \cdot g'_2(t)} \right) = (f_1(t), g_1(t))$$

Käyrä ja sen kaverikäyrä muodostavat siis *tasavertaisen parin*! Sanomme siksi kaverikäyrää alkuperäisen käyrän *duaalikäyrräksi* (ja lauseen perusteella alkuperäinen käyrä on puolestaan duaalikäyränsä duaalikäyrä).

(Todistuksessa kertoimet $f'_1 \cdot g_1 - f_1 \cdot g'_1$ ja $f'_1 \cdot g''_1 - f''_1 \cdot g'_1$ supistuvat pois. Projektiiivisessä tasossa nolla nimittäjässä ei yleensä aiheuta ongelmia. Jos $f'_1 \cdot g_1 = f_1 \cdot g'_1$, niin alkuperäisen käyrän tangenttisuora kulkee origon kautta, jolloin duaalikäyrä menee äärettömyyteen. Jos $f'_1 \cdot g''_1 = f''_1 \cdot g'_1$, on alkuperäisellä käyrällä kaarevuus $= 0$ (mahdollinen *käännepiste*) ja duaalikäyrällä mahdollisesti *kärkipiste*.)

Duaalikäyrän parametriesityksestä (*) näemme, että käyrän skaalaus skaalaa myös duaalikäyrän:

$$(f_1, g_1) \rightarrow (a \cdot f_1, g_1) \Rightarrow (f_2, g_2) \rightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot f_2, g_2\right).$$

Vastaavasti jos skaalaus on v -suuntainen:

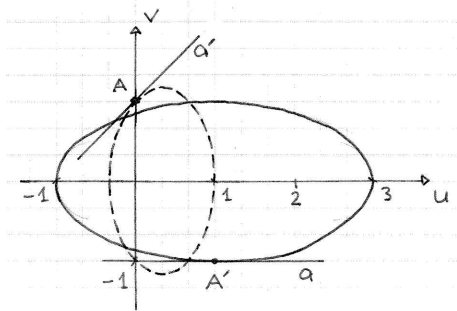
$$(f_1, g_1) \rightarrow (f_1, a \cdot g_1) \Rightarrow (f_2, g_2) \rightarrow \left(f_2, \frac{1}{a} \cdot g_2\right).$$

Sama pätee, jos skaalaus tapahtuu mielivaltaiseen suuntaan. Pätee myös että

$$(f_1, g_1) \rightarrow (a \cdot f_1, a \cdot g_1) \Rightarrow (f_2, g_2) \rightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot f_2, \frac{1}{a} \cdot g_2\right).$$

Nyt voimme laskea eri käyrien duaalikäyriä:

Jatkoa esimerkkiin 1:

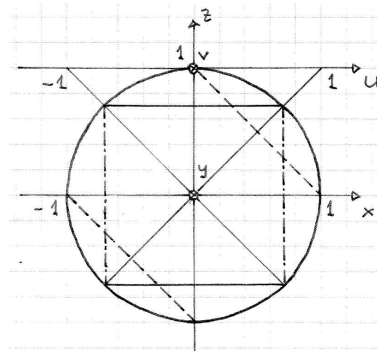
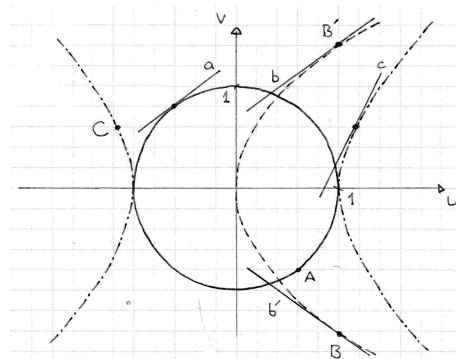


$$\begin{aligned} (f_1, g_1) &= (1 + 2 \cos t, \sin t) \\ \Rightarrow (f_2, g_2) &= \left(-\frac{\cos t}{2 + \cos t}, -\frac{2 \sin t}{2 + \cos t} \right), \end{aligned}$$

joten duaalikäyrä on ellipsi $\frac{(u - 1/3)^2}{(2/3)^2} + \frac{v^2}{(2/\sqrt{3})^2} = 1$.

Alkuperäisen ellipsin tangenttisuora a antaa pisteen A duaalikäyrällä ja duaalikäyrän tangenttisuora a' antaa puolestaan pisteen A' alkuperäisellä ellipsillä.

Esimerkki 2: Yksikköympyrä $u^2 + v^2 = 1$ (parametrimuodossa esim. $(u, v) = (\cos t, \sin t)$), paraabeli $u = v^2/2$ (esim. $(u, v) = (t^2/2, t)$) ja hyperbeli $u^2 - v^2 = 1$ (esim. $(u, v) = (\frac{1}{\cos t}, \tan t)$) ovat *itsensä* duaalikäyriä.

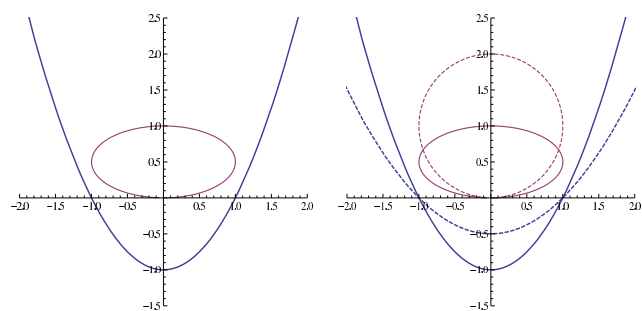


Ympyrän tangenttisuoran a duaalipiste on (vastakkainen) piste A . Paraabelin tangenttisuoran b duaalipiste on B ja tangenttisuoran b' duaalipiste on B' . Hyperbelin tangenttisuoran c duaalipiste on C .

Pallolla näkee, että nämä kolme käyrää ovat lähekkäistä sukua: jokainen vastaa (keskusprojektion kautta) kahta vastakkaisista $\frac{\pi}{4}$ -säteistä ympyrää yksikköpallolla, ja nämä kolme käyrää (projektiiivisessä) uv -tasossa saadaan pyörittämällä yksikköpalloa xyz -avaruudessa y -akselin ympäri.

Jos pyöritämme yksikköpalloa xyz -avaruudessa, niin vastakkainen käyräpari ja sen (myös vastakkainen) duaalikäyräpari pyörivät. Vastaavat käyrät projektiiivisessä uv -tasossa (käyrä ja sen duaalikäyrä) muuttuvat vastaavasti, mutta pysyvät toistensa duaalikäyrinä (katso esimerkki 6' alhaalla).

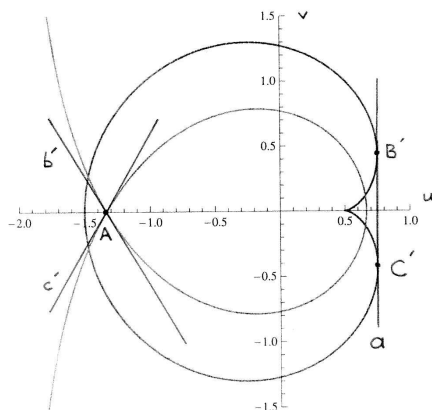
Esimerkki 3: Paraabeli $v = u^2 - 1$ ja ellipsi $u^2 + (2v - 1)^2 = 1$ ovat toistensa duaalikäyriä. $(f_1(t), g_1(t)) = (t, t^2 - 1) \Rightarrow f'_1 \cdot g_1 - f_1 \cdot g'_1 = -(t^2 + 1) \Rightarrow (f_2(t), g_2(t)) = \left(\frac{-2t}{t^2 + 1}, \frac{1}{t^2 + 1} \right) \Rightarrow (f_2)^2 + (2g_2 - 1)^2 = 1$



Esimerkki 3' (vertikaalinen skaalaus): Paraabeli $v = (u^2 - 1)/2$ ja ympyrä $u^2 + (v - 1)^2 = 1$ ovat toistensa duaalikäyriä.

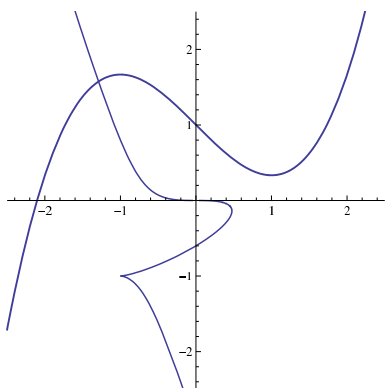
Esimerkki 4: $v = \frac{2u^3}{3\sqrt{3}}$ ja $v = -\frac{2u^3}{3\sqrt{3}}$ ovat toistensa duaalikäyriä.

Esimerkki 5: Kardioidi $(f_1(t), g_1(t)) = (\cos t - \cos(2t)/2, \sin t - \sin(2t)/2)$ syntyy, kun $\frac{1}{2}$ -säteinen ympyrä kierii ympyrällä $u^2 + v^2 = (1/2)^2$ uv -tasossa. Sen duaalikäyrä on *silmukka*.



Kardioidin tangenttisuora a on kaksinkertainen tangentti ja sen duaalipiste on silmukan leikkauspiste A . Silmukan tangenttisuorien b' ja c' duaalipisteet ovat kardioidin pisteet B' ja C' .

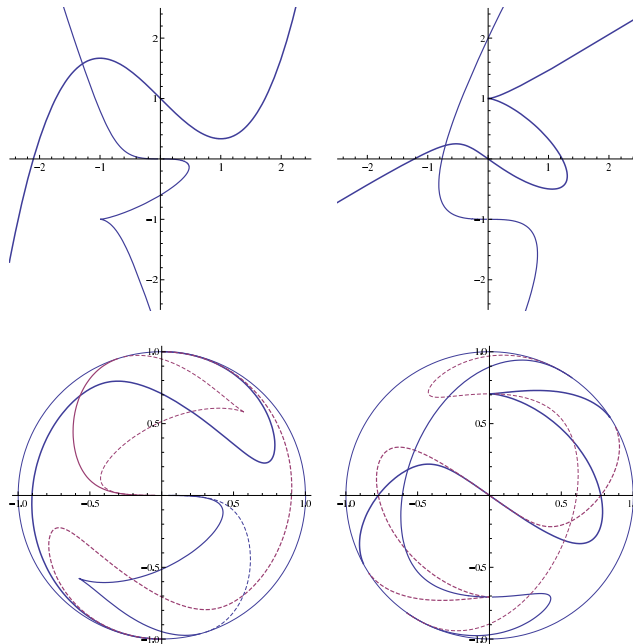
Esimerkki 6: $v = h(u) = u^3/3 - u + 1$



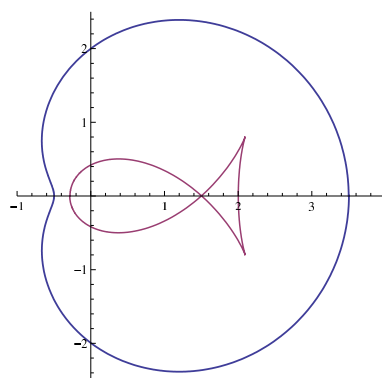
Käyrällä on yksi käännepiste ja duaalikäyrällä on kärkipiste. Käyrällä on tangentti, joka kulkee origon kautta ja duaalikäyrä menee äärettömyyteen. Duaalikäyrälläkin on tangentti, joka kulkee origon kautta ja alkuperäinen käyrä menee myös äärettömyyteen (mutta toiseen äärettömyyspisteeseen). Origon on duaalikäyrän käännepiste ja alkuperäisellä käyrällä on kärkipiste äärettömydessä.

Esimerkki 6' (yksikköpallon pyöritys): Kun otamme käyrän ja sen duaalikäyrän, projisoimme ne yksikköpalloille, pyöritämme palloa 45° astetta x -akselin ympäri

ja projisoimme takaisin uv -tasolle, saamme kaksi uutta käyrää, jotka myös ovat toistensa duaalikäyriä. Alkuperäisen käyrän kärkipiste on nyt pisteessä $(u, v) = (0, 1)$ ja alkuperäisen duaalikäyrän kärkipiste on nyt äärettömyydessä.



Esimerkki 7: Pascalin simpukan $(f_1(t), g_1(t)) = ((2 + \frac{3}{2} \cos t) \cos t, (2 + \frac{3}{2} \cos t) \sin t)$ (napakoordinaateissa $r(\theta) = 2 + \frac{3}{2} \cos \theta$) duaalikäyrä on kalanmuotoinen. Simpukalla on kaksinkertainen tangenttisuora ja sen duaalipisteessä kala leikkaa itsensä. Simpukalla on kaksi käännepistettä ja kalalla on kaksi kärkipistettä.



Lisäys

Vastaavanlainen dualiteetti esiintyy myös pinnoilla (projektiivisessä) kolmiulotteisessa avaruudessa ja ilmeisesti myös $(n - 1)$ -ulotteisilla n.s. *hyperpinnoilla* projektiivisessä n -ulotteisessa avaruudessa, mutta niiden käsittelyyn tarvitaan *osittaisderivaattoja* ja *Jacobin determinantteja*, jotka eivät kuulu lukion matemaatiikkaan. Annan kuitenkin yhden esimerkin duaalipinnoista (projektiivisessä) kolmiulotteisessa avaruudessa.

Idea on samankaltainen kuin tasossa: pinnalla on jokaisessa pisteessä *tangenttitaso* ja jokaisella tangenttitasolla on *duaalipiste*: jos tason (lyhyin) etäisyys origosta on r , on duaalipiste origon toisella puolella etäisyydellä $1/r$ (ja jos tangenttitaso kulkee origon kautta, on sen duaalipiste äärettömyydessä). Nämä duaalipisteet muodostavat uuden pinnan, jonka voimme sanoa alkuperäisen pinnan *kaveripinnaksi*. Mutta **kaveripinnan kaveripinta on alkuperäinen pinta**, joten meillä on tasa-arvoinen pintojen pari ja voimme puhua *duaalipinnoista*.

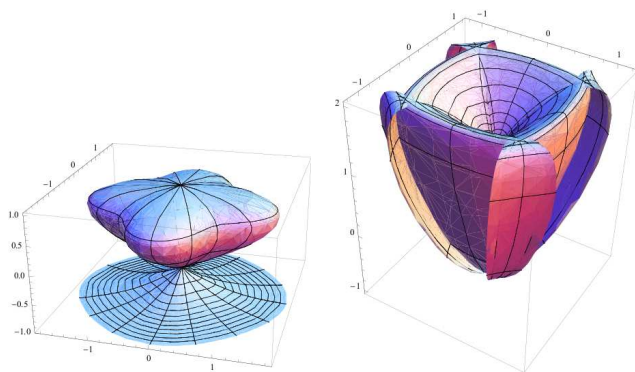
Olkoon $(u, v, w) = (f_1(s, t), g_1(s, t), h_1(s, t))$ parametrisoitu pinta. Sen duaalipinnan parametriesitys on silloin

$$(f_2(s, t), g_2(s, t), h_2(s, t)) = - \frac{\left(\frac{\partial(g_1, h_1)}{\partial(s, t)}, \frac{\partial(h_1, f_1)}{\partial(s, t)}, \frac{\partial(f_1, g_1)}{\partial(s, t)} \right)}{f_1 \cdot \frac{\partial(g_1, h_1)}{\partial(s, t)} + g_1 \cdot \frac{\partial(h_1, f_1)}{\partial(s, t)} + h_1 \cdot \frac{\partial(f_1, g_1)}{\partial(s, t)}}.$$

Esimerkki 8: Oheisessa kuvassa vasemmalla olevan pinnan parametriesitys on

$$(u, v, w) = \left(r \cos t, r \sin t, \frac{1 - s^2}{1 + s^2} \right),$$

missä $r = \left(\frac{s}{8} - \frac{2s}{(1+s^2)^2} \right) (2 + e^{-s/3} \cos^2(2t))$, ja oikealla on sen duaalipinta.



Piste $(u, v, w) = (0, 0, 1)$ on tavallaan pinnan pohjoisnapa ja siellä sen tangenttitaso on taso $w = 1$. Sitä vastaa duaalipiste $(0, 0, -1)$, joka on duaalipinnan etelänapa. Taso $w = -1$ on pinnan tangenttitaso äärettömyydessä ja sitä vastaa duaalipiste $(0, 0, 1)$ duaalipinnalla (jossa tangenttitasot puolestaan kulkevat origon kautta). Pinnalla on tangenttitasoja, jotka sivuavat pintaa kahdessa pisteessä ja duaalipinta leikkaa itsensä (kuten Pascalin simpukka ja kala esimerkissä 7 ylhäällä). Taso $w = 2$ sivuaa duaalipintaa pitkin käyrää ja tämän tangenttitason duaalipiste on kartiomainen piste $(0, 0, -1/2)$ alkuperäisellä pinnalla.

Keskeinen idea tässä on *dualiteetti*: saamme alkuperäisen pinnan duaalipinnan monimutkaisen prosessin avulla, ja jos sovellamme *samaa* monimutkaista prosessia duaalipinnalle, saamme alkuperäisen pinnan takaisin!

Tehtäviä:

Mitä voimme sanoa duaalikäyrästä (kaverikäyrästä), jos alkuperäinen käyrä

- kulkee origon kautta?
- menee äärettömyyteen?
- leikkaa itsensä?
- on symmetrinen x -akselin suhteen?
- on symmetrinen jonkin suoran suhteen?
- pysyy samannäköisenä, jos se kierretään 180° origon ympäri?
- pysyy samannäköisenä, jos se kierretään 120° origon ympäri?

Mitä voimme sanoa alkuperäisestä käyrästä, jos duaalikäyrällä on

- kärkipiste?
- käännepiste?
- origon kautta kulkeva tangenttisuora?

Oikein vai väärin?

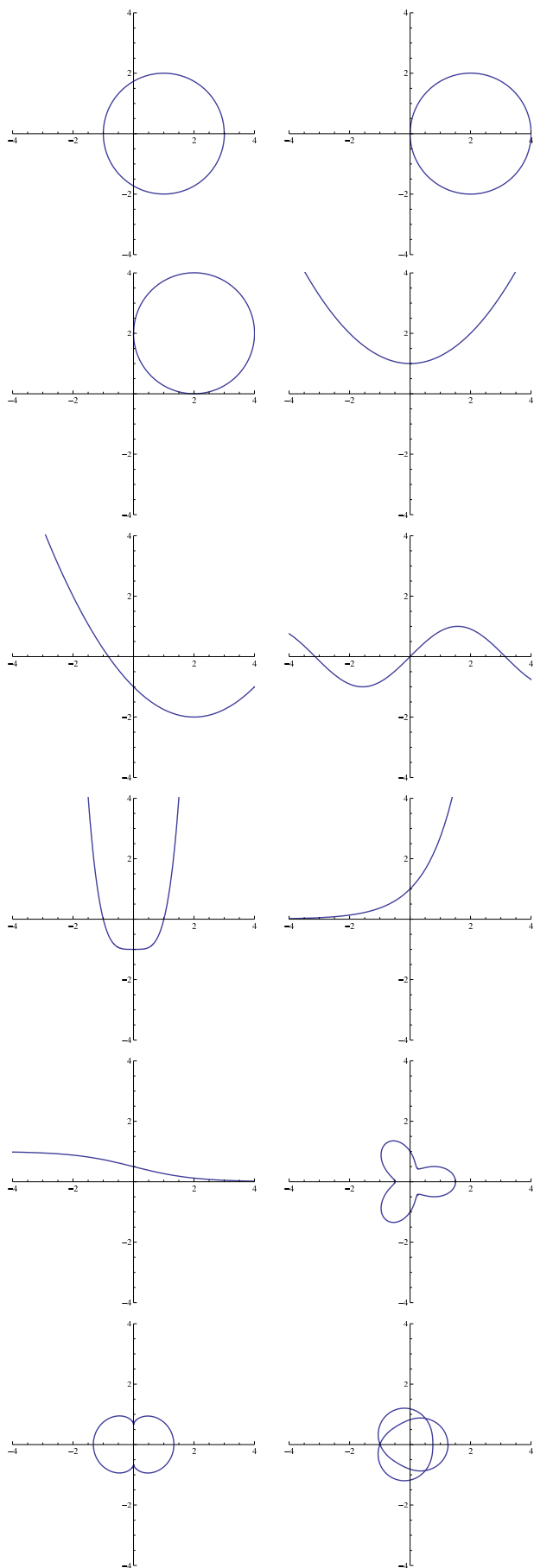
- Jos alkuperäinen käyrä on yksikköympyrän sisällä, niin duaalikäyrä on sen ulkopuolella.
- Jos duaalikäyrä on yksikköympyrän sisällä, niin alkuperäinen käyrä on sen ulkopuolella.
- Jos alkuperäinen käyrä on yksikköympyrän ulkopuolella, niin duaalikäyrä on sen sisällä.
- Jos alkuperäinen käyrä on symmetrinen jonkun suoran suhteen, niin duaalikäyrä on symmetrinen suoran duaalipisteen suhteen.

Yhdistä alhaalla olevat käyrät pareittain. (Yhdellä annetulla alkuperäisellä käyrällä ei ole vastaavaa duaalikäyrää annettujen duaalikäyrien joukossa ja yhdellä annetulla duaalikäyrällä ei ole vastaavaa alkuperäistä käyrää annettujen alkuperäisten käyrien joukossa.) Tarkista vaikkapa Mathematican avulla.

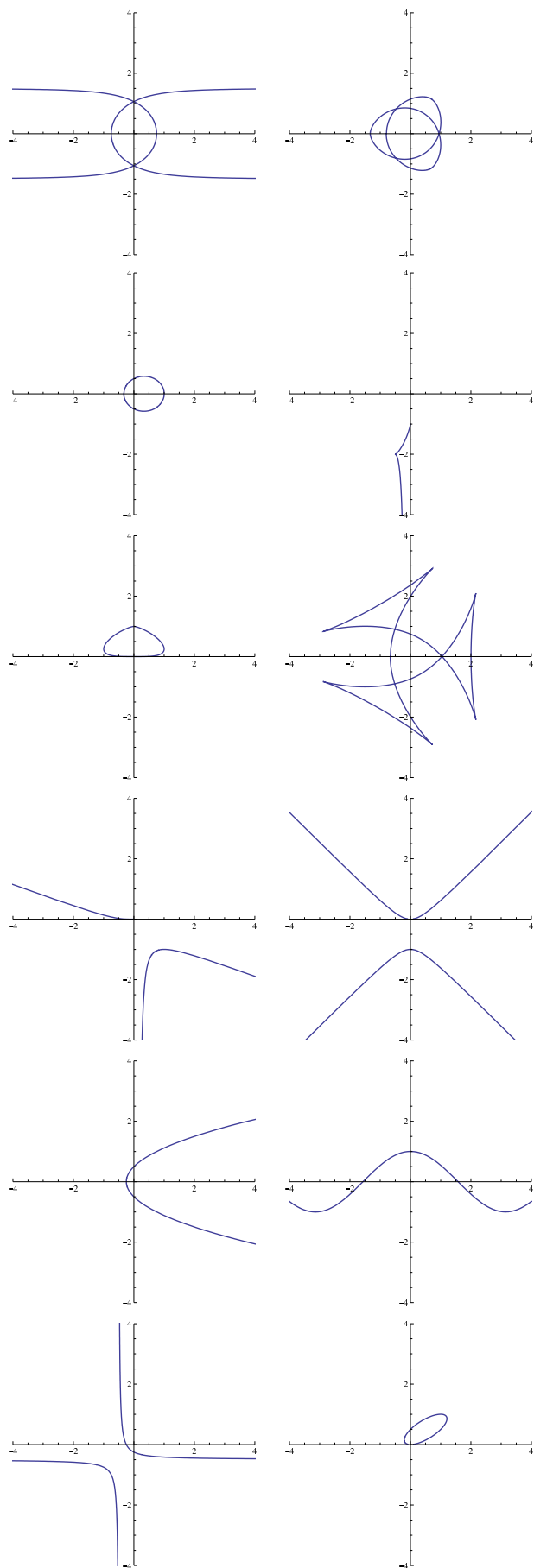
Alkuperäiset käyrät:

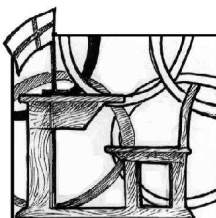
- Ympyrä
- Ympyrä
- Ympyrä
- Paraabeli $v = 1 + u^2/4$ (eli $u = f(t) = t, v = g(t) = 1 + t^2/4$)
- Paraabeli $v = \frac{1}{4}(u - 2)^2 - 2$
- $v = \sin u$
- $v = u^4 - 1$
- $v = \exp(u) = e^u$
- $v = 1/(1 + e^u)$
- Kolmiapila $u = f(t) = (1 + \cos(3t)/2) \cos t, v = g(t) = (1 + \cos(3t)/2) \sin t$ (Napakoordinaateissa: $r = 1 + \cos(3\theta)/2$)
- Nefroidi $u = f(t) = \sin t - \sin(3t)/3, v = g(t) = \cos t - \cos(3t)/3$ (Kahvikupin käyrä)
- Kolmiapilasolmun projektio $u = f(t) = (1 + \frac{1}{4} \cos(3t/2)) \cos t, v = g(t) = (1 + \frac{1}{4} \cos(3t/2)) \sin t$ (Napakoordinaateissa: $r = (1 + \frac{1}{4} \cos(3\theta/2))$)

Alkuperäiset käyrät:



Duaalikäyrät:





Mongolian opettajakilpailun tehtävien ratkaisut

Matti Lehtinen

Maanpuolustuskorkeakoulu

Janne Junnila

Uudenkaupungin lukio

Solmussa 3/2007 esitettiin leikkimielinen ajatus matematiikkakilpailusta opettajille. Kirjoituksen yhteydessä julkaistiin Mongoliassa vuosittain pidettävien opettajien matematiikkakilpailun vuoden 2007 tehtävät. Kirjoittaja ehdotti, että Solmun lukijat lähettäisivät omia ratkaisujaan Solmun toimitukselle.

Maaliskuuhun 2008 mennessä ratkaisuja on tullut vain tämän kirjoituksen toiselta kirjoittajalta. Oheisista ratkaisuista tehtävien 3, 4 ja 6 ratkaisut ovat Janne Junnilan, muut Matti Lehtisen. Tehtävissä 3 ja 6 tarvitaan jonkin verran alkeita pitemmälle menevää lukuteoriaa. Joko Mongolian opettajien oletetaan hallitsevan lukuteoriaa suomalaisia kollegojaan enemmän tai sitten emme ole keksineet yksinkertaisempia ratkaisuja. Niitä otetaan edelleen mieluusti vastaan. Tässä ratkaisuehdotuksemme.

1. Kuinka monen joukon $\{1, 2, 3, \dots, 5n\}$ osajoukon alkioiden summa on jaollinen viidellä?

Ratkaisu. Olkoon a_n kysytty lukumäärä. Olkoot b_n , c_n , d_n ja e_n vastaavasti niiden joukon $\{1, 2, 3, \dots, 5n\}$ osajoukkojen lukumäärät, joiden alkioiden summa mod 5 on 1, 2, 3 ja 4. Katsomme, että tyhjän joukon alkioiden summa on 0. Luettelemalla osajoukot nähdään heti, että $a_1 = 8$ ja $b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = 6$. Osoitetaan,

että

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5}(2^{5n} + 2^{n+2}), \\ b_n &= \dots = e_n = \frac{1}{5}(2^{5n} - 2^n). \end{aligned} \quad (1)$$

Selvästi (1) on oikein, kun $n = 1$. Oletetaan, että kaava on oikea, kun $n = k$. Joukon $\{1, 2, 3, \dots, 5(k+1)\}$ jokainen osajoukko A voidaan jakaa osajoukoiksi $A_1 = A \cap \{1, 2, 3, \dots, 5k\}$ ja $A_2 = A \cap \{5k+1, \dots, 5(k+1)\}$. A :n alkioiden summa on jaollinen 5:llä jos ja vain jos joko A_1 :n alkioiden summa on $\equiv p \pmod{5}$, A_2 :n alkioiden summa on $\equiv (5-p) \pmod{5}$, $p = 0, 1, \dots, 4$. Näin ollen osajoukkoja, joiden alkioiden summa on jaollinen 5:llä, on

$$\begin{aligned} &8a_k + 6b_k + 6c_k + 6d_k + 6e_k \\ &= \frac{8}{5}(2^{5k} + 2^{k+2}) + \frac{24}{5}(2^{5k} - 2^k) \\ &= \frac{1}{5}(32 \cdot 25k + 8 \cdot 2^k) = \frac{1}{5}(2^{5(k+1)} + 2^{(k+1)+2}). \end{aligned}$$

Osajoukot, joiden alkioiden summa on $\equiv 1 \pmod{5}$, ovat ne ja vain ne, joille (mod 5) A_1 :n alkioiden summa on 1 ja A_2 :n 0, tai A_1 :n alkioiden summa 0 ja A_2 :n 1, A_1 :n alkiosumma 4 ja A_2 :n 2, A_1 :n 3 ja A_2 :n 3 tai

A_1 :n 2 ja A_2 :n 4. Siis

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 8b_1 + 6a_k + 6d_k + 6c_k + 6e_k \\ &= \frac{6}{5}(2^{5k} + 2^{k+2}) + \frac{26}{5}(2^{5k} - 2^k) \\ &= \frac{1}{5}(32 \cdot 2^{5k} - 2 \cdot 2^k) = \frac{1}{5}(2^{5(k+1)} - 2^{k+1}). \end{aligned}$$

c_{k+1} , d_{k+1} ja e_{k+1} lasketaan aivan samoin. Induktioas-
kel on otettu. Tehtävän ratkaisu on siis

$$a_n = \frac{1}{5}(2^{5n} + 2^{n+2}).$$

(n :n arvoja 1, 2, ..., 6 vastaavat a_n :n arvot ovat 8, 208, 6560, 209728, 6710912 ja 214748416.)

2. On annettu 101 saman suoran janaa. Todista, että janojen joukossa on 11 sellaista, joilla on yhteinen piste tai 11 sellaista, joista millään kahdella ei ole yhteisiä pisteitä.

Ratkaisu. Voimme olettaa, että suora on x -akseli ja että janat ovat välejä $[x_i, y_i]$, $i = 1, \dots, 101$. Voimme vielä olettaa, että $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{101}$. Oletetaan vielä, että millään 11:llä janalla ei ole yhteistä pistettä. Silloin on oltava $y_{n_1} = \min\{y_i | 1 \leq i \leq 10\} < x_{11}$, $y_{n_2} = \min\{y_i | 11 \leq i \leq 20\} < x_{21}$, ..., $y_{n_{10}} = \min\{y_i | 91 \leq i \leq 100\} < x_{101}$. Koska $x_{11} \leq x_{n_2}, \dots, x_{91} \leq x_{n_{10}}$, väleillä $[x_{n_1}, y_{n_1}]$, $[x_{n_2}, y_{n_2}]$, ..., $[x_{n_{10}}, y_{n_{10}}]$ ja $[x_{101}, y_{101}]$ ei ole yhtään yhteistä pistettä.

3. Olkoon p pariton alkuluku. Olkoon g primitiivijuuri mod p . Määritä kaikki sellaiset p :n arvot, joille joukkojen $A = \{k^2 + 1 \mid 1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}\}$ ja $B = \{g^m \mid 1 \leq m \leq \frac{p-1}{2}\}$ alkioit ovat samat mod p .

Ratkaisu. Jos $p = 3$, niin $A = \{2\}$ ja $B = \{2\}$. 3 on tehtävän ratkaisu. Jos $p = 5$, voidaan valita $g = 2$; silloin $A = \{2, 0\}$ ja $B = \{2, 4\}$, joten 5 ei ole tehtävän ratkaisu. Olkoon sitten $p \geq 7$ alkuluku. Primitiivijuuren g ominaisuuksiin kuuluu, että g virittää multiplikatiivisen ryhmän $\mathbb{Z}_p^*$, jonka alkioit ovat kongruenssiluokat $1, 2, \dots, p-1 \pmod{p}$. Koska $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \equiv 0 \pmod{p}$ vain, jos $x \equiv \pm y \pmod{p}$, ovat joukon $\mathbb{Z}_p^*$ neliöluvut $1^2, 2^2, \dots, (\frac{p-1}{2})^2$. Toisaalta $\mathbb{Z}_p^* = \{g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$. Tästä seuraa

$$\{g^2, g^4, \dots, g^{p-1}\} = \{1, 4, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\}.$$

Jos nyt $A = B$, niin A :n ja B :n alkioiden neliöiden summat ovat samat (mod p), eli

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^{2i} + 1)^2 \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^i)^2.$$

Tämä yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^{4i} + g^{2i} + 1) \equiv 0$$

kanssa. Koska $p > 5$, $g^4 - 1 \not\equiv 0$ ja siis $g^2 - 1 \not\equiv 0$. Geometrisen sarjan summakaavan mukaan voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^4)^i &\equiv \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} (g^4)^i - 1 \equiv \frac{(g^4)^{\frac{p+1}{2}} - 1}{g^4 - 1} - 1 \\ &\equiv \frac{(g^{(p-1)+2})^2 - 1}{g^4 - 1} - 1 \equiv 0, \end{aligned}$$

koska $g^{p-1} \equiv 1$. Samoin lasketaan

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^2)^i \equiv 0.$$

Siis

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^{4i} + g^{2i} + 1) \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 1 \equiv \frac{p-1}{2} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Saatu ristiriita osoittaa, että $A \neq B$, kun $p \geq 7$. Siis $p = 3$ on tehtävän ainoa ratkaisu.

4. Todista: jos x , y ja z ovat luonnollisia lukuja ja $xy = z^2 + 1$, niin on olemassa kokonaisluvut a , b , c ja d niin, että $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ ja $z = ac + bd$.

Ratkaisu. Sanomme, että ei-negatiivisten kokonaislukujen kolmikko (x, y, z) toteuttaa ehdon (1), jos $xy = z^2 + 1$, ja ehdon (2), jos on olemassa kokonaisluvut a , b , c ja d niin, että $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ ja $z = ac + bd$. Oletetaan varmuuden vuoksi, että 0 on myös luonnollinen luku. [Vaikka tämä vallitseva käytäntö sotii luonnollisen luvun perusideaan vastaan.] Jos $(x, y, 0)$ toteuttaa ehdon (1), on oltava $x = y = 1$. Nyt voidaan valita $a = d = 1$, $b = c = 0$. Kolmikko toteuttaa siis ehdon (2). Oletetaan sitten, että (x, y, z) , missä $z \geq 1$, toteuttaa ehdon (1). Silloin $x, y \neq 0$. Voidaan olettaa, että $x \leq y$. Jos olisi $x > z$, olisi $xy \geq (z+1)^2 > z^2 + 1$. Siis on oltava $0 < x \leq z$. Jos on $x = z$, on $xy = x^2 + 1$ eli $x(y-x) = 1$. Siis $x = y - x = 1$ eli $x = 1$, $y = 2$. Voidaan valita $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 1$. Kolmikko $(1, 2, 1)$ toteuttaa ehdon (2). Voidaan olettaa, että $x < z$. Silloin ei voi olla $y \leq z$. Siis $y > x$. Nyt $2z = 2\sqrt{xy-1} < 2\sqrt{xy} < x + y$. Siis $x + y - 2z > 0$. Lisäksi $(x+y-2z)x = x^2 + xy - 2zx = x^2 + z^2 + 1 - 2zx = (z-x)^2 + 1$. Jos siis kolmikko (x, y, z) , missä $0 < x < z$, toteuttaa ehdon (1), niin $(x, x+y-2z, z-x)$ toteuttaa ehdon (1). Oletetaan sitten, että $(x, x+y-2z, z-x)$ toteuttaa ehdon (1). Siis $x = a^2 + b^2$, $x+y-2z = c^2 + d^2$ ja $z-x = ac + bd$. Nyt $y = c^2 + d^2 + 2(z-x) + x = c^2 + d^2 + 2ac + 2bd + a^2 + b^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2$ ja $z = z-x+x = ac+bd+a^2+b^2 = a(a+c)+b(b+d)$. Siitä, että $(x, x+y-2z, z-x)$ toteuttaa ehdon (2), seuraa siis, että (x, y, z) toteuttaa ehdon (2). On saatu perusteet "äärettömälle laskeutumiselle": jos (x, y, z) toteuttaa ehdon (1) ja $z \geq 2$, löytyy ehdon (1) toteuttava kolmikko (x', y', z') , missä $z' < z$; lisäksi niin, että jos kolmikko (x', y', z') toteuttaa ehdon (2), niin (x, y, z)

toteuttaa ehdon (2). Prosessi johtaa kuitenkin äärellisen askelmäärän jälkeen joko tilanteeseen, jossa $z' = 0$ tai $z' = 1$. Koska kolmikot, joissa z on 0 tai 1, toteuttavat ehdon (2), on alkuperäisen kolmikon (x, y, z) myös toteutettava ehto (2), ja todistus on valmis.

5. Piste P on tasasivuisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän piste. Osoita, että janat PA , PB ja PC voivat olla kolmion sivuja. Olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde ja d pisteen P ja mainitun ympyrän keskipisteen välimatka. Määritä konstruoidun kolmion ala.

Ratkaisu. Olkoot D , E ja F pisteen P kohtisuorat projektiot suorilla BC , AC ja AB . Olkoot $a' = EF$, $b' = FD$ ja $c' = DE$ kolmion DEF sivut ja olkoot $AP = x$, $BP = y$ ja $CP = z$. Koska esimerkiksi $BDPF$ on jännekelikulmio ja BP tämän nelikulmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, on laajennetun sinilauseen perusteella $b' = y \sin 60^\circ$. Samoin tietysti $a' = x \sin 60^\circ$ ja $c' = z \sin 60^\circ$. Mutta koska a' , b' ja c' ovat kolmion sivujen pituuksia, ovat sellaisia myös x , y ja z . Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Ei merkitse rajoitusta olettaa, että P on kulman AOB aukeamassa. Olkoon $\angle AOP = \phi$. Kosinilauseen perusteella on

$$\begin{aligned} x^2 &= d^2 + R^2 - 2dR \cos \phi \\ y^2 &= d^2 + R^2 - 2dR \cos(120^\circ - \phi) \\ &= d^2 + R^2 + dR \cos \phi - \sqrt{3}dR \sin \phi \\ z^2 &= d^2 + R^2 - 2dR \cos(120^\circ + \phi) \\ &= d^2 + R^2 + dR \cos \phi + \sqrt{3}dR \sin \phi. \end{aligned}$$

Merkitään kolmion, jonka sivut ovat x , y ja z , alaa T :llä. Heronin kaavan perusteella

$$\begin{aligned} 16T^2 &= (x+y+z)(-x+y+z)(x+y-z)(x-y+z) \\ &= ((y+z)^2 - x^2)(x^2 - (y-z)^2) \\ &= (y^2 + z^2 - x^2 + 2yz)(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) \\ &= 4y^2z^2 - (y^2 + z^2 - x^2)^2 \\ &= 4((d^2 + R^2 + dR \cos \phi)^2 - 3d^2R^2 \sin^2 \phi) \\ &\quad - (d^2 + R^2 + 4dR \cos \phi)^2 \\ &= 4((d^2 + R^2)^2 + 2(d^2 + R^2)dR \cos \phi \\ &\quad + d^2R^2 \cos^2 \phi - 3d^2R^2 \sin^2 \phi) - (d^2 + R^2)^2 \\ &\quad - 8(d^2 + R^2)dR \cos \phi - 16d^2R^2 \cos^2 \phi \\ &= 3(d^2 + R^2)^2 + 4d^2R^2 - 16d^2R^2 = 3(R^2 - d^2)^2. \end{aligned}$$

Tässä oli vielä käytetty sievennyksiä $\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi = 1 - 4 \sin^2 \phi$ ja $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$. Kolmion ala on siis

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4}(R^2 - d^2).$$

(Kun P on kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä eli kun $d = R$, niin $T = 0$. Tällöin D , E ja F ovat

kolmion Simsonin suoralla ja kolmio DEF surkastuu janaksi, samoin kuin kolmio, jonka sivut ovat x , y ja z .)

6. Olkoon $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \geq 2$. Oletetaan, että luvulle α ja kaikille i , $1 \leq i \leq s$, pätee $(p_i - 1) \nmid \alpha$. Todista, että $n \mid \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha$, missä $\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid (a, n) = 1\}$. $[(a, n)$ on lukujen a ja n suurin yhteinen tekijä].

Ratkaisu. Koska $p_i - 1$ ei voi olla luvun α tekijä, p_i ei voi olla 2. n on siis pariton luku ja jokainen $p_i \geq 3$. Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että $p_i^{\alpha_i} \mid \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha$ kaikilla i . Riittää, että todistetaan tämä, kun $i = 1$. On siis osoitettava, että

$$\sum_a a^\alpha \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1}}, \quad (2)$$

missä a käy läpi kaikki ne luvut 1:stä $(n-1)$:een, joille $(a, n) = 1$. a :lla ja n :llä ei ole yhteisiä tekijöitä jos ja vain jos a :lla ja $p_i^{\alpha_i}$:llä ei ole yhteisiä tekijöitä millään i eli jos ja vain jos a on kullakin i kongruentti mod $p_i^{\alpha_i}$ jonkin niistä $\phi(p_i^{\alpha_i})$:stä luvusta a_i kanssa, joille $(a_i, p_i^{\alpha_i}) = 1$. ($\phi(m)$ ilmoittaa lukua m pienempien positiivisten kokonaislukujen lukumäärän, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä m :n kanssa.) Kiinalainen jäännöslause ilmaisee toisaalta, että jos on annettu mielivaltainen jono $(a_1, a_2, \dots, a_s)$, missä $(a_i, p_i^{\alpha_i}) = 1$, niin lukujen a joukossa on sellainen, jolle $a \equiv a_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, $i = 1, \dots, s$. Mutta tämä merkitsee, että jokainen yhtälön (2) vasemman puolen summan yhteenlaskettava, joka on $\equiv a_1 \pmod{p_1^{\alpha_1}}$, missä $(a_1, p_1^{\alpha_1}) = 1$, on kongruentti tasan $\phi(p_2^{\alpha_2})\phi(p_3^{\alpha_3}) \cdots \phi(p_s^{\alpha_s})$:n summan muun yhteenlaskettavan kanssa. Väitteen todistamiseksi riittää siis osoittaa, että (2):n vasemman puolen summa on jaollinen $p_1^{\alpha_1}$:llä, kun a käy läpi ne luvut väliltä 1, $\dots$, $p_1^{\alpha_1} - 1$, joilla ei ole yhteistä tekijää $p_1^{\alpha_1}$:n kanssa.

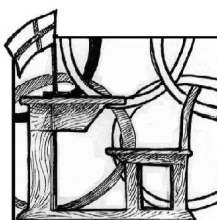
Yleisen lukuteorian tuloksen mukaisesti, jos p on pariton alkuluku, niin $\mathbb{Z}_{p^k}^*$ on syklinen ryhmä (jonka viritetään primitiivijuuri $g \pmod{p^k}$). On siis olemassa g siten, että luvut $g, g^2, \dots, g^{\phi(p_1^{\alpha_1})}$ ovat mod $p_1^{\alpha_1}$ kuin ne välin $[1, p_1^{\alpha_1} - 1]$ kokonaisluvut, joilla ei ole yhteistä tekijää $p_1^{\alpha_1}$:n kanssa. Todistettavaksi tulee siis

$$p_1^{\alpha_1} \mid \sum_{i=0}^{\phi(p_1^{\alpha_1})-1} (g^i)^\alpha.$$

Koska $p_1 - 1$ ei ole α :n tekijä, niin $g^\alpha \equiv g^{k(p_1-1)+r_1} \equiv g^{r_1}$, missä $1 \leq r_1 < p_1 - 1$. Siis $g^\alpha \not\equiv 1 \pmod{p}$, josta seuraa, että $g^\alpha \not\equiv 1 \pmod{p_1^{\alpha_1}}$. Nyt

$$(g^\alpha - 1) \sum_{i=0}^{\phi(p_1^{\alpha_1})-1} (g^i)^\alpha = g^{\phi(p_1^{\alpha_1})} - 1 \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1}}.$$

Väite on todistettu.



Matematiikan opetuksesta ja osaamisesta – vielä ainakin kerran

Timo Tossavainen

Savonlinnan opettajankoulutuslaitos

Matti Lehtinen tarkasteli matematiikan opetusta ja osaamista Solmun numerossa 2/2008 nostoen esille mm. opetussuunnitelmien ongelmat ja matematiikkaa vain sivuaineena opiskelleet aineenopettajat. Matematiikan opetusta ja oppimistuloksia arvioitaessa on hyvä muistaa, että osaamisen tason mahdollinen lasku ei koske pelkästään matematiikkaa tai luonnontieteitä. Esimerkiksi äidinkielen opettajat ovat jo vuosien ajan tuoneet julki huolensa nykynuorten kielitaidoista.

Mitä tästä pitää päätellä; onko koko koululaitos menossa syöksykierteellä alaspäin? Oikea vastaus lienee: ei ole, vaan koulun kokonaistehtävä ja tavoitteet ovat muuttuneet. Koulussa opetetaan nykyisin varsinaisen oppiaineen lisäksi paljon muutakin hyödyllistä, joten tämänpäivän koululaisten osaamisen ala on toisenlainen kuin ennen. Jotkut akateemisiin opintoihin liittyvät ongelmat saattavat siis johtua siitä, että yliopistoissa ja ammattikorkeakouluissa ei ole osattu riittäväällä tavalla huomioida opiskelijoiden osaamisen painopisteen muutosta omia opetussuunnitelmia laadittaessa ja ennen kaikkea opetusmenetelmiä valittaessa. Tähän on kiinnittänyt huomiota myös Markus Norrby Arkhimeoksen numerossa 2/2008 julkaistussa kirjoituksessaan *Dagens ungdom kan inte räknas*.

Koulun opetussuunnitelmien ja niiden toteutumisen muutokset ilmentävät tietenkin koko yhteiskunnan ja kulttuurin muuttumisesta. Matematiikan osaamisen lasku – jos se edes on todellista koko ikäluokkien kes-

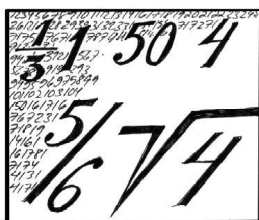
kimääräisen osaamisen osalta – selittyyne pitkälti sillä, että yksilön näkökulmasta matematiikan merkitys arkielämässä on viime vuosikymmeninä laskenut suhteessa moniin muihin taitoihin. Kyllä, laskenut eikä noussut. Jos lasku- ja päättelytaito ennen toivat aitoa sosiaalista arvostusta ja olivat todellisenä edellytyksenä korkeamman koulutuksen saamiselle, nykyisin jokapäiväisessä kanssakäymisessä arvostetaan enemmän jopa meluavaa ulospäin suuntautuneisuutta tai kykyä keskustella kiinnostuneenoloisesti pinnallisista muoti-ilmiöistä kuin taitoa tarkastella funktion jatkuvuutta jne. Ja vaikka matematiikan opiskelu tukisikin syvällisempien sosiaalisten taitojen kehittymistä, tai tarjoaisi melko varman tien hyväpalkkaisen asiantuntijan ammattiin, näitä taitoja ja maallista menestystä yksilö voi saavuttaa helpompaakin tietä kulkien. Miksi nykynuori ryhtyisi opiskelemaan matematiikkaa tällaisten ulkoisten syiden vuoksi, jos hänellä ei ole sisäistä kiinnostusta sitä kohtaan?

Todellinen matematiikka lienee aina kiinnostanut vain pientä vähemmistöä, eikä peruskoulun perustaminen tai lukion pitkän matematiikan suosion kasvattamisyritykset ole tätä asiantilaa merkittävästi muuttaneet. Yhteiskunta tarvitsee toki kehittyäkseen tai edes pysyessään pysyäkseen matematiikan todellisia osajia, mutta – kuten todellisuus meille selvästi osoittaa – yhteiskunnan täysvaltainen jäsenyys ei edellytä yksilöltä juuri minkäänlaista matemaattista osaamista.

Yhteiskunnan on tietenkin syytä reagoida siihen, että insinöörien ja muiden matematiikan avulla reaali-maailmaa rakentavien osaaminen on heikentynyt. Täl-löin on panostettava siihen, että löydämme riittävän ajoissa ne nuoret, joilla on kykyä ja halua oppia todel-lista matematiikkaa, ja siihen, että järjestämme heil-le riittävästi korkealaatuista matematiikan opetusta. Matemaattisille aloille hakeutuneiden nuorten osaami-sen kehitys osoittaa, että tähän tavoitteeseen pääse-minen edellyttää syvällisempää rakenteellista muutosta kuin nykyisten opetussuunnitelmien sisältöjen uudel-leen järjestämistä tai yläluokkien matematiikan opet-tamisen kieltämistä luokanopettajilta. Herää kysymys, onko tarpeen erottaa laskentopainotteinen arkipäivän ongelmanratkaisu ja todellinen matematiikka eri op-piaineiksi koulussa. Koska matemaattisesti suuntautu-neet lapset erottuvat toisista jo peruskoulun alaluokilla, tämä kahteen oppiaineeseen jako voisi tapahtua esim.

viidenneltä luokalta alkaen ilman, että kenenkään tasa-arvoisuutta todellisten jatkokoulutusmahdollisuuksien suhteen loukattaisiin – varsinkin jos molempien väylien opetus toteutettaisiin kunnianhimoisesti ja todellisen osaamisen kehittymiseen tähdäten.

Suurempaa muutosta odoteltaessa ainelaitosten kan-nattaisi kuitenkin jo nyt panostaa myös luokanopet-tajiin järjestämällä matematiikan sivuaineopintokoko-naisuuksia, joissa keskitytään laskennon, mittaamisen ja matemaattisen ajattelun perusasioihin monipuolises-ti ja syvällisesti mutta ottaen huomioon perusopetuk-sen tavoitteet ja todelliset olosuhteet. Ellei matema-tiikan ainelaitosten tutkintotuotanto jostain yllättäväs-tä syystä tehostu lähivuosina huomattavasti, perusope-tuksen yläluokkienkaan matematiikan opetusta ei voida harvaan asutuilla seuduilla enää järjestää ilman mate-matiikan sivuaineen suorittaneita luokanopettajia.



Lukujen uusi maailma: p -adiset luvut

Tauno Metsänkylä

Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Kun kokonaislukujen $0, 1, 2, \dots$ joukkoa laajennetaan vaiheittain ottamalla mukaan negatiiviset kokonaisluvut, murtoluvut, irrationaaliluvut ja lopulta imaginaariluvut, saadaan rakennetuksi kompleksilukujen joukko $\mathbf{C}$. Tämä on laajin mahdollinen ”lukujen maailma”, kuten Solmussakin hiljattain [2] kerrottiin: sitä ei voida enää laajentaa, jos sen halutaan säilyttävän totutut yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskusäännöt. Joukkoa, jossa nämä säännöt pätevät, sanotaan matematiikan kielellä *kunnaksi*, ja erityisesti $\mathbf{C}$ on *algebrallisesti suljettu kunta*.

Mutta tässä ei ole koko tarina lukualueiden laajentamisesta ja ”hyvistä” lukumaailmoista. Lähtemällä liikkeelle rationaalilukujen joukosta ja käyttämällä toisenlaista laajentamistapaa päädytään uudenlaisiin joukkoihin, joiden alkioita voidaan hyvästä syystä myös nimittää luvuiksi. Myös niistä muodostuu nimittäin kunta, jolla on monia samanlaisia ominaisuuksia kuin reaalilukukunnalla $\mathbf{R}$ ja kompleksilukukunnalla $\mathbf{C}$. Lisäksi sillä on useita jännittävällä tavalla erilaisia ominaisuuksia.

Kyseessä ovat *p -adiset luvut*. Tässä p tarkoittaa mitä tahansa alkulukua eli jaotonta lukua, joka on valittu kiinteäksi. Tapauksissa $p = 2$ ja $p = 3$ puhutaan myös *dyadisista* ja *triadisista* luvuista, mikä ehkä saa oudon näköisen ”adinen”-päättteen (englanniksi *adic*) kuulostamaan luontevammalta.

Tällaiset p -adiset luvut eivät ole mikään pelkkä kuriositeetti. Ne ovat päin vastoin osoittautuneet hyvin käyt-

tökelpoisiksi usealla matematiikan alalla, erityisesti lukuteoriassa.

Etäisyyksiä ja itseisarvoja

Ajatellaan ensin reaalilukujoukkoa $\mathbf{R}$. Sen alkioden kesken voidaan paitsi suorittaa tavallisia laskutoimituksia myös ajatella *etäisyyksiä*: kahden luvun a ja b etäisyys on $|a - b|$. Tämä ns. *euklidinen* etäisyys vastaa arkielämän etäisyyskäsitettä, kun reaalilukuja kuvataan lukusuoran pisteinä.

Etäisyys näyttelee keskeistä osaa monissa matematiikan tarkasteluissa. Siksi on luonnollista kysyä, olisiko euklidisella etäisyydellä vaihtoehtoja ja mitä seurauksia sellaisesta olisi.

Ensiksi on syytä miettiä, mitä ominaisuuksia etäisyydellä pitää olla. Ilmeisesti ainakin kahden eri luvun etäisyyden on oltava positiivinen ja luvun etäisyyden itsestään on oltava 0. Lisäksi etäisyyden täytyy suhtautua lukujen laskutoimituksiin ”oikealla” tavalla. Euklidisen etäisyyden tapauksessa nämä etäisyyden ominaisuudet palautuvat seuraaviin itseisarvon ominaisuuksiin: aina kun $a, b \in \mathbf{R}$,

$$E1. |a| > 0, \text{ jos } a \neq 0; \quad |0| = 0,$$

$$E2. |ab| = |a| \cdot |b|,$$

$$E3. |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Viimeksi mainittu ominaisuus on tärkeä *kolmioepäyhtälö*. Tämän nimityksen voi ymmärtää ajattelemalla hetkeksi a ja b kompleksilukuina ja esittämällä ne kompleksitason pisteinä (tai vektoreina); silloin ehto E3 sanoo, että kolmion sivu on pienempi (tai yhtäsuuri) kuin kahden muun sivun summa.

Kysymystä uudenlaisesta etäisyydestä voidaan nyt pohtia kysymällä, voitaisiinko luvuille ensin määritellä jokin toinen ehdot E1–E3 täyttävä ”itseisarvo”. Tällaisia mahdollisuuksia kyllä onkin, mutta ne eivät johda mihinkään mielenkiintoiseen etäisyyskäsitteeseen. Tilanne muuttuu paremmaksi, kun hylätään ajatus, että lukualueena on koko $\mathbf{R}$. Sen takia muutetaan lähtötilannetta siten, että otetaan $\mathbf{R}$:n tilalle sen osajoukko $\mathbf{Q}$, pelkät rationaaliluvut. Ajatellaan siis lähtökohtana vain rationaalilukujen välistä euklidista etäisyyttä sekä tätä etäisyyttä luonnehtivia ehtoja E1–E3, missä nyt $a, b \in \mathbf{Q}$.

Osoittautuu, että tässä tapauksessa ehdot E1–E3 pysyvät voimassa, kun tavallinen itseisarvo $|a|$ korvataan p -adisella itseisarvolla $|a|_p$. Tämä määrittää seuraavasti. Kiinnitetään alkuluku p ja kirjoitetaan rationaaliluku $a = \frac{t}{u}$ supistettuna murtolukuna, missä siis t ja u ovat kokonaislukuja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Tässä on tietysti oletettava, että $a \neq 0$. Katsotaan, onko jompikumpi luvuista t, u jaollinen p :llä, ja kirjoitetaan a muotoon

$$a = p^k \frac{t_1}{u_1},$$

missä t_1 ja u_1 ovat p :llä jaottomia. Eksponenttia k , joka siis on positiivinen, negatiivinen tai 0, sanotaan luvun a p -eksponentiksi. Otetaan sille käyttöön merkintä $k = v_p(a)$. Voidaan sanoa, että a on *jaollinen* alkuluvun p potenssilla $p^{v_p(a)}$ (sillä siitähän on kysymys, jos a sattuu itse olemaan kokonaisluku). Nyt asetetaan määritelmä

$$|a|_p = \left(\frac{1}{2}\right)^{v_p(a)} \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

ja lisäksi $|0|_p = 0$. Silloin ehdot E1–E3 ovat voimassa, kun $|\cdot|$:n tilalla on $|\cdot|_p$. Ensimmäinen ehtoahan nähdään suoraan määritelmästä ja E2 ja E3 seuraavat (tapauksessa $a \neq 0, b \neq 0$) siitä, että

$$\begin{aligned} v_p(ab) &= v_p(a) + v_p(b), \\ v_p(a+b) &\geq \min(v_p(a), v_p(b)). \end{aligned} \quad (4)$$

Tässä jälkimmäinen ehto siis lausuu, että summasta $a+b$ voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi vähintään se p :n potenssi, jolla molemmat yhteenlaskettavat ovat jaollisia. Voit myös varmistua näistä kirjoittamalla

$$a = p^{v_p(a)} \frac{t_1}{u_1}, \quad b = p^{v_p(b)} \frac{t_2}{u_2}$$

ja muodostamalla näiden lukujen tulon ja summan.

Summan tapauksessa ehdosta (4) seuraa edelleen, että

$$|a+b|_p \leq \max(|a|_p, |b|_p) \leq |a|_p + |b|_p. \quad (5)$$

Täydellisyyden vuoksi ehdot E2 ja E3 on tarkistettava myös tapauksessa, jossa esim. $a = 0$. Silloin näiden ehtojen paikkansapitävyys nähdään välittömästi.

Luvun $\frac{1}{2}$ valinta kaavassa (3) on pitkälti mielivaltaisen; mikä tahansa luku r väliltä $0 < r < 1$ kelpaisi. Tämän luvun vaihtelevuus merkitsisi vain eräänlaisen mittakaavan vaihtelua. Usein tehdään mittakaavan normalisointi valitsemalla $r = \frac{1}{p}$.

Esimerkiksi alkuluvulla $p = 5$ saadaan

$$|\frac{75}{88}|_5 = |5^2 \cdot \frac{3}{88}|_5 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4},$$

$$|\frac{11}{15}|_5 = |5^{-1} \cdot \frac{11}{3}|_5 = (\frac{1}{2})^{-1} = 2,$$

$$|1250|_5 = |5^4 \cdot 2|_5 = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16},$$

$$|\frac{261}{13}|_5 = (\frac{1}{2})^0 = 1.$$

Näin määritelty p -adinen itseisarvo $|\cdot|_p$ antaa rationaalilukujen a ja b p -adisesta etäisyyden $|a-b|_p$. Sanotaan myös, että $|\cdot|_p$ määrittelee rationaalilukujen joukossa p -adisesta metriikan. Huomaa, että a ja b ovat ”lähekkäin”, kun $a-b$ on jaollinen korkealla p :n potenssilla. Tämä on p -adisesta metriikan tyypillinen piirre, joka kannattaa muotoilla erityisesti näkyville:

Kahden rationaaliluvun p -adinen etäisyys on sitä pienempi, mitä korkeammalla p :n potenssilla niiden erotus on jaollinen.

Erityisesti siis p :n kasvavien potenssien jonossa $p, p^2, p^3, \dots$ lukujen etäisyys nolasta pienenee eli tässä metriikassa nämä luvut lähestyvät nollaa.

On myös tärkeä huomata, että (5):n nojalla kolmioepäyhtälölle saadaan nyt vahvempi muoto

$$|a+b|_p \leq \max(|a|_p, |b|_p). \quad (6)$$

Katsomalla tarkemmin sitä, miten (5) edellä pääteltiin oikeaksi, havaitaan lisäksi, että

$$|a+b|_p = \max(|a|_p, |b|_p), \quad \text{jos } |a|_p \neq |b|_p. \quad (7)$$

Näillä kahdella kaavalla on kauaskantoiset seuraukset p -adisten lukujen maailmassa. Kaavan (6) perusteella p -adista metriikkaa sanotaan myös *epäarkhimediseksi*; siltä nimittäin puuttuu eräs euklidisen metriikan yksinkertainen ominaisuus, jota matemaatikot sanovat ”Arkhimedeen ominaisuudeksi”.

Käytetään myös nimitystä *ultrametriikka*. Tämä johtuu siitä, että tällä metriikalla on oudontuntuksia ominaisuuksia. Esimerkiksi kun $|a|_p, |b|_p$ ja $|a+b|_p$ tulkitaan vastaavasti kuin edellä kolmion sivujen pituuksiksi, niin (7):stä nähdään, että jokainen kolmio p -adisesta metriikassa on tasakylkinen! Kolmiossa nimittäin joko $|a|_p = |b|_p$ tai muussa tapauksessa $|a+b|_p = |a|_p$ tai $|b|_p$.

Uusia lukuja

Tähän mennessä olemme siis löytäneet rationaalilukujen joukossa uuden metriikan mutta toistaiseksi ei ole saatu vielä aikaan yhtään uutta ”lukua”. Nyt on niiden vuoro.

Jos ”tavallisessa” matematiikassa halutaan selvittää annetun murtoluvun suuruus, niin luku kannattaa yleensä muuttaa desimaaliluvuksi: esim. $\frac{109}{8} = 13,625$ eli

$$\frac{109}{8} = 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Tässä desimaalien vaikutus luvun suuruuteen vähenee oikealle mentäessä, koska potenssit $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ pienenevät. Näin siis euklidisessa metriikassa.

Vastaavasti p -adisessa metriikassa kannattaa lausua annettu luku p :n kasvavien potenssien mukaan, esim. (kun $p = 5$)

$$199 = 4 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3,$$

sillä potenssit $p, p^2, p^3, \dots$ lähenyvät nollaa p -adisessa metriikassa. (Käytännössä edellisen kehitelmän määrittäminen kannattaa tosin tehdä ”takaperin”, aloittamalla siitä, että 5^3 on korkein 5:n potenssi, joka ei ylitä lukua 199.)

Edellisten esimerkkien luvut oli valittu siten, että kehitelmät ovat päätyviä. Mutta rationaaliluvun desimaaliesitys voi tietysti myös olla päättymätön (jolloin se on jostain kohdasta alkaen jaksollinen), esim.

$$\frac{249}{110} = 2,2363636 \dots$$

Samoin rationaaliluvun p -adinen kehitelmä, esim.

$$\frac{29}{40} = 3 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 + \dots$$

Tämä kirjoitelma luonnollisesti tarkoittaa, että oikealla puolella oleva summa on sitä lähempänä (p -adisessa metriikassa) lukua $\frac{29}{40}$, mitä enemmän siihen on otettu mukaan termejä, toisin sanoen mitä kauempaa se on katkaistu. Tarkemmin sanottuna: jos katkaisu on tehty potenssin p^n jälkeen, niin summan etäisyys ko. rationaaliluvusta on $\leq (\frac{1}{2})^{n+1}$. Esimerkiksi

$$\left| \frac{29}{40} - 3 \cdot 5^{-1} - 2 - 4 \cdot 5 - 1 \cdot 5^2 \right|_5 = \left| -\frac{375}{8} \right|_5 = \left| -5^3 \cdot \frac{3}{8} \right|_5 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}.$$

(Eri asia on, miten kehitelmä saadaan määritetyksi. Siihen palataan tuonnempana.)

Rationaalilukujen joukon $\mathbf{Q}$ laajentaminen perinteiseksi reaalityyppiseksi $\mathbf{R}$ on matemaattisesti melko monimutkainen prosessi, mutta prosessin tulos on yksinkertaista kuvailla lukusuoran avulla: uudet luvut, irrationaaliluvut, täyttävät rationaalilukujen väliset ”aukot”, niin että alkujaan erillisistä pisteistä muodostunut rationaalilukujen joukko on täydentynyt yhtenäiseksi suoraksi. Reaalilukuja esittävät *kaikki mahdolliset desimaaliluvut*; irrationaalisia näistä ovat ne, jotka ovat päättymättömiä ja jaksottomia. Avainasemassa tässä laajentamisprosessissa on ilmeisesti euklidinen metriikka.

Analoginen laajentaminen voidaan suorittaa p -adista metriikkaa käyttäen. Tällöin tulosta ei voida havainnollistaa lukusuoraa käyttäen, mutta joka tapauksessa tuloksena on rationaalilukujen joukkoa $\mathbf{Q}$ paljon laajempi joukko, p -adisten lukujen joukko $\mathbf{Q}_p$, jonka muodostavat *kaikki mahdolliset p -adiset kehitelmät*. Uusia, ei-rationaalisia lukuja näistä ovat jälleen ne, jotka ovat päättymättömiä ja jaksottomia. Yleisessä muodossa tällainen kehitelmä on muotoa

$$a_{-k}p^{-k} + a_{-k+1}p^{-k+1} + \dots + a_0p^0 + a_1p^1 + a_2p^2 + \dots, \quad (8)$$

missä kertoimet siis ovat kokonaislukuja välillä $0 \leq a_i \leq p-1$ ja summa jatkuu oikealle äärettömiin (joskin rationaaliluvun tapauksessa kertoimet a_i voivat jostain kohdasta alkaen kaikki olla $= 0$). Tässä voi k tietysti olla myös negatiivinen, jolloin kehitelmä alkaa p :n positiivisella potenssilla. Tavallista desimaalilukuesitystä jäljitellen lukua (8) voidaan merkitä

$$a_{-k}a_{-k+1} \dots a_0, a_1a_2 \dots$$

ja siinä tapauksessa, että k on negatiivinen, $k = -h$,

$$0,00 \dots 0a_ha_{h+1} \dots$$

Kertoimia a_i voidaan sanoa luvun ”numeroiksi”. Siis esimerkiksi

$$\frac{29}{40} = 32,4141 \dots$$

5-adisesti.

Näin saatuja lukuja voidaan laskea yhteen, vähentää, kertoa ja jakaa aivan samoin kuin tavallisia desimaalilukuja. Tätä valaistetaan seuraavassa pykälässä muutamien esimerkein. Tuloksena oleva joukko $\mathbf{Q}_p$ onkin kunta aivan kuten $\mathbf{R}$. Lisäksi se on *täydellinen*, toisin sanoen se täyttää ehdon, joka on analoginen $\mathbf{R}$:n täydellisyksaksioman kanssa (ks. [2]).

Edellä määritelty p -adinen itseisarvo joukossa $\mathbf{Q}$ laajenee luonnollisella tavalla myös joukkoon $\mathbf{Q}_p$:

$$|a_{-k}a_{-k+1} \dots a_0, a_1a_2 \dots|_p = \left(\frac{1}{2} \right)^{-k},$$

jos $a_{-k} \neq 0$. Tarkista tämän kaavan paikkansapitävyys edellisen luvun $\frac{29}{40}$ tapauksessa. Itseisarvo $|\cdot|_p$ antaa joukkoon $\mathbf{Q}_p$ p -adisen etäisyyden, jolla on samat ominaisuudet kuin edellä. Erityisesti voimassa ovat ehdot (6) ja (7) eli metriikka on ultrametriikka.

Niiden p -adisten lukujen x joukkoa, jotka täyttävät ehdon $|x - a|_p = r$ (missä a on annettu p -adinen luku ja r jokin $|\cdot|_p$:n arvo), on luonnollista sanoa a -keskiseksi r -säteiseksi ympyräksi. Jos b on tämän ympyrän sisällä, toisin sanoen jos $|b - a|_p < r$, niin ehtoa (7) käyttäen saadaan

$$|x - b|_p = |x - a + a - b|_p = \max(|x - a|_p, |a - b|_p) = r$$

aina, kun x on ympyrällä. Tämä merkitsee, että myös b on ympyrän keskipiste. Siis jokainen ympyrän sisällä oleva piste on ympyrän keskipiste!

Samoin kuin reaalitylukujen kunnassa $\mathbf{R}$ myös p -adisten lukujen kunnassa $\mathbf{Q}_p$ voidaan ratkaista sellaisia yhtälöitä, joilla ei ole rationaalilukuratkaisuja. Esimerkiksi yhtälöllä $x^2 = 6$ on ratkaisut $x = \pm 1,3042\dots$ (päättymätön) kunnassa $\mathbf{Q}_5$. Yhtälöllä $x^4 = 1$ on tässä kunnassa maksimimäärä eli neljä ratkaisua. Kunta $\mathbf{Q}_5$ on siis tässä suhteessa parempi kuin kunta $\mathbf{R}$; tähän on laajennettava kompleksilukukunnaksi $\mathbf{C}$ ennen kuin saadaan yhtälölle $x^4 = 1$ kaikki neljä ratkaisua $\pm 1, \pm i$.

Kunta $\mathbf{Q}_p$ voidaan algebran yleisten periaatteiden mukaan laajentaa sellaiseksi kunnaksi, joka on algebrallisesti suljettu. Siinä jokaisella n :nnen asteen yhtälöllä on n ratkaisua. Lisäksi tämä kunta voidaan valita siten, että se on täydellinen yllä mainituissa mielessä. Siinä voidaan kehittää samanlaista funktioiden teoriaa kuin $\mathbf{R}$:ssä ja $\mathbf{C}$:ssä, alkaen derivoinnista ja integroinnista. Hyvän yleiskuvan asiasta saa selailemalla esim. kirjaa [1]. Näin muodostettua kuntaa, josta usein käytetään merkintää $\mathbf{C}_p$, on luonnollista pitää kompleksilukukunnan p -adisena analogiana.

Laskutoimituksia

Palataan takaisin p -adisten lukujen kuntaan $\mathbf{Q}_p$. Yksinkertaiset numerolaskut p -adisilla luvuilla sujuvat aivan vastaavasti kuin tavallisilla desimaaliluvuilla. Seuraavissa esimerkeissä aina $p = 5$.

Yhteenlasku voidaan tehdä kirjoittamalla luvut tavalliseen tapaan alakkain, mutta laskujen suunta on nyt vasemmalta oikealle, koska ”muistinumero” siirretään aina korkeamman potenssin kohdalle eli oikealle, siis esimerkiksi

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1, 2 \ 1 \\ 2, 4 \ 2 \\ \hline 3, 1 \ 4 \end{array} + \begin{array}{r} 1 \ 1 \\ 3 \ 3, 2 \ 2 \\ 2, 4 \ 2 \\ \hline 3 \ 0, 2 \ 0 \ 1 \end{array}$$

Vähennyslaskussa on samoin edettävä vasemmalta oikealle, koska ”lainaaminen” tapahtuu korkeamman potenssin kohdalta. Vähennyslaskun voi myös muuttaa

yhteenlaskuksi vaihtamalla vähentäjän ensin vastaluvukseen. Luvun vastaluku saadaan korvaamalla ensimmäinen numero $a_{-k} (\neq 0)$ numerolla $p - a_{-k}$ ja jokainen seuraava numero a_i numerolla $p - 1 - a_i$. Tämä on helppo perustella laskemalla, että näiden lukujen summaksi tulee 0. Esimerkiksi

$$-3,421 = 2,02344\dots, \quad -0,01134 = -0,04331044\dots$$

(kehitelmiä ovat päättymättömiä). Tässä vähennyslasku molemmilla tavoilla:

$$\begin{array}{r} 4, 1 \ 1 \ 3 \\ 3, 4 \ 2 \ 1 \\ \hline 1, 2 \ 3 \ 1 \end{array} - \begin{array}{r} 1 \quad 1 \ 1 \\ 4, 1 \ 1 \ 3 \\ 2, 0 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \dots \\ \hline 1, 2 \ 3 \ 1 \ 0 \ 0 \dots \end{array} +$$

Myös lukujen kertominen alakkain (tämäkin vasemmalta oikealle) on helppoa. Laskuja helpottaa, jos välituloksissa (eli kerrotaessa yksittäisellä numerolla) jätetään numerot redusoimatta välille $0, \dots, 4$, siis kirjoitetaan esimerkiksi tulo $3 \cdot 1,32$ muodossa $3,96$. Redusoitunahan, eli ns. *kanonisessa* muodossa, se olisi $3,421$. Redusointi tehdään sitten näiden lukujen yhteenlaskussa.

Tehtävä. Tarkista, että 5-adinen luku $2,1213$ kerrottuna itsellään antaa tulokseksi luvun -1 viiden numeron tarkkuudella (siis 5-adisessa muodossa $4,4444$). Kyseessä on kompleksilukujen kunnan imaginaariyksikköä $i = \sqrt{-1}$ vastaavan 5-adisen luvun likiarvo eli samalla myös yhtälön $x^4 = 1$ yhden ratkaisun likiarvo (vrt. edellisen pykälän loppuun).

Jos edellisessä pykälässä annettu yhtälön $x^2 = 6$ ratkaisun likiarvo $1,3042$ kunnassa $\mathbf{Q}_5$ on oikea, niin $1,3042$ korotettuna neliöön antaa viiden numeron tarkkuudella luvun 6 (eli 5-adisessa muodossa $1,1$). Tarkista tämä.

Jakolasku (jakokulmassa) on vähän vaativampaa, koska siinä tavallaan ratkaistaan *kongruensseja* modulo p . Jos lasketaan esim. $\frac{4,01}{0,31}$, on aloitettava selvittämällä, montako kertaa 3 (jakajan ensimmäinen nollasta eroava numero) ”menee” 4 :ään. Vastaus on 3 , koska $3 \cdot 3$ antaa välille $0, \dots, 4$ redusoituna tulokseksi 4 . Tällöin on tosiasiaa ratkaistu kongruenssi $3x \equiv 4 \pmod{5}$. Helppointa on luonnollisesti laatia ensin valmiiksi pieni taulukko tuloista $3x$ laskettuna modulo 5 , kun $x = 0, \dots, 4$.

Tehtävä. Suorita edellistä jakolaskua jakokulmassa pitemmälle. Kyseessä on edellisessä pykälässä esiintynyt luku $29/40$, jossa osoittaja ja nimittäjä on vain kirjoitettu 5-adiseen muotoon. Sille pitää siis tulla kehitelmä $32,4141\dots$

Vähän historiaa – ja muutakin

Kunnia p -adisten lukujen keksimisestä kuuluu matemaatikko *Kurt Henselille* (1861–1941), joka toimi professorina Saksassa Marburgin yliopistossa. Hensel ei

päätenyt keksintöönsä yllä esitetyllä ajattelutavalla, vaan otti lähtökohdakseen funktioiden sarjakehitelmät (kompleksialueessa). Ajatuksena oli, että samoin kuin sarjakehitelmä tietyssä kompleksitason pisteessä kuvaa funktion käyttäytymistä tämän pisteen läheisyydessä, eli funktion *lokaalia* (paikallista) käyttäytymistä, myös luvun p -adinen kehitelmä kertoo luvusta lokaalista tietoa ”paikassa p ”. Kuntia $\mathbf{Q}_p$ sanotaankin *lokaaleiksi kunniksi*.

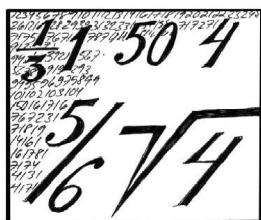
Hensel julkaisi p -adisia lukuja koskevan teoriansa vuoden 1900 paikkeilla, mutta sen merkitystä ei aluksi oikein ymmärretty. Teorian varsinainen läpimurto tapahtui noin 20 vuotta myöhemmin, kun Henselin oppilas Helmut Hasse ratkaisi kuuluisan neliömuotoja koskevan probleeman p -adisia lukuja käyttäen.

Koska p -adisten lukujen varsinaiset sovellukset vaativat melko syvällistä matematiikkaa, näistä luvuista ei yleensä puhuta lukuteorian alkeiden kirjoissa. Joitakin helppolukuisia esityksiä voi löytää esim. Googlen avulla, yksinkertaisesti haulla *p -adic numbers*.

Lukijalle, joka on kiinnostunut matematiikan ja musiikin yhteyksistä ja/tai naisten aseman historiallisesta kehityksestä, vielä pieni lisäys. Kurt Henselin isoäiti oli *Fanny Hensel*, tyttönimeltään Mendelssohn, säveltäjä *Felix Mendelssohnin* sisar. Fanny oli itsekin säveltäjä, mutta tuohon aikaan sellaista pidettiin sopimattomana naiselle. Niinpä Fanny sävelsi pääasiassa pöytälaatikoon, tai joissakin tapauksissa julkaisi sävellyksensä veljensä nimissä. Mutta nyttemmin hänen sävellyksensä on löydetty ja tunnistettu, ja ne ovat päässeet julki-suuteen. Monet niistä ovat erinomaisia – pankaapa vain merkille, jos satutte kuulemaan niitä esim. radiossa.

Viitteet

- [1] Schikhof, W.H.: *Ultrametric Calculus: An Introduction to p -Adic Analysis*. Cambridge University Press, 1982.
- [2] Valmari, Antti: *Onko $\sqrt{-1}$ olemassa?*, 1. osa, Solmu 1/2008, 18–24; 2. osa, Solmu 2/2008, 13–20.



Dynamiikkaa, derivaattoja ja ennustavia kuumemittareita

Mikko Malinen

TkK, opiskelija

Teknillinen korkeakoulu

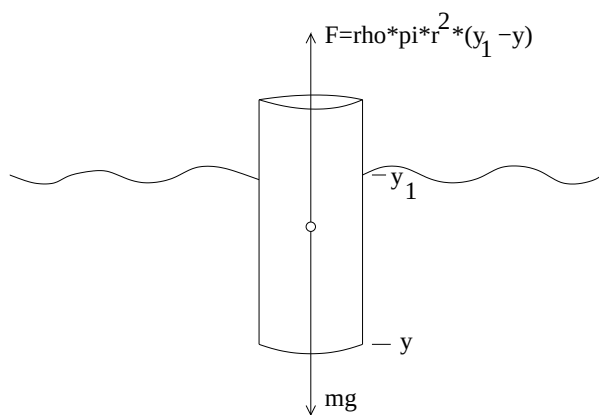
Johdanto

Dynamiikka on mekaniikan osa, joka käsittelee kappa-
leiden liikkeitä ja niihin liittyviä voimia. Tämän artik-
kelin ensimmäisessä osassa esitetään mielenkiintoinen
dynamiikan sovellus: vedenkorkeuden laskeminen, kun
vedenkorkeutta ei suoraan voida mitata, vaan käyte-
tään massaa omaavaa kohoa. Artikkelissa osoitetaan,
että vedenkorkeus voidaan laskea, jos tiedetään kohon
asema ja kohon aseman toinen derivaatta. Artikkelin
toisessa osassa käsitellään lämmön johtumista, aineen
lämpenemistä lämmittimen ansiosta. Artikkelissa joh-
detaan yhtälö aineen loppulämpötilalle. Tämän yhtä-
lön avulla aineen loppulämpötila voidaan laskea, kun
tiedetään aineen lämpötila hetkellä t sekä sen lämpö-
tilan ensimmäinen ja toinen derivaatta. Lämmittimen
lämpötilaa ei tarvitse tietää. Artikkelin molemmat osat
ovat erinomaisia esimerkkejä siitä, miten hyödyllisiä
derivaatat ovat.

Vedenkorkeusesimerkki

Tarkastellaan ympyräsynterin muotoista kohoa vedes-
sä (kuva 1). Haluamme tietää veden korkeuden ja las-
kea sen kohon aseman avulla. Kohoon vaikuttava ko-
konaisvoima on kuvan 1 voimien summa:

$$F_1 = \rho \cdot \pi r^2 \cdot (y_1 - y) - mg \quad (9)$$



Kuva 1. Koho vedessä. Muuttujat kuvassa: ρ veden ti-
heys, r kohon säde, y_1 veden taso, y kohon asema (pys-
tysuunnassa).

Veden vastusta ei oteta huomioon. Newtonin ensimmäi-
nen laki sanoo, että

$$F_1 = ma. \quad (10)$$

(9):stä ja (10):sta seuraa

$$ma = \rho \cdot \pi r^2 (y_1 - y) - mg.$$

Koska kiihtyvyys a on toinen aikaderivaatta y :stä, voi-
daan kirjoittaa

$$my'' - \rho \cdot \pi r^2 (y_1 - y) - mg = 0.$$

Ratkaisemalla tämä y_1 :n suhteen saadaan

$$y_1 = \frac{my''}{\rho\pi r^2} + y - \frac{mg}{\rho\pi r^2}.$$

Tämä voidaan kirjoittaa

$$\boxed{y_1 = by'' + y - c}$$

yksinkertaisuuden vuoksi. Tässä b ja c ovat tunnettuja vakioita. Tämä on tuloksemme. Veden taso riippuu kohon aseman toisesta derivaatasta ja itse kohon asemasta.

Kappaleen loppulämpötila voidaan ennustaa

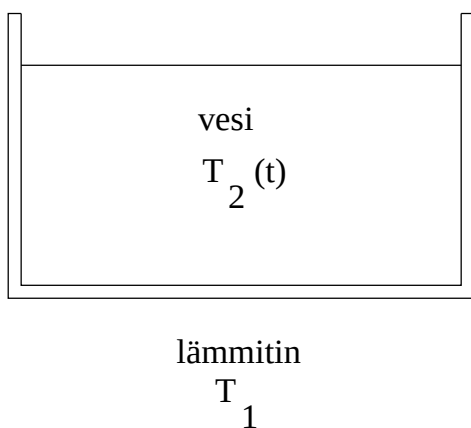
Lämmönvaihtoa kahden kappaleen välillä voidaan mallintaa yhtälöllä

$$\frac{dQ}{dt} = kA \frac{T_H - T_C}{L}$$

(ks. [1]). Tässä Q on kappaleen 2 lämpöenergia, k on lämmönjohtavuus, A on välissä olevan johtavan materiaalin läpyleikkäuspinta-ala, T_H on kappaleen 1 lämpötila, T_C on kappaleen 2 lämpötila ja L on kappaleiden 1 ja 2 välinen etäisyys. Tämä voidaan kirjoittaa lyhyesti

$$\frac{dQ}{dt} = a(T_1 - T_2(t))$$

missä Q on kappaleen 2 lämpöenergia, a on positiivinen verrannollisuuskertoimen ja T_1 ja T_2 ovat kappaleiden 1 ja 2 lämpötilat. Katso esimerkkiasetelma kuvassa 2.



Kuva 2. Esimerkkiasetelma.

Lämpöenergia on verrannollinen lämpötilaan

$$Q - Q_0 = cm(T - T_0)$$

missä Q_0 on juuri sulamislämpötilan yläpuolella olevan kappaleen lämpöenergia, T ja T_0 ovat Celsius-asteikolla

ja T :n sallitaan saavan arvoja joissa kappale on neste-faasissa. Esimerkiksi vedellä $0 < T < 100^\circ\text{C}$. T_0 on kappaleen sulamislämpötila. Tästä saadaan

$$T - T_0 = \frac{Q - Q_0}{cm}.$$

Kun muistetaan myös, että

$$\frac{d(Q - Q_0)}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

ja

$$\frac{d(T - T_0)}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \frac{dT_2(t)}{dt} &= \frac{d(T_2(t) - T_0)}{dt} = \frac{1}{cm} \cdot \frac{d(Q - Q_0)}{dt} \\ &= \frac{1}{cm} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{cm} a(T_1 - T_2(t)) \\ &= b(T_1 - T_2(t)), \quad b > 0, b \neq \infty. \end{aligned}$$

Tämä on differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on

$$T_2(t) = T_1 + e^{-bt} \cdot C. \quad (11)$$

Derivoimalla tulos saadaan

$$T_2'(t) = -be^{-bt} \cdot C. \quad (12)$$

Derivoimalla uudestaan saadaan

$$T_2''(t) = b^2 e^{-bt} \cdot C. \quad (13)$$

(12):sta ja (13):sta saadaan

$$\frac{T_2''(t)}{-b} = \frac{T_2'(t)}{b^2}.$$

Ratkaisemalla b saadaan

$$b = -\frac{T_2''(t)}{T_2'(t)}, \quad T_2''(t) \neq 0, T_2'(t) \neq 0.$$

(12):stä ja sijoittamalla b saadaan

$$C = \frac{T_2'(t)}{\frac{T_2''(t)}{T_2'(t)} e^{\frac{T_2''(t)}{T_2'(t)} \cdot t}} = \frac{(T_2'(t))^2}{T_2''(t) e^{\frac{T_2''(t)}{T_2'(t)} \cdot t}}.$$

Hetkellä $t = 0+$ (juuri 0:n jälkeen) C :stä tulee

$$C_{t=0+} = \frac{(T_2'(0+))^2}{T_2''(0+)}.$$

(11):stä ja sijoittamalla $C_{t=0+}$ saadaan (hetkellä $t = 0+$)

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2(0+) - \frac{(T_2'(0+))^2}{T_2''(0+)}, \\ T_2'(0+) &\neq 0, \quad T_2''(0+) \neq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

$T_2(t)$:n raja-arvo on (yhtälöstä (11)):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} T_1 + e^{-bt} \cdot C = T_1.$$

Tämä raja-arvo on loppulämpötila. Meillä on jo yhtälö (14) T_1 :lle. Tämän yhtälön oikealla puolella on vain $T_2(0+)$ ja sen kaksi derivaattaa:

$$T_{2_{final}} = T_2(0+) - \frac{(T_2'(0+))^2}{T_2''(0+)}.$$

Koska mitä tahansa ajanhetkeä voidaan pitää uutena alkuaianhetkenä, voidaan kirjoittaa

$$T_{2_{final}} = T_2(t) - \frac{(T_2'(t))^2}{T_2''(t)}, \quad t > 0$$

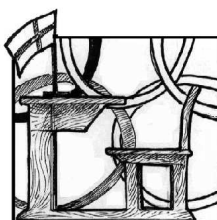
joten kappaleen loppulämpötila voidaan ennustaa kun sen lämpötila ja lämpötilan kaksi derivaattaa voidaan mitata hetkellä $t > 0$. Lopuksi esitetään jo otsikossa mainittu sovellus: Menetelmää voitaisiin käyttää elektronisessa kuumemittarissa ennustamaan anturin loppulämpötila eli nopeuttamaan lämpötilan mittaamista.

Johtopäätökset

Tässä artikkelissa esitettiin kaksi menetelmää laskea muuttujan arvo silloin, kun sitä ei voida suoraan mitata. Kumpikin menetelmä on hyödynnettävissä käytännössä ja kummassakin derivaatat ovat merkittävässä osassa. Ne korostavat derivaattojen merkitystä.

Viitteet

- [1] Hugh D. Young ja Roger A. Freedman, *University Physics*, 9. laitos, Addison-Wesley, 1996



Kansainväliset matematiikkaolympialaiset Madridissa

Matti Lehtinen

Maanpuolustuskorkeakoulu

49. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Madridissa 14.–22. heinäkuuta 2008. Olympialaisissa kilpaili 535 lukiolaista 97 maasta. Kilpailijat ratkaisivat tehtäviä kahtena päivänä yhteensä yhdeksän tunnin ajan. Tehtäviä ja niiden ratkaisuja esitellään toisaalla tässä lehdessä.

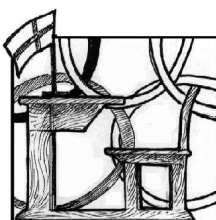
Kilpailijoista kolme, Kiinan Xiaosheng Mu ja Dongyi Wei sekä Yhdysvaltojen Alex Zhai, ratkaisivat kaikki tehtävät oikein. Osallistujamaiden epävirallisen pistekilpailun voitti Kiina, seuraavina Venäjä, Yhdysvallat, Etelä-Korea, Iran, Thaimaa, Pohjois-Korea, Turkki, Taiwan, Unkari, Japani, Vietnam ja Puola.

Suomi oli mukana Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa nyt 35. kerran. Joukkue valikoitui Matemaattisten aineiden liiton valtakunnallisen lukion matematiikkakilpailun ja Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaoston Päivölän kansanopistossa pidettävien valmennusviikonloppujen osallistujista.

Joukkueessa olivat Sylvester Eriksson-Bique (Päivölän Opiston matematiikkalinja), Lauri Hitruhin (Ressun lukio, Helsinki), Janne Junnila (Uudenkaupungin lukio), Jonatan Lehtonen (Olarin lukio, Espoo), Heikki Pulkkinen (Luostarivuoren lukio, Turku) ja Lasse Verkama (Kaurialan lukio, Hämeenlinna). Joukkueen johtajina toimivat Matti Lehtinen Maanpuolustuskorkeakoulusta ja Kerkko Luosto Helsingin yliopistosta.

Joukkueen menestys oli vaatimaton: Sylvester Eriksson-Bique palkittiin pronssimitalilla ja Janne Junnila kunniamaininnalla. Pistetaulukossa Suomi oli sijalla 74. Muun muassa kaikki Euroopan maat Islantia ja vajailla joukkueilla kilpailleita Liechtensteinia ja Montenegroa lukuunottamatta olivat Suomen edellä.

Matematiikkaolympialaisten tuloksiin ja tehtäviin voi tutustua tarkemmin mm. matematiikkaolympialaisten järjestäjien verkkosivuilla <http://www.imo-2008.es/>.



Matematiikkaolympialaiset 2008 – kuusi vaikeaa tehtävää

Matti Lehtinen

Maanpuolustuskorkeakoulu

49. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Madridissa 14.–22. heinäkuuta 2008. Kilpailijoita oli 535 ja he edustivat 97:ää eri maata. Kilpailijoilla oli tavan mukaan edessään kahtena päivänä pidetyissa neljän ja puolen tunnin mittaisissa kokeissa kuusi tehtävää.

Tehtävien laadintaprosessi on kolmivaiheinen. Kaikilla olympialaisiin osallistuvilla mailla, käytännössä henkilöillä, jotka eri maissa osallistumista hoitavat, on mahdollisuus lähettää tehtäväehdotuksia. Ehdotuksia käsittelee asiantuntijakomitea, joka valitsee tehtävistä noin 30 esiteltäviksi kaikkien joukkueiden johtajista koostuvalle siis noin satajäseniselle tuomaristolle. Komitea ryhmittelnee ehdotuksensa neljään aihealueeseen: algebra, kombinatoriikka, geometria ja lukuteoria. Tuomaristo saa tutustua tehtäviin ensin ilman ratkaisuja ja sitten komitean toimittamien ratkaisuehdotusten kera. Tämän jälkeen tuomaristo valitsee parin päivän aikana perusteellisten keskustelujen jälkeen kuusi tehtävää yrittäen pitää silmällä sekä eri aihealueiden edustusta että vaikeustason vaihtelua. Käsillä olevaan sarjaan päätyi kaksi geometrian tehtävää, kaksi algebran kategoriasta valittua, yksi kombinatorinen ja yksi lukuteoreettinen tehtävä. Jakauma oli tavanomainen.

Käsittelen seuraavassa tehtävät vaikeusjärjestyksessä helpoimmasta alkaen. Järjestys perustuu kilpailijoiden suorituksiin, mutta se käy myös yksiin tuomariston ajatusten kanssa. Tapana on asettaa helpoimmat tehtävät sarjan numeroiksi 1 ja 4, jolloin kumpanakin kilpailupäivänä ensimmäinen tehtävä on helpoin. Vaikeimmiksi arvioidut tehtävät saavat numerot 3 ja 6. Mate-

matiikkaolympialaisiin on vakiintunut käytäntö, jonka mukaan kunkin tehtävän arvosteluasteikko on 0 – 7. Kunkin tehtävän kohdalla jaossa oli siis $535 \cdot 7 = 3745$ pistettä.

Tehtävä 1: helppo geometrian tehtävä

Arvostelussa eniten pisteitä, 2664 eli 71 % mahdollisista, kertyi tehtävälle 1, joka oli luonteeltaan geometrinen. Tehtävä oli alkuaan Venäjän ehdotus. Seitsemän pisteen suorituksia oli 321, nollan 59.

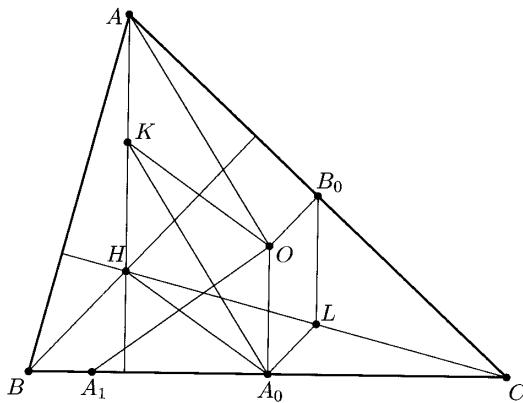
Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste on H . Piste H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun BC keskipiste, leikkaa suoran BC pisteissä A_1 ja A_2 . Vastaavasti pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun CA keskipiste, leikkaa suoran CA pisteissä B_1 ja B_2 , ja pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun AB keskipiste, leikkaa suoran AB pisteissä C_1 ja C_2 . Osoita, että pisteet A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 ja C_2 ovat samalla ympyrällä.

Tehtävän ratkaisun kannalta olennainen on huomio, jonka mukaan ympyrän keskipiste on jokaisen ympyrän jänteen keskinormaalilla. Jos tehtävässä kysytty ympyrä on olemassa, sen keskipisteen on oltava janojen A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2 keskinormaaleilla. Toisaal-

ta näiden janojen keskipisteet A_0 , B_0 ja C_0 ovat kolmion sivujen keskipisteet ja mainitut keskinormaalit ovat samalla kolmion sivujen keskinormaaleja. Tehtävässä vaaditun ympyrän keskipisteeksi käy siis ainoastaan keskinormaalien leikkauspiste eli kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O . Pelkästään tämä havainto oikeutti arvostelukriteerien mukaan yhteen pisteeseen. Tehtävien esivalintakomitean tarjoama ratkaisu oli melko lailla laskentoa välttävä. Se jatkui jo mainitun havainnon jälkeen suunnilleen seuraavasti:

Olkoon kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde R . Koska $A_0H = A_0A_1$, Pythagoraan lauseesta saadaan

$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2. \quad (1)$$



Olkoot K ja L janojen AH ja CH keskipisteet. Kolmioista BCH ja CAH saadaan $A_0L \parallel BH$ ja $B_0L \parallel AH$. Koska $BH \perp AC$ ja $OB_0 \perp AC$, niin $A_0L \parallel OB_0$. Vastavasti $B_0L \parallel OA_0$. Nelikulmio A_0LB_0O on siis suunnikas, joten $OA_0 = B_0L = KH$. Koska $KH \parallel OA_0$, HA_0OK on suunnikas. Samoin KA_0OA on suunnikas. Siis $A_0K = OA = R$. Sovelletaan suunnikaslausetta (jonka mukaan suunnikkaiden lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa) suunnikkaaseen HA_0OK ; saadaan

$$2(OA_0^2 + A_0H^2) = OH^2 + A_0K^2 = OH^2 + R^2. \quad (2)$$

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan heti $OA_1^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$. Tiedetään, että $OA_1 = OA_2$. Toisaalta sama lasku antaa saman arvon suureille OB_1^2 ja OC_1^2 ja $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$. Kysytyt pisteet ovat siis kaikki samalla O -keskisellä ympyrällä.

Samaan johtopäätökseen saattaa päätyä laskennollisemminkin. Suomen joukkueessa kilpailleet Janne Junnila ja Sylvester Eriksson-Bique nojautuivat molemmat kosinilauseeseen. Suorakulmaisesta kolmiosta OB_0A_0 saadaan heti

$$OA_0^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2. \quad (3)$$

Olkoot kolmion kulmat α , β ja γ . Koska $\angle BCH = 90^\circ - \beta$, niin kosinilause sovellettuna kolmioon A_0CH

antaa $A_0H^2 = \frac{1}{4}a^2 + HC^2 - a \cdot HC \cdot \sin \beta$. Yhtälöiden (1) ja (3) perusteella $OA_1^2 = R^2 + HC^2 - a \cdot HC \cdot \sin \beta$. Mutta $\angle HAC = 90^\circ - \gamma$ ja $\angle HCA = 90^\circ - \alpha$, joten $\angle AHC = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$. Sinilause sovellettuna kolmioon AHC antaa siis

$$\frac{HC}{\cos \gamma} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Kun muistetaan laajennetun sinilauseen mukainen $2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, saadaan

$$\begin{aligned} OA_1^2 &= R^2 + \frac{b^2 \cos^2 \gamma}{\sin^2 \beta} - ab \cos \gamma \\ &= R^2 + 4R^2 \cos^2 \gamma - ab \cos \gamma \\ &= R^2(1 + 4 \cos \gamma (\cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta)). \end{aligned}$$

Otetaan huomioon se, että $\cos \gamma = \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta)$ ja käytetään kosinin yhteenlaskukaavaa. Saadaan $OA_1^2 = R^2(1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$. Koska lauseke on symmetrinen kolmion kulmien vaihtelujen suhteen, on oltava $OA_1 = OA_2 = \dots = OC_2$.

Edellinen lasku – ja sen monenlaiset variaatiomahdollisuudet – vaativat jossain määrin trigonometriasta silmää. Tehtävästä selviää kuitenkin aivan raa'alla työlläkin, jos asettaa kolmion koordinaatistoon. Luonnollinen ja aina mahdollinen valinta olisi sijoittaa kolmion kärjet näin: $A = (a, b)$, $B = (0, 0)$ ja $C = (1, 0)$. Silloin $A_0 = (\frac{1}{2}, 0)$, $B_0 = (\frac{1}{2}(1+a), \frac{b}{2})$ ja $C_0 = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$. Sivun AB keskinormaalin yhtälö on $y - \frac{b}{2} = -\frac{a}{b}(x - \frac{a}{2})$ ja pisteen O y -koordinaatti saadaan sijoittamalla tähän $x = \frac{1}{2}$. Tästä saadaan $O = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2b}(a^2 + b^2 - a))$. Vastavasti piste H saadaan suorien $x = a$ ja $y = -\frac{a}{b}(x-1)$ leikkauspisteinä. Näin ollen $H = (a, \frac{a(1-a)}{b})$. Kun kaikki tarvittavat koordinaatit tiedetään, on helppo laskea suuret O :n etäisyydet pisteistä $A_1, \dots, C_2$; edellä sanotun perusteella näiden etäisyyksien neliöt ovat $OA_0^2 + A_0H^2$, $OB_0^2 + B_0H^2$ ja $OC_0^2 + C_0H^2$. (Ne on kaikki laskettava, koska kolmion kärjet eivät nyt ole suoraan vaihdettavissa.) Sieventelyjen jälkeen jokaisesta neliösummasta tulee sama, nimittäin

$$\frac{1}{4b^2}(5a^4 + b^4 + 6a^2b^2 - 10a^3 - 6ab^2 + 5a^2 + b^2).$$

Tehtävä 4: funktionaaliyhtälö pienen koukun kera

Toisen kilpailupäivän ensimmäinen tehtävä tuotti kilpailijoille pisteitä 2355 eli lähes saman verran kuin ensimmäisenkin päivän helppo tehtävä. Seitsemän pisteen suorituksia kirjattiin 227 ja nollan 69. Tehtävä oli Etelä-Korean ehdotus. Tuomariston etukäteisarvioissa tätä tehtävää arveltiin kaikkein helpoimmaksi. Tehtävä oli seuraava:

Määritä kaikki funktiot $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (f on siis positiivisten reaalilukujen joukossa määritelty funktio, jonka arvot ovat positiivisia reaalilukuja), joille pätee

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla w, x, y ja z , jotka toteuttavat ehdon $wx = yz$.

Tehtävän alkuperäisversiossa esiintyi vain funktion määrittely $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, mutta tuomaristossa esitetyt epäilyt merkinnän outoudesta koululaiskilpailijoille aiheuttivat selittävän lisäyksen tekstiin. Matemaatiikkaolympialaisten perinteisiin toimintatapoihin kuuluu mahdollisuus esittää kirjallisia kysymyksiä tuomaristolle kilpailun alussa. Selityksenkin jälkeen merkintä aiheutti lukuisia tiedusteluja, joissa udeltiin merkinnän $(0, \infty)$ sisältöä. Joissakin tehtävien kieliversioissa olikin käytetty bourbakilaista avoimen välin merkintää $]0, \infty[$.

Funktionaaliyhtälötehtävien normaalin ratkaisumetodiikan mukaan tehtävää ratkaistaessa oletetaan funktion f toteuttavan tehtävän ehdon, ja haetaan funktion ominaisuuksia. Yksi perustilanne on tutkia funktion arvoa yksinkertaisilla argumentin arvoilla. Tässä yksi ilmeinen tarkasteltava argumentin arvo on 1. Asettamalla $w = x = y = z = 1$ saadaan

$$\frac{2f(1)^2}{2f(1)} = 1,$$

josta seuraa $f(1) = 1$. Tämä havainto arvioitiin yhden pisteen arvoiseksi. Kun funktion määrittelyehdossa esiintyy toisia potensseja, on melko luonnollinen yrite sijoittaa argumenteiksi neliöjuuria. Olkoon siis $w > 0$, $x = 1$, $y = z = \sqrt{w}$. Nyt

$$\frac{f(w)^2 + 1}{2f(w)} = \frac{w^2 + 1}{2w}.$$

Tämä $f(w)$:n toisen asteen yhtälö sievenee muotoon

$$(wf(w) - 1)(f(w) - w) = 0.$$

Siis joko $f(w) = w$ tai $f(w) = \frac{1}{w}$. On helppo todentaa, että funktiot $f(x) = x$ ja $f(x) = \frac{1}{x}$ (kaikilla $x > 0$) toteuttavat yhtälön. Ratkaisu, jossa oli edetty tähän asti, arvioitiin neljän pisteen arvoiseksi.

On tietenkin olemassa äärettömän monta funktiota, jolle $f(x) = x$ joillain x ja $f(x) = \frac{1}{x}$ joillain toisilla x . Tehtävässä ei funktion f oletettu omaavan mitään säännöllisyysominaisuutta kuten esimerkiksi jatkuvuutta. Osoittautuu kuitenkin, että vain funktiot $f(x) = x$ kaikilla $x > 0$ ja $f(x) = \frac{1}{x}$ kaikilla $x > 0$ voivat tulla kysymykseen. Todistetaan tämä epäsuorasti. Tehdään siis vastaoletus, jonka mukaan olisi olemassa tehtävän ehdot toteuttava funktio f , joka ei olisi

kumpikaan edellä mainituista funktioista. Silloin olisi olemassa positiiviset luvut a ja b , $a, b \neq 1$, niin että $f(a) = \frac{1}{a}$ ja $f(b) = b$. Asetetaan $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$. Saadaan

$$\frac{\frac{1}{a^2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

eli

$$f(ab) = \frac{ab(a^{-2} + b^2)}{a^2 + b^2}.$$

Mutta $f(ab)$ on joko ab tai $\frac{1}{ab}$. Edellisessä tapauksessa on oltava $a^{-2} = a^2$ eli $a = 1$. Jälkimmäisessä tapauksessa $a^2b^2(a^{-2} + b^2) = a^2 + b^2$, josta seuraa $b = 1$. Kumpikin vaihtoehto johtaa ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä.

Tehtävä 2: epäyhtälö – yhtäsuuruus eksoottinen

Kolmanneksi helpoin tehtävä oli ensimmäisen kilpailupäivän toinen tehtävä, sekin algebrallinen. Tehtävän ehdottaja oli Itävalta. Se tuotti 1371 pistettä eli 37 % maksimista. seitsemän pisteen suorituksia oli 94, nollan 110. Tehtävä oli kaksiosainen epäyhtälötehtävä:

(a) Todista, että

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

kaikille reaaliluvuille x, y ja z , jotka ovat eri suuria kuin 1 ja joille pätee $xyz = 1$.

(b) Osoita, että äärettömän monella rationaalilukukolmikolla x, y, z , missä kaikki luvut ovat eri suuria kuin 1 ja $xyz = 1$, edellisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus.

Tehtävä arvosteltiin niin, että (a)-kohdan oikean ratkaisun arvo oli neljä ja (b)-kohdan kolme pistettä. Kun lukemattomissa epäyhtälötehtävissä yhtäsuuruusehto on yleensä jotenkin triviaali, niin erityisesti (b)-kohta tekee tästä tehtävästä mielenkiintoisen.

(a)-kohdan ratkaisumahdollisuuksista rajautuvat pois neliöllisen keskiarvon ominaisuuksien käyttö, koska mukana saattaa olla negatiivisia lukuja. Ratkaisuyrityksiä, joissa epäyhtälö todetaan päteväksi positiivisille luvuille, ei palkittu pistein. Ratkaisu onnistuu mukavasti, kun tehdään muuttujanvaihto

$$\frac{x}{x-1} = a, \quad \frac{y}{y-1} = b, \quad \frac{z}{z-1} = c$$

eli

$$x = \frac{a}{a-1}, \quad y = \frac{b}{b-1}, \quad z = \frac{c}{c-1}.$$

On siis todistettava, että $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$, kun $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$ ja kun $a, b, c \neq 1$. Mutta viimeinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälöiden

$$\begin{aligned} a + b + c - 1 &= ab + bc + ca, \\ 2(a + b + c - 1) &= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2 &= (a + b + c)^2 - 2(a + b + c), \\ a^2 + b^2 + c^2 - 1 &= (a + b + c - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

kanssa. Väite on siis tosi.

(b) Edellisen yhtälöketjun viimeinen yhtälö osoittaa, että alkuperäisessä yhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$. Yhtäsuuruus pätee siis abc -avaruudessa koko sillä ympyrällä, joka syntyy pallon $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ja tason $a + b + c = 1$ leikkauksena. Tältä ympyrältä on nyt löydettävä rationaalikoordinaattisia pisteitä. Koska $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$, yhtäsuuruuden ehto on yhtälöiden $a + b + c = 1$ ja $ab + bc + ca = 0$ yhtäaikainen voimassaolo, sekä $a, b, c \neq 1$. Kun yhtälöistä eliminoidaan c , saadaan $a^2 + ab + b^2 = a + b$. Tulkitaan tämä b :n toisen asteen yhtälöksi. Yhtälön diskriminantti on $D = (a-1)^2 - 4a(a-1) = (1-a)(1+3a)$. Saamme rationaalisia ratkaisuja, jos valitsemme a :n niin, että $1-a$ ja $1+3a$ ovat rationaaliluvun neliöitä; tällöin diskriminantti ja b ovat myös rationaalisia ja samoin $c = 1 - a - b$. Asetetaan $a = \frac{k}{m}$, missä k ja m ovat kokonaislukuja. Jos $m = k^2 - k + 1$, niin $m - k = (k-1)^2$ ja $m + 3k = (k+1)^2$. Tällöin $D = \frac{(k^2-1)}{m^2}$ ja $b = \frac{1}{2m}(m - k \pm (k^2 - 1))$ ja $c = \frac{1-k}{m}$. Kun $k \neq 1$, niin $a, b, c \neq 1$. Kun k käy läpi luonnolliset luvut > 1 , saadaan tällä tavoin äärettömän monta yhtälön $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa (a, b, c) . Koska x, y ja z ovat a :n, b :n ja c :n rationaalilausekkeita (ja eri a :t, b :t ja c :t vastaavat eri x :iä, y :itä ja z :ja), saadaan äärettömän monta tehtävän yhtälön toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa (x, y, z) .

Tehtävä 5: lamppuja sytytellään ja sammutellaan

Odotusten mukaisesti tehtävä 5, toisen päivän keskimäinen tehtävä ja sarjan ainoa kombinatoriikan edustaja, osoittautui vaikeusjärjestyksessä neljänneksi. Pisteitä kertyi 1111, 30 % maksimista. Tehtävä oli joko osattu tai ei: seitsemän pisteen vastauksia oli 132 ja nollan 295. Tehtävä oli Ranskan ehdottama. Tehtävässä tarkasteltiin $2n$ bitin systeemin tilanmuutoksia. Systeemi oli visualisoitu lamppuina.

Olko n ja k , $k \geq n$, positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon $k - n$ parillinen. Olkoon annettuna $2n$ lamppua, jotka on varustettu numeroin $1, 2, \dots, 2n$ ja joista jokainen voi palaa tai olla pimeänä. Aluksi kaikki lamput

ovat pimeinä. Tarkastellaan askelista koostuvia jonoja. Jokaisella askeleella jonkin lampun tila vaihdetaan päinvastaiseksi (lamppu sytytetään tai sammutetaan).

Olkoon N kaikkien sellaisten k :sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput $1, \dots, n$ palavat ja lamput $n+1, \dots, 2n$ ovat pimeinä.

Olkoon M kaikkien sellaisten k :sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput $1, \dots, n$ palavat ja lamput $n+1, \dots, 2n$ ovat pimeinä, mutta lamppuja $n+1, \dots, 2n$ ei ole kertaakaan sytytetty.

Määritä suhde N/M .

Kilpailijoiden kyselymahdollisuus osoitti, että jonon olemus ei tullut tehtävän tekstistä kaikille lukijoille selväksi. (Eräs kilpailija huomasi myös kysyä, voidaanko olettaa, että lamput pysyvät ehjinä, kun niitä alinomaa sytytellään ja sammutellaan.)

Sanomme, että jono, jolla päästään alkutilasta tehtävän lopputilaan, on sallittu jono, ja sallittu jono, jolla päästään lopputilaan niin, että minkään lampun $n+1, \dots, 2n$ tilaa ei muuteta, on rajoitettu jono. Rajoitettuja jonoja on olemassa, koska on mahdollista sytyttää kukin lampusta $1, \dots, n$ ja sen jälkeen sytyttää ja sammuttaa lamppua $1 \frac{1}{2}(k-n)$ kertaa. On mahdollista laskea sallittujen jonojen lukumäärä ja rajoitettujen jonojen lukumäärä binomikerroinlausekkeina. Tehtävässä kysyttyyn suhteeseen pääsee kuitenkin luontevimmin liittämällä jokaiseen rajoitettuun jonoon tietyt sallitut jonot. Olkoon X mielivaltainen rajoitettu jono ja olkoon p mielivaltainen lamppu, $1 \leq p \leq n$. Oletetaan, että jonossa X tämän lampun tilaa on muutettu k_p kertaa; k_p on pariton, koska lamppu palaa lopputilassa. Valitaan mielivaltainen parillinen määrä jonon sellaisia askelia, joissa lampun p tilaa vaihdetaan ja korvataan jokainen askeleella, jossa lampun $n+p$ tilaa vaihdetaan. Täten saadaan 2^{k_p-1} jonoa, joiden askleet yhtyvät jonon X askeliin muuten kuin valittujen p :n tilaa muuttavien askelten kohdalla. (k_p -alkioisella joukolla on 2^{k_p-1} parillisalkioista osajoukkoa.) Samalla tavalla voidaan jokaiseen lamppuun $1, \dots, n$ liittyvät tilanvaihdot siirtää lamppujen $n+1, \dots, 2n$ tilanvaihdoksi. Rajoitettuun jonoon X liittyy tällä tavoin $2^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \dots 2^{k_n-1} = 2^{k-n}$ erilaista sallittua jonoa.

Osoitetaan kääntäen, että jokainen sallittu jono Y saadaan rajoitetusta jonosta kuvatulla tavalla: korvataan jokainen lampun $q > n$ tilan muuttava Y :n askel lampun $q-n$ tilan muuttavalla askeleella. Näin saadaan eräs rajoitettu jono X . Koska jonossa Y lamppujen $q > n$ tilaa on muutettu parillinen määrä kertoja, jonon Y ja jonon X lopputilat ovat samat. Selvästi Y saadaan X :stä edellä kuvatulla menetelmällä. Jokaisesta rajoitettua jonoa kohden on siis tasan 2^{k-n} samaan lopputilaan johtavaa sallittua jonoa. Siis $N/M = 2^{k-n}$.

Pelkästään lukumäärän 2^{k-n} ilmoittaminen tuotti arvostelussa yhden pisteen.

Tehtävä 3: suuria alkutekijöitä

Molempien kilpailupäivien viimeiset tehtävät oli tarkoitettu vaikeiksi, erottamaan jyvät akanoista. Etukäteisarvioinneissa nimenomaan lukuteoreettista tehtävää 3 arvioitiin jopa ylivoimaisen vaikeaksi. Tehtävä oli Lietuan ehdottama. Se tuotti kilpailijoille 430 pistettä eli 11 % mahdollisista. Täydet pisteet tehtävästä sai 46 kilpailijaa, 438 jäi nolville. Tehtävän muotoilu oli lyhyt:

Osoita, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua n , jolle luvulla $n^2 + 1$ on lukua $2n + \sqrt{2n}$ suurempi alkutekijä.

Tehtävä liittyy selvästi ainakin kirjoittajan tietämän mukaan yhä avoimeen ja tutkimuksen kohteena olevaan ongelmaan siitä, onko muotoa $n^2 + 1$ olevien lukujen joukossa äärettömän monta alkulukua. Esivalintakomitean ja arvattavasti tehtävän ehdottajan ratkaisu perustui tietoihin, jotka eivät ole alkeellisinta lukuteoriaa: siihen että muotoa $8k + 1$ olevia alkulukuja on äärettömän paljon ja siihen, että kongruenssilla $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ on ratkaisu, kun p on alkuluku. Edellinen tieto seuraa esimerkiksi tunnetusta mutta varsin epätriviaalista Dirichlet'n lauseesta, jonka mukaan jokaisessa päättymättömässä aritmeettisessä jonossa on äärettömän monta alkulukua, jälkimmäinen vaikkapa kohtalaisen alkeellisesta Wilsonin lauseesta, jonka mukaan $(p-1)! + 1$ on jaollinen p :llä, kun p on alkuluku. Arvatavasti nämä asiat eivät olisi olleet vieraita kilpailijoiden hyvin valmentautuneelle parhaimmistolle. Tehtävää ei olisi kuitenkaan kelpuutettu, ellei sille olisi tuomaristossa löydetty myös sinänsä alkeellisia ratkaisuja. Sellainen on seuraava.

Tarkastellaan kokonaislukua $k \geq 20$. Olkoon p jokin luvun $(k!)^2 + 1$ alkutekijä. Silloin $p > 20$ eikä luvuilla p ja $k!$ ole yhteisiä tekijöitä. Olkoon $x \equiv k! \pmod{p}$ ja $0 < x < p$. Jos $p/2 > x$, niin $p - x < p/2$ ja $p - x \equiv -k! \pmod{p}$. Joka tapauksessa on olemassa n , $0 < n < p/2$, niin että $n^2 \equiv (k!)^2 \equiv -1 \pmod{p}$. p on siis luvun $n^2 + 1$ tekijä. Tästä seuraa edelleen $(p - 2n)^2 = p^2 - 4pn + 4n^2 \equiv 4n^2 \equiv -4 \pmod{p}$. Siis $(p - 2n)^2 \geq p - 4$ eli $p \geq 2n + \sqrt{p-4} > 2n + \sqrt{2n}$, jos $p > 20$, sillä tällöin $p - 4 \geq 2n + \sqrt{p-4} - 4 > 2n$. On vielä osoitettava, että ehdon täyttäviä lukuja n on äärettömän monta. Olkoon n ja p edellä tuotetut luvut. Olkoon q jokin luvun $(p^2)^2 + 1$ alkutekijä. Samoin kuin edellä löydetään n' , $n' < q/2$, niin että q on $n'^2 + 1$:n tekijä ja $q > 2n' + \sqrt{2n'}$. Toisaalta $n'^2 + 1 > q > p^2 > 4n^2 > n^2 + 1$, joten $n' > n$. Jokaista ehdon täyttävää kokonaislukua kohden löytyy siis suurempi ehdon täyttävä kokonaisluku, joten ehdon täyttäviä kokonaislukuja on äärettömän monta.

Tehtävän antama alaraja alkutekijöiden koolle ei ole mitenkään paras mahdollinen. Pitemmälle menevin keinoin on todistettavissa, että alarajaksi voisi saada ainakin luvun $n \ln n$.

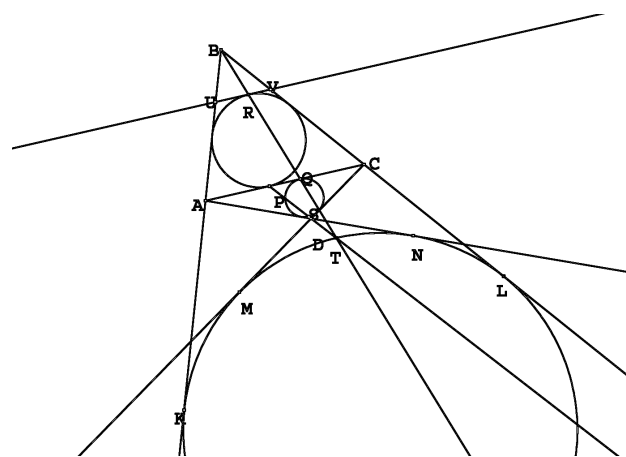
Tehtävä 6: erikoinen homotetia

Toinen geometrian tehtävä oli toisen kilpailupäivän viimeinen tehtävä. Se oli samoin kuin toinenkin sarjan geometriatehtävä Venäjän ehdottama. Tehtävä oli selvästi koko sarjan vaikein. Se tuotti kilpailijoille vain 137 pistettä eli alle 2 % mahdollisista. Täydet pisteet tehtävästä sai 12 kilpailijaa, nolville jäi 482. Tehtävässä tarkasteltiin geometrista konfiguraatiota, jonka hahmottaminen ei ole heti ihan helppoa:

Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ on $BA \neq BC$. Kolmioiden ABC ja ADC sisään piirretyt ympyrät ovat ω_1 ja ω_2 . Oletetaan, että on olemassa ympyrä ω , joka sivuaa puolisuoraa BA eri puolella A :ta kuin B ja puolisuoraa BC eri puolella C :tä kuin B ja joka myös sivuaa suoria AD ja CD . Osoita, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste on ympyrällä ω .

Ratkaisu perustuu vahvasti homotetiakuvauxsiin. Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 välisen homotetiakuvauxsen homotetiakeskus on ympyrällä ω .

Osoitetaan ensin, että ympyrän ω olemassa olo asettaa rajoituksen nelikulmion $ABCD$ muodolle. Olkoot ympyrän ω ja suorien BA , BC , CD ja AD sivuamispisteet K , L , M ja N . Nyt $AB + AD = (BK - AK) + (AN - DN) = BL - AN + AN - DM = BL - (CM - CD) = BL - CL + CD = BC + CD$.



Olkoon nyt P ympyrän ω_1 ja sivun AC yhteinen piste; olkoon R ympyrän ω_1 P :n kautta piirretyyn halkaisijan toinen päätepiste ja Q BR :n ja AC :n leikkauspiste. Olkoot vielä U ja V R :n kautta piirretyyn ω_1 :n tangentin ja suorien BA ja BC leikkauspisteet. B -keskinen homotetia, joka kuvaa UV :n janaksi AC , kuvaa ympyrän

ω_1 , joka on kolmion BUV sivuun UV liittyvä sivu ympyrä, kolmion BAC sivuun AC liittyväksi sivu ympyräksi. Q on näin ollen viimeksimainitun sivu ympyrän ja sivun AC yhteinen piste. On helppo nähdä (ja tunnettua), että kolmion XYZ sisään piirretyn ympyrän sivuamispisteen etäisyys kolmion kärjestä X on sama kuin sivuun XY liittyvän sivu ympyrän sivuamispisteen etäisyys kärjestä Y . Näin ollen $AP = CQ$.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän sivuamispisteen ja kolmion kärjen etäisyys on laskettavissa tunnetun (ja helposti johdettavan) kaavan avulla. Sen mukaan $AP = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$. Vastaavasti kolmion ADC sisään piirretyn ympyrän ja sivun AC yhteiselle pisteelle Q' saadaan $CQ' = \frac{1}{2}(AC + CD - AD)$. Koska edellä sanottu mukaan tehtävän nelikulmiolle pätee $AB - BC = CD - AD$, on $CQ' = AP = CQ$. Q on siis ympyrän ω_2 ja suoran AC yhteinen piste. Vastaavalla tavalla näh-

dään, että ympyrän ω_2 pisteeseen Q piirretyn halkaisijan toinen päätepiste S , D ja P ovat samalla suoralla.

Olkoon sitten T ympyrän ω AC :n suuntaisen tangentin sivuamispiste (tarkemmin sanoen se niistä, joka on lähempänä suoraa AC). Homotetia, jonka keskus on B ja homotetiasuhde $\frac{BT}{PR}$, kuvaa ympyrän ω_1 ympyräksi ω . B , R , Q ja T ovat siis samalla suoralla. Vastaavasti homotetia, jonka keskus on D ja homotetiasuhde $-\frac{DT}{DS}$, kuvaa ympyrän ω_2 ympyräksi ω . P , S , D ja T ovat siis samalla suoralla. Mutta koska ympyröiden ω_1 ja ω_2 halkaisijat PR ja SQ ovat yhdensuuntaiset, ne kuvautuvat toisilleen T -keskisessä homotetiassa. Tästä seuraa, että itse ympyrät ω_1 ja ω_2 kuvautuvat toisilleen tässä homotetiassa. Mutta tällöin T :n on oltava ympyröiden yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste, ja todistus on valmis.