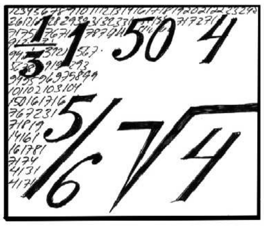


Onko $\sqrt{-1}$ olemassa? Keskipituinen kertomus lukujen olemuksesta, 1. osa

Antti Valmari

Tiivistelmä

Tämän kirjoituksen tavoitteena on kertoa lukujen olemuksesta ja matemaattisen määrittelemisen luonteesta tavallista helppotajuisemmin. Kirjoituksessa pohditaan muun muassa, miksi $\frac{1}{0}$ ei ole luku, mutta $\sqrt{-1}$ on. Myös selviää, miksi uusien lukujen keksiminen on loppunut kompleksilukuihin.

Lukuja ja lisää lukuja

Luonnolliset luvut 0, 1, 2, 3, ... tuntuvat koulun matematiikan opintojen jälkeen tutuilta ja turvallisilta. Murtoluvut on helppo ymmärtää vaikka kakkuviipaleiden avulla. Negatiivisia lukuja näemme lämpömittarissa ja huomaamme, että niissäkään ei ole kyse mistään omituisesta asiasta: nehän ovat vain muitten lukujen jatke nollasta alaspäin. Negatiiviset luvut tuntuvat hyvin todellisilta ainakin silloin, kun maksetaan asuntolainan lyhennystä!

Kaikkia näitä lukuja yhdessä kutsutaan *rationaaliluvuiksi*. Sana "murtoluku" lienee monille tutumpi. Jos ollaan tarkkoja, se ei tarkoita lukuarvoa vaan luvun esitystapaa. Esimerkiksi 2 ei ole murtoluku mutta $\frac{6}{3}$ on, vaikka ne molemmat esittävät samaa lukuarvoa. "Rationaaliluvut" tarkoittavat niitä lukuarvoja, jotka voidaan esittää murtolukuina.

Muinaiset kreikkalaiset huomasivat, että neliön lävistäjän pituuden suhde sivun pituuteen ei ole esitettävissä murtolukuna [1, ss. 118–120]. Toisin sanoen, $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku. Rationaaliluvut eivät siis sisällä kaikkia lukusuoran lukuja. Niitä lukusuoran lukuja, jotka eivät ole rationaalilukuja, kutsutaan *irrationaaliluvuiksi*. Kaikki lukusuoran luvut yhdessä ovat *reaaliluvut*.

Sana "rationaalinen" tarkoittaa järkevää, suunnitelmallista ja tarkoituksenmukaista [3], siis tyhmän tai älyttömän vastakohtaa. Sanan "rationaaliluvut" voisi siis leikkimielisesti suomentaa "järjenmukaiset luvut", "irrationaaliluvut" ovat "järjenvastaisia" tai "älyttömiä" lukuja, ja "reaaliluvut" ovat "todelliset luvut". Nimet varmaankin kuvastavat sitä hämmennystä, mikä ihmisillä on joskus ollut uusien lukutyyppien edessä.

Irrationaaliluvut todella ovat hankala asia. Niitä on nimittäin aivan liikaa. Kokonaislukuja on niin vähän, että jokaiselle on riittänyt oma nimi. Tarkemmin sanoen, mikä tahansa kokonaisluku voidaan esittää päättyvänä jonona merkkejä siten, että ensimmäisenä on tai ei ole etumerkki "−", ja sen jälkeen on jokin äärellinen määrä numeromerkkejä "0", "1", "2", ..., "9". Itse asiassa tämä esitystapa antaa jokaiselle kokonaisluvulle monta nimeä — esimerkiksi 0, 00 ja −0 ovat sama luku, mutta se ei haittaa. Tärkeää tässä on vain se, että jokaisella kokonaisluvulla on *ainakin* yksi nimi.

Myös jokaisella muulla rationaaliluvulla on ainakin yksi nimi — itse asiassa äärettömän monta nimeä. Ne saadaan kirjoittamalla vaakasuoran viivan päälle yksi ja sen alle toinen kokonaisluku, tai vaihtoehtoisesti kokonaisluku, "/" ja kokonaisluku. Esimerkiksi $\frac{-23}{456}$ ja $\frac{46}{-912}$ ovat saman luvun kaksi eri nimeä, ja ne voidaan esittää myös $-23/456$ ja $46/-912$.

Mutta jokaiselle irrationaaliluvulle ei riitä omaa nimeä, sillä nimiksi hyväksytään vain päättyvät merkkijonot. Jokainen irrationaaliluku voidaan tosin esittää päättymättömänä desimaalilukuna — harmi vain, että sellaisten kirjoittaminen joudutaan aina jättämään kesken, ja loppu korvaamaan kolmella pisteellä: $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$. Siksi sellaista esitystapaa ei kelpuuteta nimeksi. Päättyvien esitystapojen puutteesta aiheutuu ongelmia, joiden vuoksi matematiikot alkoivat kunnolla ymmärtää irrationaalilukuja vasta 1800-luvulla [1, ss. 783–789].

Irrationaalilukujen ongelmat ovat niin vaikeita, että emme tarkastele niitä tällä kertaa tämän enempää. Tämän kirjoituksen pääaiheena on toinen, paljon helpompi ongelma: imaginaariluvut ja kompleksiluvut. Joku on ehkä joskus kuullut niistä huhuja, joku toinen ymmärtää ne hyvin.

"Imaginaarinen" tarkoittaa kuviteltua, epätodellista [3]. Siis nimikin jo kertoo, että imaginaariluvut ovat outoja kummajaisia. Ne eivät mahdu lukusuoralle, vaikka, kuten nähtiin, lukusuoralla on niin monta lukua, että jokaiselle ei edes riitä nimeä. Mihin niitä tarvitaan? Mitä niillä lasketaan tai mitataan? Ovatko ne edes oikeasti olemassa?

Laskulakeja

Luvut eivät olisi alkuunkaan niin hyödyllisiä kuin ovat, ellei olisi keksitty *laskutoimituksia*. Tärkeimmät laskutoimitukset ovat yhteenlasku ja kertolasku.

Kuten hyvin tiedetään, yhteenlaskun lopputulos on riippumaton siitä, missä järjestyksessä luvut lasketaan yhteen. Esimerkiksi $(8+5)+2 = 13+2 = 15$, $(8+2)+5 = 10+5 = 15$, $(2+5)+8 = 7+8 = 15$ ja niin edelleen. Tämä on tärkeä asia, sillä kaikilla laskutoimituksilla ei ole tätä ominaisuutta. Esimerkiksi $(8-5)-2 = 3-2 = 1$ ja $8-(5-2) = 8-3 = 5$, joten $(8-5)-2 \neq 8-(5-2)$. Myös $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$.

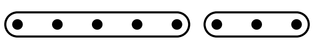
Yhteenlaskun lopputuloksen riippumattomuus laskujärjestyksestä koostuu oikeastaan kahdesta eri asiasta. Ensiksi, yhteenlasku on *vaihdannainen*, eli ovatpa a ja b mitä lukuja tahansa, aina pätee $a+b = b+a$. Edellä oleva esimerkki $2^3 \neq 3^2$ osoittaa, että potenssilasku ei ole vaihdannainen. Myöskään vähennyslasku ei ole vaihdannainen, koska $3-2 = 1 \neq -1 = 2-3$. Yhteenlasku on myös *liitännäinen*, eli $(a+b)+c = a+(b+c)$, missä nytkin a, b ja c saavat olla mitä lukuja tahansa. Vähennyslasku ja potenssilasku eivät ole liitännäisiä. Vähennyslaskusta oli jo esimerkki, ja potenssilaskusta esimerkiksi kelpaa $(2^1)^3 = 8 \neq 2 = 2^{(1^3)}$. Myös kertolasku on vaihdannainen ja liitännäinen, ja jakolasku ei ole kumpaakaan.

Lukujen peruslaskutoimitusten tapauksessa vaihdannaisuus ja liitännäisyys kulkevat käsi kädessä. Toisin sanoen, kukin peruslaskutoimitus on joko molempia tai ei kumpaakaan. Matemaatikot ovat kuitenkin havainneet hyödylliseksi erottaa vaihdannaisuuden ja liitännäisyyden eri asioiksi, koska matematiikassa on myös laskutoimituksia, joilla on vain toinen näistä ominaisuuksista. Esimerkiksi matriisien kertolasku ja funktioiden yhdistäminen ovat liitännäisiä mutta eivät vaihdannaisia, ja pyöristysvirheiden aiheuttamien ilmiöiden vuoksi taskulaskinten ja tietokoneiden käyttämien niinsanottujen liukulukujen yhteenlasku on vaihdannainen mutta ei liitännäinen. Sitäpaitsi vaihdannaisuus ja liitännäisyys on helpompi esittää kaavoina, kun ne määritellään erikseen.

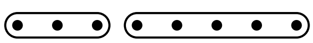
Lukujen yhteen- ja kertolaskuun liittyy tärkeä ne yhdistävä sääntö, jota sanotaan *osittelulaiksi*. Jos a, b ja c ovat mitä tahansa lukuja, niin $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$. Esimerkiksi $8\cdot(5+2) = 8\cdot 7 = 56$ ja myös $(8\cdot 5)+(8\cdot 2) = 40+16 = 56$. (Tässä on käytetty sulkuja enemmän kuin olisi välttämätöntä, jotta laskujärjestys näkyisi mahdollisimman selvästi.) Jos samaa yritetään toisinpäin, siis yhteen- ja kertolaskun roolit vaihdettuina, niin asia ei toimikaan: $8+(5\cdot 2) = 8+10 = 18$, mutta $(8+5)\cdot(8+2) = 13\cdot 10 = 130 \neq 18$.

Miksi lukujen laskutoimitukset noudattavat näitä lakeja? Miksi ne toisaalta eivät noudata joitakin kaavoja, jotka näyttävät yhtä hyviltä kuin niiden noudattamat lait? Miksi esimerkiksi $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ toimii, mutta $a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c)$ ei toimi? Tämän kysymyksen vastaus koostuu kahdesta osasta.

Ensiksi, luvut on otettu käyttöön esittämään kappalemääriä, pituuksia, pinta-aloja ynnä muita sellaisia, ja kokemuksemme mukaan kappalemäärät ja niin edelleen noudattavat näitä lakeja. Esimerkiksi yhteenlaskun $5+3$ vaihdannaisuutta voi havainnollistaa piirtämällä yhteenlaskettavat määrät vierekkäisinä pistejoukkoina:



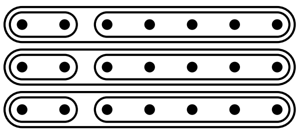
Kun kuvan kääntää ylösalaisin, se alkaakin esittää laskutoimitusta $3+5$:



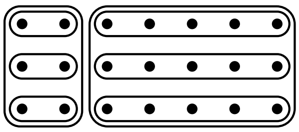
Meillä kaikilla on pienestä pitäen runsaasti kokemusta saman kuvan katsomisesta eri suunnista. Sen ansiosta olemme varmoja, että kuvassa olevien pisteiden määrä ei muutu siitä, että kuva käännetään ylösalaisin. Pelkkä ajatuskin muuttumisesta tuntuu ihan hullulta! Myös olemme varmoja, että asia ei johdu käyttämästämme pisteiden määristä 5 ja 3, vaan sama toimii mille määrille tahansa. Siis pistejoukkojen yhdistäminen tällä tavalla on vaihdannainen operaatio.

Kertolaskun vaihdannaisuutta voi havainnollistaa vastaavalla tavalla, mutta nyt pisteiden ryhmittely vaihdetaan:

Myös osittelulakia voi havainnollistaa kuvilla. Laskutoimitusta $3 \cdot (2 + 5)$ esittää kuva:



Toisella ryhmittelyllä siitä saadaan $(3 \cdot 2) + (3 \cdot 5)$:



Tämäntapainen mielikuviin vetoaminen ja sisäiseen varmuuteen luottaminen riitti matemaatikoille pitkään. Pikkuhiljaa kuitenkin paljastui, että mielikuvat johtavat joskus pahasti harhaan.

Esimerkiksi näyttää itsestään selvältä, että jatkuvalla käyrällä voi olla vain rajallisesti kulmapisteitä, eli pisteitä, joissa käyrän suunta muuttuu yhtäkkisesti. (Voidaan ajatella, että jatkuva käyrä tarkoittaa käyrää, jossa ei ole katkoskohtia, eli se voidaan piirtää nostamatta kynää paperista. Kulmapiste on piste, jossa käyrää esittävällä funktiolla ei ole derivaattaa.) 1800-luvun alkupuolella näin uskottiin yleisesti. Kuitenkin vuonna 1834 Bernhard Bolzano keksi jatkuvan käyrän, jonka jokainen piste on kulmapiste! [1, s. 723] Valitettavasti Bolzanon työt jäivät vähälle huomiolle, ja matemaatikot tulivat yleisesti tietoisiksi tällaisten kummajaisten olemassaolosta vasta Karl Weierstrassin keksittyä sellaisia uudelleen vuonna 1861 [1, s. 784].

Tilannetta kuvaa hyvin piispa George Berkeleyn jo vuonna 1734 kirjassaan "The Analyst" esittämä kiivas kritiikki [1, s. 606]. Berkeley oli suivaantunut, kun eräs "pakanallinen matemaatikko" oli väittänyt kristinuskoa kestämättömäksi. Hän pyrki osoittamaan, että silloinen tapa perustella differentiaali- ja integraalilaskenta ei ole sen parempi. Berkeley ei suinkaan väittänyt tuloksia vääriksi eikä hyödyttömiksi, mutta hän väitti, että tapa, jolla ne johdettiin, oli epäpätevä. Hän väitti, että päättelyssä tehdään raskaita virheitä, jotka kuitenkin kumoavat toisensa. Hän kirjoitti "kaksinkertaisen virheen seurauksena päädytään ei tieteeseen, mutta totuuteen". Nykypäivän näkökulmasta Berkeleyn kritiikki oli aivan oikeaa.

Jos jokin toimii yleensä mutta ei aina, on tilanne kiusallinen. Käytännöllisesti ajattelevan ihmisen näkökulmasta saattaa riittää, että se toimii yleensä. Autoja hajoaa tienposkeen ja tietokoneet takeltelevat, mutta se voidaan sietää, jos sitä ei tapahdu kovin usein. Tietokoneohjelmista ei yleensä edes yritetä saada virheettömiä, vaan testaaminen lopetetaan ja ohjelma toimitetaan markkinoille, kun ohjelma on läpäissyt valmistajan mielestä riittävän perusteelliset testit.

Matemaatikko haluaa kuitenkin olla tuloksistaan varma. Tämä pyrkimys äärimmäiseen varmuuteen on käytännöllisesti ajattelevista ihmisistä ja usein muista tiedemiehistäkin joskus turhauttavaa. Se kuitenkin on matemaatikkojen tapa toimia. Sillä on ollut omat etunsa. Se on pakottanut matemaatikot kohtaamaan silmästä silmään syvällisiä kysymyksiä, jotka käytännöllisemmän asenteen omaava ihminen olisi sysännyt syrjään mielenkiinnottomina. Ilman tätä työtä meillä tuskin olisi esimerkiksi tietokoneita. Toivottavasti ydinvoimaloiden turvajärjestelmien suunnittelijat eivät ajattele, että riittää, että se toimii suurimman osan aikaa!

Siksi matemaatikot ovat pyrkineet rakentamaan luvun käsitteen varmemmalle pohjalle kuin havainnolliset mielikuvat. Tätä työtä tehtiin erityisesti 1800-luvun lopulla. Esimerkiksi Giuseppe Peano esitti vuonna 1894 kuuluisat aksioomansa, joissa luonnolliset luvut rakennettiin kahdesta yksinkertaisesta peruskäsitteestä: nolla ja seuraava luku [1, s. 832]. Gottlob Frege määritteli vuonna 1884 luonnolliset luvut joukko-opin avulla lähtien siitä ajatuksesta, että kaksi joukkoa edustaa samaa lukua, jos ja vain jos niiden alkiot voidaan asettaa yksi–yhteen -vastaavuuteen keskenään [1, s. 831]. Toisin sanoen, tuoleja on sama määrä kuin istujia, jos jokaiselle istujalle riittää oma tuoli eikä tuoleja jää yli. Fregen määritelmä on sikäli erityisen hieno, että sen varaan voidaan rakentaa myös äärettömien lukumäärien teoria.

Kun luonnolliset luvut on saatu määriteltyä, niistä voidaan rakentaa negatiiviset kokonaisluvut ja rationaaliluvut yksinkertaisin keinoin ja reaaliluvut monimutkaisin keinoin. Palaamme tähän lukualueen laajentamiseen jäljempänä.

Yksi nykyisin usein käytetty tapa määritellä matemaattisia käsitteitä on luetella joukko lakeja. Esimerkiksi tietokoneiden ohjelmoinnissa käytetään jonkin verran käsitettä *matroidi*. Älä ole huolissasi, jos sen määritelmä näyttää vaikealta. Se on tässä kirjoituksessa vain havainnollistamassa, miltä nykyaikainen matemaattinen määritteleminen näyttää, eikä sen sisältöä tarvitse ymmärtää. Matroidi määritellään parina (S, ℓ), joka toteuttaa seuraavat ehdot [2, s. 345]:

1. S on äärellinen epätyhjä joukko.

2. ℓ on epätyhjä kokoelma S:n osajoukkoja siten, että jos $B \in \ell$ ja $A \subseteq B$, niin $A \in \ell$.

3. Jos $A \in \ell$, $B \in \ell$ ja A:ssa on vähemmän alkioita kuin B:ssä, niin on olemassa jokin alkio $x \in B - A$ siten, että $A \cup \{x\} \in \ell$.

Toinen, myös ohjelmointiin tiensä löytänyt esimerkki on *tiukka heikko järjestys*, jota merkitsemme "$\prec$" [4, s. 467]. Se on tapa verrata alkioita, ja on melko samantapainen kuin lukujen tuttu suuruusjärjestys "$<$". Sen määritelmä vaatii, että seuraavat ehdot pätevät jokaiselle kohteelle a, b ja c:

1. $a \prec a$ ei päde.

2. Jos $a \prec b$ ja $b \prec c$, niin $a \prec c$.

3. Otetaan käyttöön merkintä $a \asymp b$ tarkoittamaan, että $a \prec b$ ei päde eikä myöskään $b \prec a$ päde. Jos $a \asymp b$ ja $b \asymp c$, niin $a \asymp c$.

Tällainen tapa määritellä asioita voi tuntua aivan mielivaltaiselta — asetetaan vain joukko sääntöjä kuin šhakkipelissä. Mutta se toimii, jopa matematiikan ulkopuolella. Muutoin sitä ei käytettäisi ohjelmoinnissa.

Samaa tapaa voidaan käyttää myös lukujen määrittelemisessä. Silloin peruslaeiksi otetaan jo puheena olleet vaihdannaisuus, liitännäisyys ja osittelulaki. Esitämme ne tällä kertaa ilman tarpeettomia sulkuja. Kuten tavallista, jätämme kertolaskuoperaattorin "$\cdot$" merkitsemättä. Ei ole ennalta selvää, että laskutoimituksen voi aina suorittaa, sillä eihän esimerkiksi nollalla voi jakaa. Siksi tarvitaan säännöt sanomaan, että yhteen- ja kertolasku voidaan aina laskea.

Siis jokaiselle a, b ja c pätee:

(1) $a + b$ on olemassa.

(2) $a + b = b + a$

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(4) ab on olemassa.

(5) $ab = ba$

(6) $(ab)c = a(bc)$

(7) $a(b + c) = ab + ac$

Nämä lait eivät yksinään riitä määrittelemään, mitä lukuja on olemassa. Niiden puolesta voisi aivan hyvin olla, että vain parilliset luonnolliset luvut 2, 4, 6, ... ovat olemassa. Tämä johtuu siitä, että kahden parillisen luvun summa ja tulo ovat parillisia. Niinpä parilliset luvut toteuttavat lait (1) ja (4) yksinään — ilman, että mukana on muita lukuja. Muitten lakien toteutuminen seuraa suoraan siitä, että parillisetkin luvut ovat lukuja. (Sen sijaan lakikokoelmalle (1), ..., (7) ei kelpaa se, että vain parittomat luvut olisivat olemassa. Nehän eivät toteuta yksinään lakia (1), sillä $3 + 5 = 8$, ja 8 ei ole pariton.)

Annetut lait eivät siis takaa, että ykkönen on olemassa! Tämän korjaamiseksi lisätään uusi laki. Uudeksi laiksi ei riitä "on olemassa luku nimeltä 1", koska se kertoo ykkösestä vain nimen ja jättää kertomatta, mikä ominaisuus erottaa ykkösen muista luvuista. Määritelmähän ei sisällä ennakkotietoa, mitä mustetahra "1" tarkoittaa, joten sen näkökulmasta "on olemassa luku nimeltä 1" kertoo yhtä paljon kuin "on olemassa luku nimeltä ‡".

Mikä tekee ykkösestä ykkösen? Se, että sillä kertominen ei muuta kerrottua lukua.

(8) On olemassa luku 1 siten, että jokaisella luvulla a pätee $a \cdot 1 = a$.

Lakikokoelma ei ole vieläkään täydellinen. Se ei esimerkiksi riitä takaamaan, että $1 + 1 \neq 1$, kuten tulemme näkemään kohdassa "Mitä luvut ovat?". Se riittää kuitenkin hyvin pitkälle määräämään, miten luvuilla lasketaan. Jos esimerkiksi annetaan luvulle $1 + 1$ nimeksi 2, luvulle $2 + 1$ nimeksi 3 ja niin edelleen, ja jos oletetaan, että luvut 1, 2, 3, ... ovat keskenään erisuuret, niin nämä lait määräävät niiden yhteen- ja kertolaskujen tulokset yksikäsitteisesti. Kaikki tulokset ovat ne mitä olemme koulussa oppineet. Koko tarina on liian pitkä tässä kerrottavaksi, mutta otetaan kaksi esimerkkiä. Määritelmän $2 = 1 + 1$, lain (3) sekä määritelmien $3 = 2 + 1$ ja $4 = 3 + 1$ nojalla pätee $2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$. Lakien (7) ja (8) nojalla $2 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 + 2$, mikä edellisen tuloksen ja tiedon $2 = 1 + 1$ kanssa kertoo, että $2 \cdot 2 = 4$.

Pääsemme nyt vihdoin ja viimein toiseen osaan vastauksessamme sivulla 2 esittämäämme kysymykseen: miksi luvut noudattavat niitä lakeja joita ne noudattavat, eikä muita lakeja? Tähän mennessä olemme todenneet, että ne asiat, joista puhumista varten luvut on otettu käyttöön — kappalemäärät, pituudet, pinta-alat ja niin edelleen — noudattavat juuri niitä lakeja, ainakin siinä määrin kuin ylipäänsä on järkevää puhua laeista tällaisten havainnollisiin mielikuviin perustuvien kohteiden yhteydessä.

Nyt kuitenkin olemme luopuneet lukujen rakentamisesta tällaisten mielikuvien varaan ja olemme korvaamassa sen täsmällisellä määritelmällä. Kun lukuja määritellään antamalla laskulakeja, laskulait pätevät siitä yksinkertaisesta syystä, että määritelmässä julistetaan, että ne pätevät! Eikö tämä ole kehäpäätelmä? Eikö tämä ole tyhjän päälle rakentamista?

Ei ole. Matemaatikko saa asettaa mitkä lait tahansa ja tutkia niin syntyvää järjestelmää. Toisinaan käy niin, että lait ovat keskenään ristiriidassa. Määritelty käsite on silloin mahdoton eikä sitä ole olemassa. Tilanne on samankaltainen kuin yhtälöllä, jolla ei ole ratkaisua. Mikä on se luku x, jolle pätee $x = x + 2$? Ei sellaista lukua ole. Jos lait eivät ole keskenään ristiriidassa, niin määritelty käsite on silloin matemaatikoiden mielestä olemassa. Kohdissa ""Velkaluvut"" ja "Lopuksi" pohditaan tätä asiaa lisää.

Mutta eikö tästä seuraa, että luonnollisten lukujen lait on valittu mielivaltaisesti, kuten šakkipelin säännöt? Ei. Lakeja ei ole valittu mielivaltaisesti. Ne on valittu sen mukaan, miten uskomme kappalemäärien, pituuksien ja pinta-alojen käyttäytyvän. Luvut noudattavat lakeja (1), ..., (8), koska olemme tahallamme määritelleet luvut niin, että ne noudattavat niitä, ja olemme tahallamme määritelleet ne niin, jotta ne käyttäytyisivät samalla tavalla kuin asiat, joita haluamme esittää luvuilla.

Asiassa on vielä yksi tärkeä puoli. Vaikka määritelmiä voi asettaa miten vain, silti ei saada aikaan minkälaisia lukujärjestelmiä tahansa. Jatkossa tulemme esimerkiksi näkemään, että jos halutaan lukujärjestelmä, joka sisältää kaikki reaaliluvut ja jotain muutakin, niin vaihtoehtoja on vain yksi. (Täsmennämme jatkossa, mitä tarkoitamme sanoilla "luku" ja "lukujärjestelmä".) Vaihtoehtoisia määritelmiä on monta. Kuitenkin, kun niiden tuottamia järjestelmiä katsotaan tarkasti, huomataan, että ne ovat yksi ja sama järjestelmä esitettynä eri tavoin.

Siis luvut noudattavat niitä lakeja mitä noudattavat, koska vain sellaisia lukujärjestelmiä on olemassa. Muita lakeja noudattavia järjestelmiä on olemassa, mutta ne ovat ominaisuuksiltaan niin toisenlaisia, että niiden alkioita ei kutsuta luvuiksi.

"Velkaluvut"

Intialainen Brahmagupta oli esittänyt negatiivisten lukujen laskusäännöt jo 600-luvun alkupuoliskolla [1, s. 316]. Silti negatiiviset luvut vaivasivat eurooppalaisia matematiikkoja vielä yli tuhat vuotta myöhemmin. Vuosina 1629–1704 elänyt Johann Hudde näyttää olleen heistä ensimmäinen, joka kohteli niitä yhtä luontevasti kuin positiivisia [1, s. 525–526]. Jotkut oppikirjojen kirjoittajat kielsivät kahden negatiivisen luvun kertomisen keskenään vielä 1700-luvulla [1, s. 645].

Negatiivisia lukuja pyrkii tupsahtelemaan esiin erilaisten tehtävien ratkaisemisen tuloksena. Silloin voi kuitenkin ottaa sen kannan, että ratkaisua ei ole. Harmillista kyllä, ratkaisumenetelmät tuottavat niitä välivaiheina silloinkin, kun lopullinen ratkaisu on positiivinen. Negatiivisia lukuja välttelevä matemaatikko tarvitsi monta eri ratkaisutapaa siinä missä nykypäivän matemaatikko selviää yhdellä, koska hänen täytyi aina ohjata laskut sellaista reittiä, että negatiivisia lukuja ei esiinny.

Tehdäänpä ajatuskoe, että tietokoneet olisi keksitty ennen negatiivisia lukuja. Kaikki tietokoneet osaisivat laskea vain positiivisilla rationaaliluvuilla ja nollalla. Jos $x < y$, niin vähennyslasku $x - y$ aiheuttaisi ajonaikaisen virheen aivan kuten nollalla jako todellisissa tietokoneissa. (Ajatuskoe toimii myös kokonaisluvuilla, jos jakolasku jätetään pois. Reaaliluvuilla ajatuskoe ontuu, koska tietokoneita ei voi ohjelmoida laskemaan reaaliluvuilla tarkasti.)

Eräänä päivänä joku neropatti keksii, että olisi parempi, että pienempi miinus suurempi ei aiheuttaisi virhettä vaan tuottaisi tulokseksi uudentyypisen, velkaa esittävän luvun. Hän päättää laatia ohjelman, joka osaa laskea myös näillä uusilla luvuilla. Olisiko sellainen vaikeaa?

Italialaiset kauppiaat käyttivät 1400-luvulla merkkiä "+" ilmaisemaan ylijäämää ja "−" alijäämää [1, s. 397], joten esitetään luku ohjelmassamme parina $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$, jossa x_e on "+" tai "−" ja x_i on positiivinen luku tai nolla. (Ohjelmoija käyttäisi parin sijasta tietuetta tai luokkaa, mutta vältämme ohjelmointikielitermejä tässä kirjoituksesssa.) Tämä on itse asiassa nykyinen esitystapamme vain kirjoitettuna hieman eri tavalla. Alaviitteet "e" ja "i" viittaavat sanoihin "etumerkki" ja "itseisarvo".

Esimerkiksi -3 esitetään $(\text{“}-\text{”}, 3)$ ja 5 esitetään $(\text{“}+\text{”}, 5)$. Nolla ei oikeastaan ole säästöä eikä velkaa, mutta valitaan yksinkertaisuuden vuoksi, että nolla esitetään muodossa $(\text{“}+\text{”}, 0)$, ja paria $(\text{“}-\text{”}, 0)$ ei käytetä. Eihän $(\text{“}-\text{”}, 0)$ varsinaisesti väärin olisi, koska se vastaa tavallisen matematiikan merkintää -0, joka myös on arvoltaan 0. Mutta vältetään sekaannuksia, jos ohjelma esittää nollan aina samassa muodossa.

Laskutoimitukset voidaan ohjelmoida koulussa opittujen etumerkkisääntöjen mukaan. Yhteenlasku $x+y = z$ sujuu näin:

- Jos $x_\mathsf{e} = y_\mathsf{e}$, niin $z_\mathsf{e} = x_\mathsf{e}$ ja $z_\mathsf{i} = x_\mathsf{i} + y_\mathsf{i}$.
- Jos $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} > y_\mathsf{i}$, niin $z_\mathsf{e} = x_\mathsf{e}$ ja $z_\mathsf{i} = x_\mathsf{i} - y_\mathsf{i}$.
- Jos $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} = y_\mathsf{i}$, niin $z_\mathsf{e} = \text{“}+\text{”}$ ja $z_\mathsf{i} = 0$.
- Jos $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} < y_\mathsf{i}$, niin $z_\mathsf{e} = y_\mathsf{e}$ ja $z_\mathsf{i} = y_\mathsf{i} - x_\mathsf{i}$.

Vähennyslasku $x - y$ tapahtuu vaihtamalla y_e plussasta miinukseksi tai päinvastoin ja sitten käyttämällä yhteenlaskua, paitsi jos y on alunperin $(\text{“}+\text{”}, 0)$. Jos y on alunperin $(\text{“}+\text{”}, 0)$, niin tulokseksi annetaan x.

Kertolasku $x \cdot y = z$ on jopa helpompi kuin yhteenlasku:

- $z_\mathsf{i} = x_\mathsf{i} \cdot y_\mathsf{i}$.
- Jos $x_\mathsf{e} = y_\mathsf{e}$ tai $x_\mathsf{i} = 0$ tai $y_\mathsf{i} = 0$, niin $z_\mathsf{e} = \text{“}+\text{”}$.
- Jos $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} \neq 0$ ja $y_\mathsf{i} \neq 0$, niin $z_\mathsf{e} = \text{“}-\text{”}$.

Jakolasku $z = x/y$ saadaan edellisestä korvaamalla ensimmäinen kohta kaavalla $z_\mathsf{i} = x_\mathsf{i}/y_\mathsf{i}$.

Tarkoitus on tietysti, että silloin kun kaikki etumerkit ovat "+", ohjelmamme laskee kuten positiivisilla luvuilla ja nollalla lasketaan. Siis esimerkiksi jos

$$x + y = z\ ,$$

niin täytyy olla

$$(\text{“}+\text{”}, x)\ +\ (\text{“}+\text{”}, y)\ =\ (\text{“}+\text{”}, z)\ .$$

Tarkastamalla kaikki edellä annetut $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$-lukujen laskusäännöt on helppo nähdä, että tämä puoli asiasta on kunnossa. Ainoa poikkeus on $x-y$ silloin kun $x < y$. Positiivisten lukujen ja nollan laskusäännöillä tämä on kielletty lasku, mutta $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$-luvuilla lasku onnistuu ja tulos on $(\text{“}-\text{”}, y - x)$. Mutta tämähän oli tarkoituskin. $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$-luvut ovat siis positiivisten lukujen ja nollan laajennos, eikä jokin kokonaan uusi lukujärjestelmä.

Me tiedämme, että yhteen- ja kertolasku ovat vaihdannaisia ja liitännäisiä ja osittelulaki pätee, vaikka mukana olisi negatiivisiakin lukuja. Ohjelmoijamme ei sitä kuitenkaan vielä tiedä, koska ajatuskokeessamme negatiivisia lukuja ollaan vasta keksimässä.

Mutta, jos luotetaan siihen, että vaihdannaisuuslaki pätee positiviisille luvuille ja nollalle, niin on helppo kokeilemalla huomata, että se pätee myös ohjelman käsittelemille pareille $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$. Otetaan esimerkiksi tapaus $a + b$, missä $a_\mathsf{e} \neq b_\mathsf{e}$ ja $a_\mathsf{i} < b_\mathsf{i}$. Olemme ottaneet käyttöön uudet nimet a ja b, jotta emme menisi nimien kanssa sekaisin. Näinpäin laskettaessa $x = a$ ja $y = b$, joten "$a_\mathsf{e} \neq b_\mathsf{e}$ ja $a_\mathsf{i} < b_\mathsf{i}$" tarkoittaa "$x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} < y_\mathsf{i}$". Lasku vie siis neljänteen tapaukseen ja tulokseksi tulee $(y_\mathsf{e},\ y_\mathsf{i} - x_\mathsf{i})$ eli $(b_\mathsf{e},\ b_\mathsf{i} - a_\mathsf{i})$. Laskettaessa $b + a$ pätee $x = b$ ja $y = a$. Siis $y_\mathsf{e} \neq x_\mathsf{e}$ ja $y_\mathsf{i} < x_\mathsf{i}$. Tämä tarkoittaa samaa kuin $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} > y_\mathsf{i}$, joten lasku vie toiseen tapaukseen ja tuottaa vastaukseksi $(x_\mathsf{e},\ x_\mathsf{i} - y_\mathsf{i})$ eli $(b_\mathsf{e},\ b_\mathsf{i} - a_\mathsf{i})$. Tuli siis sama vastaus, kuten pitääkin.

Liitännäisyyslait ja osittelulaki voidaan tarkastaa samaan tapaan.

Ajatuskokeemme havainnollistaa kolmea tärkeää asiaa. Ensiksi, olisi mahdollista — jopa helppoa — opettaa tietokoneet laskemaan kaikilla rationaaliluvuilla, vaikka ne alunperin osaisivat laskea vain positiivisilla rationaaliluvuilla ja nollalla. Silloin kun vain ihmiset laskivat luvuilla, oli ainakin jossain määrin järkevää väittää, että jotkin epäilyttävän tuntuiset luvut eivät "oikeasti ole olemassa" ja niillä laskeminen on samanlaista haihattelua kuin ikiliikkujan suunnittelu. Mutta siinä vaiheessa kun tietokoneetkin laskevat "velkaluvuilla" ilman ongelmia, on pakko myöntää ainakin sen verran, että velkalukujen toteutus tietokoneohjelmana on olemassa, joten niillä laskeminen ei ole haihattelua.

Seuraako tästä sitten, että myös velkaluvut itse — toteutuksensa lisäksi — ovat olemassa, on epäolennainen kysymys. Sanoilla ei yleensä ole tarkkaan sovittuja merkityksiä, vaan on harmaa alue, jossa toisten mielestä sopii käyttää jotakin sanaa ja toisten mielestä ei. Joidenkin mielestä lukujen ei voi sanoa olevan olemassa ainakaan ennen kuin ihmiset keksivät ne, koska ne ovat vain ajatusrakennelmia, ja ennen keksimistään ne eivät siis ole mitään.

Nykyajan matemaatikot käyttävät toisenlaista puhetapaa. He sanovat, että jokin matemaattinen käsite on olemassa, jos se ei ole sisäisesti ristiriitainen. "Pyöreä neliö" olisi sisäisesti ristiriitainen käsite. Sisäinen ristiriita voi olla myös paljon vähemmän ilmeinen. Kuitenkin, jos jokin käsite saadaan toimimaan tietokoneohjelmana, se ei voi olla sisäisesti ristiriitainen.

Sen sijaan, että alkaisi kinastella matematikon kanssa, ovatko velkaluvut "oikeasti" olemassa, on hyödyllisempää todeta, että hän käyttää sanaparia "olla olemassa" ehkä eri merkityksessä kuin minä. Joka tapauksessa velkalukuja voi käyttää laskelmissa. Käytännön näkökulmasta se on tärkeintä.

Toiseksi, velkalukuja ei rakennettu yksinään, vaan rakennettiin järjestelmä, joka sisältää sekä velkaluvut että tarkat vastineet entuudestaan tutuille luvuille. Kutsukaamme näitä vastineita "säästöluvuiksi". Ovatko säästöluvut "oikeasti" sama asia kuin entuudestaan tutut luvut on sekin epäolennainen kysymys. Ellei ohjelman käyttäjä yritä laskettaa vähennyslaskua pienempi miinus suurempi, hän ei voi mistään huomata, että ohjelma laskee säästöluvuilla. Vastaus on aina sama kuin entuudestaan tutuilla luvuilla laskettaessa olisi tullut.

Kolmanneksi, kaikki edellä annetut lait (1), …, (8) pätevät kaikille $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$-luvuille. Velkalukujen käyttöönotto ei vaadi, että vanhat laskulait unohdetaan ja opetellaan uusia. Tämä helpottaa velkalukujen käyttöönottoa huomattavasti. Velkaluvut käyttäytyvät niin samalla tavalla kuin entuudestaan tutut luvut, että on vaikea keksiä mitään muuta syytä olla kelpuuttamatta niitä luvuiksi kuin ennakkoluuloisuus. Ennakkoluuloisuus on ollut matematiikankin historiassa vahva voima, mutta hyvät uudet ajatukset on lopulta hyväksytty viimeistään silloin, kun vanhoihin ajatuksiin juuttunut sukupolvi on kuollut pois.

Tärkein velkalukujen — eli negatiivisten lukujen — mukanaan tuoma uutuus on se, että jokainen vähennyslasku on laskettavissa. Tämä asia voidaan ilmaista laillla "ovatpa a ja b mitä lukuja tahansa, niin $a - b$ on olemassa". Se ei kuitenkaan riitä yksinään, koska tähän mennessä annetuissa laeissa ei kerrota mitään siitä, mitä vähennyslasku tarkoittaa.

Äkkipäätä voi näyttää siltä, että tämä puute on helppo korjata: $a - b$ on tietenkin sellainen luku, että kun siihen lisätään b, saadaan a. Tämän voi ilmaista laillla $(a - b) + b = a$.

Valitettavasti asia ei ole näin yksinkertainen. Periaatteessa voisi olla olemassa kaksi tai useampia eri lukuja x siten, että $x + b = a$. Silloin ongelmaksi tulisi, mikä niistä on $a-b$. Siis $a-b$ ei ehkä ole *yksikäsitteinen*. Onneksi pystymme lopulta osoittamaan, että $a - b$ on yksikäsitteinen. Joudumme kuitenkin sitä ennen päättelemään määritelmän "$a-b$ on olemassa ja $(a-b)+b = a$" ja aikaisemmin annettujen yhteenlaskun lakien varassa tietämättä, että $a - b$ on yksikäsitteinen.

Koska $x = (x-y)+y$, on $x+(y-y) = ((x-y)+y)+(y-y)$. Liitännäisyyslakia käyttämällä oikea puoli voidaan muuttaa muotoon $(x-y)+(y+(y-y))$, josta vaihdannaisuuslailla päästään muotoon $(x-y)+((y-y)+y)$. Koska $(a-b)+b = a$, sievenee tämä muotoon $(x-y)+y$ ja edelleen muotoon x. Siis ovatpa x ja y mitä lukuja tahansa, pätee $x + (y - y) = x$. Luku $y - y$ käyttäytyy kuten nolla!

Edelleen voidaan päätellä, että vaikka z olisi eri luku kuin y, niin $z-z$ ja $y-y$ ovat yhtäsuuret. Se on välitön seuraus yleisemmästä tuloksesta, jonka mukaan ei voi olla olemassa enempää kuin yksi luku, joka käyttäytyy kuten nolla. Tämän todistamiseksi oletetaan, että p ja q ovat kaksi lukua siten, että $x + p = x$ ja $x + q = x$ jokaisella x. Sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön x:n paikalle q saadaan $q + p = q$, josta vaihdannaisuuden avulla saadaan $p + q = q$. Toisaalta, sijottamalla jälkimmäiseen yhtälöön x:n paikalle p saadaan $p + q = p$. Niinpä $p = p + q = q$. Siis p ja q eivät voi olla eri luku.

Ei ole yllätys, että $y - y$ käyttäytyy kuin nolla. Olemme rakentamassa matemaattista määritelmää tutuille luvuille, ja tutuilla luvuilla $y - y = 0$. Jos rakennelmassamme $y - y$ olisi jotain muuta kuin 0, olisi rakennelmamme pielessä. On kuitenkin mielenkiintoista huomata, että ei tarvitse erikseen määritellä, että $y - y$ on nolla eikä edes, että nolla on olemassa. Nämä seuraavat automaattisesti siitä, että yhteen- ja vähennyslasku voidaan aina laskea, yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen, ja $(a - b) + b = a$.

Koska $y-y$:n tulos on y:n valinnasta riippumaton, käyttäytyy kuten nolla eikä muitakaan nollia voi olla, alamme merkitä sitä reilusti symbolilla "0". Olemme johtaneet seuraavan tuloksen:

(9) On olemassa luku 0 siten, että jokaisella luvulla a pätee $a + 0 = a$.

Sijoittamalla a:n paikalle 0 ja b:n paikalle a kaavassa $b + (a - b) = a$ saadaan $a + (0 - a) = 0$. Merkitsemällä lukua $0 - a$ yksinkertaisemmin $-a$ voidaan tämä tulos esittää seuraavana lakina:

(10) Jokaista lukua a kohti on olemassa luku $-a$ siten, että $a + (-a) = 0$.

Lukua $-a$ kutsutaan luvun a vastaluvuksi. Samaan tapaan kuin osoitettiin, että nollan lailla käyttäytyviä lukuja on vain yksi, voidaan osoittaa, että myös vastaluvun lailla käyttäytyviä lukuja on vain yksi. Nimittäin, olkoon myös $\bar{a}$ luku siten, että $a + \bar{a} = 0$. Vaihdannaisuuslain avulla saadaan $\bar{a} + a = 0$. Nyt voidaan laskea toisaalta, että $(\bar{a}+a)+(-a) = \bar{a}+(a+(-a)) = \bar{a}+0 = \bar{a}$, ja toisaalta, että $(\bar{a}+a)+(-a) = 0+(-a) = (-a)+0 = -a$. Niinpä $\bar{a} = (\bar{a} + a) + (-a) = -a$.

Nyt voimme viimein osoittaa, että on vain yksi luku x siten, että $x + b = a$. Nimittäin, jos x on sellainen luku, niin $x = x + 0 = x + (b + (-b)) = (x + b) + (-b) = a + (-b)$. Koska juuri näimme, että $-b$ on yksikäsitteinen ja olemme alusta saakka uskoneet, että yhteenlasku on yksikäsitteinen, on x:n arvo yksikäsitteinen.

Olemme tähän asti käyttäneet lakeja "$a - b$ on olemassa" ja "$(a - b) + b = a$" osana lukujen määritelmää, ja johdimme lait (9) ja (10) niistä ja kaavasta $-a = 0-a$. Matematiikoilla on kuitenkin tapana tehdä toisinpäin: (9) ja (10) sekä kaava $a-b = a+(-b)$ asetetaan osana määritelmää, josta vähennyslaskun ominaisuudet johdetaan. Näin määritelty $a - b$ on olemassa ovatpa a ja b mitä lukuja tahansa, koska $-b$ on olemassa lain (10) nojalla ja yhteenlaskun tulos on olemassa lain (1) nojalla. Edelleen, määritelmän mukaan $(a - b) + b = (a + (-b)) + b$, josta liitännäisyyttä ja vaihdannaisuutta soveltamalla saadaan $a + ((-b) + b)$ ja $a + (b + (-b))$, josta (10) tuottaa $a + 0$, mistä (9) tuottaa a. Siis $(a - b) + b = a$.

Koska lait (9) ja (10) on johdettavissa laeista "$a - b$ on olemassa" ja "$(a - b) + b = a$" sekä toisinpäin, on lopputulos riippumaton siitä, kummat valitaan lähtökohdaksi. Lakien (9) ja (10) valitseminen lähtökohdaksi on sikäli mukavampaa, että niiden avulla ensimmäiset todistukset sujuvat näppärämmin. Sen jälkeen kun vaihtoehtoisen lähtökohdan lait on johdettu, ei asialla ole enää merkitystä.

Todistamme vielä yhden vastalukujen tutun ominaisuuden, jota tarvitaan jatkossa. Mitä on $-(-x)$? Määritelmän mukaan se on sellainen luku, että $(-x) + (-(-x)) = 0$. Toisaalta $x + (-x) = 0$, josta vaihdannaisuuslain avulla saadaan $(-x) + x = 0$. Niinpä x kelpaa luvuksi $-(-x)$. Koska vastaluku on yksikäsitteinen, täytyy olla niin, että $-(-x) = x$.

Viitteet

[1] Boyer, Carl: *Tieteiden kuningatar, matematiikan historia*. Osa I sivut 1–469. Osa 2 sivut 471–982. Suomentanut Kimmo Pietiläinen. Art House, 1994.

[2] Cormen, Thomas H. & Leiserson, Charles E. & Rivest, Ronald L.: *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 1990.

[3] Nurmi, Timo & Rekiaro, Ilkka & Rekiaro, Päivi: *Suomalaisen sivistyssanakirja*. Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä 1995.

[4] Stroustrup, Bjarne: *The C++ Programming Language, Third Edition*. Addison-Wesley, 1997.