



Lukuteorian helmiä lukiolaisille

Jukka Pihko

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Taustaa

Sain 24.4.2007 Marjatta Näätäselältä sähköpostiviestin, jonka aihe oli ”Fwd: yhteistyökurssi, Jukka, kiinnostako?” Eteenpäin lähetetyn viestin olivat allekirjoittaneet Ressun lukion matematiikan opettajat Hilkka Taavitsainen, Mika Spåra ja Susanna Moksunen. Sen sisältönä oli ehdotus matematiikan kurssin järjestämiseksi Ressun lukiossa, tarkoituksena tarjota oppilaille mielenkiintoista matematiikkaa lukiokurssien ulkopuolelta. Mahdollisena aiheena mainittiin mm. lukuteoria. Hetkeäkään harkitsematta nielaisin syötin ja ilmoitin olevani halukas pitämään lukuteorian kurssin. Olen nimittäin usein ajatellut, että olisi hauskaa päästä esittelemään alaani koululaisille, mutta tähän suuntaavat pyrkimykseni oli aina enemmän tai vähemmän tylästi tyrmätty sillä seurauksella että olin jo kokonaan luopunut toivosta.

Hilkka Taavitsainen kutsui minut koululle 3.5.2007 ideoimaan kurssin sisältöä. Paikalla olivat myös muut edellä mainitut opettajat. Minulla oli valmis ehdotus kurssin ydinkohdista: Lagrangen lause neljän nelion summista (joka sanoo, että jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan esittää neljän kokonaisluvun nelion summuna) ja Fermat’n Suuren Lauseen tapaus $n = 4$. Näistä edellinen on suurimpia suosikkejani: pidin siitä dosenttikoelunnon vuonna 1994. Mitä taas tulee jälkimmäiseen, niin se on ollut mielessäni sopivana aiheena Solmu-lehden kirjoitukseen, jota minulta

on joskus pyydetty mutta jota en ole saanut aikaiseksi. Opettajilla ei ollut mitään ehdotustani vastaan vaikuutettuani, että kyseiset melko ’kovat’ tulokset voidaan todistaa suhteellisen helposti (vaikka ei ihan lyhyesti) lukuteorian peruskäsitteiden avulla. Palaverimme päättyi siihen, että Hilkka Taavitsainen lainasi minulle koulussa käytetyn oppikirjan [3] ja lupasin palata kurssin tarkempaan sisältöön tutustuttuani teokseen tarkemmin.

Kirjassa [3] mainitaan Aritmetiikan peruslause (joka sanoo, että jokainen ykköstä suurempi kokonaisluku voidaan esittää alkulukujen tulona, vieläpä tekijöiden järjestystä vaille yksikäsitteisesti), mutta jostakin syystä sitä ei todisteta. Kuten tulemme näkemään, todistus ei ole kovinkaan vaikea, mutta tätä lausetta, joka todella on nimensä veroinen, ei voi mitenkään pitää itsestään selvänä. Samassa kirjassa mainitaan myös täydelliset luvut ja Mersennen alkuluvut, mutta ei kerrota, että niiden välillä vallitsee läheinen yhteys. Koska kirjassa mainitaan Lagrangen lause (ilman todistusta) ja Fermat’n Suuri Lause ((tietenkin!) ilman todistusta), niin saatoinkin todeta, että kurssini, jonka pääkohdat olisivat 1) Aritmetiikan peruslauseen todistus, 2) Täydelliset luvut, Mersennen alkuluvut ja niiden välinen yhteys, 3) Lagrangen lause neljän nelion summista ja 4) Fermat’n Suuri Lause tapauksessa $n = 4$, lähes saumattomasti liittyi Ressun lukiossa käytettyyn oppikirjaan [3]. Huomattakoon, että kurssin sisältö muodostui subjektiivisten mieltymysten ja

sattuman vaikutusten tuloksena; jonkun toisen pitämä lukuteorian kurssi olisi todennäköisesti ollut täysin erilainen.

Kurssille piti sitten vielä keksiä vetävä nimi ja iskulauseita, joiden avulla sitä voisi mainostaa. Nimen ”Lukuteorian helmiä” lainasin Khintsinin tunnetusta teoksesta [5]. Iskulauseita olivat mm. ”koulukurssin ylittävää mutta kaikille ymmärrettävää lukuteoriaa” ja ”kurssilla tehdään sukelluksia matematiikan historiaan”. Viimeksi mainitulla tarkoitin sitä, että matematiikan ohessa kertoisin myös aiheeseen liittyvistä matemaatikoista. Näitä tarinoita en ole ottanut tähän mukaan, jottei esityksestä tulisi liian laaja. Sen sijaan viitataan netissä olevaan helppokäyttöiseen MacTutor-arkistoon [4], josta lukija saa tarvittaessa tietoja (ja kuvia) matemaatikoista. Eräässä toisessa mielessä (jos ajatteleme matemaattisia käsitteitä ja tuloksia) kurssilla oltiin itse asiassa sukelluksissa matematiikan historiassa lähes koko ajan 1700-luvulla ja sitä varhaisemalla ajalla; vain silloin tällöin nousimme pintaan, kurkistamaan periskoopista mitä nykyään tapahtuu. Tätä ’aihe’-historiaa käsittelem esityksessäni jonkin verran.

Syksyllä 2007 pidetylle ”Lukuteorian helmiä”-kurssille ilmoitautui 14 oppilasta, joista kymmenkunta jaksoi seurata loppuun saakka. Osa oppilaista oli selälaisia, jotka eivät olleet suorittaneet ”Lukuteoria ja logiikka”-kurssia. Minun oli siis aloitettava aivan peruskäsitteistä. Käytettävissä oli 13 tuntia (missä yksi tunti sisälsi 75 minuuttia). Tunteja oli kolme viikossa, joten jos ajatellaan että ensimmäinen tunti kului kurssin esittelyyn, niin kurssin neljälle kohdalle oli kullekin viikko varattuna. Aika riitti (omasta mielestäni) hyvin: sain sanottua sen mitä olin suunnitellut.

Kurssin päätyttyä mieleeni juolahti, että kurssimateriaali saattaisi kiinnostaa Solmun lukijoita. Sen lukeminen ei edellytä lukuteorian tuntemista, mutta vaatii ehkä hieman vaivannäköä. Tarkoitukseni on esittää yksityiskohtaiset todistukset, paitsi silloin kun asia on itsestään selvä tai kun todistus olisi samanlainen kuin joku aikaisemmin (tai myöhemmin) esitetty. Mitään yleiskuvaa lukuteoriasta en yritäkään antaa; kurssin nimeenkin viitaten tarkoitukseni on ainoastaan esitellä muutama tarkkaan valittu hieno tulos. (Luvussa 2 tämä on Eukleideen ja Eulerin antama karakterisointi parillisille täydellisille luvuille.) Luonnollisesti

on eduksi, jos lukijalla on perustiedot lukuteoriasta tai käytettävissä [3] tai jokin vastaava lukion kirja (kahteen sellaiseen viitataan Apiolan Solmu-artikkelissa [1], joka on oheislukemisena myös paikallaan). Tukeudun esityksessäni pääasiassa Burtonin oppikirjaan [2], johon perustuvaa kurssia ”Johdatus alkeelliseen lukuteoriaan” olen kolme kertaa luennoinut Helsingin yliopistossa. Tätä kirjaa voin suositella (ensimmäiseksi) jatkolukemiseksi sellaisille, joiden tiedonnälkää tämä Res-sun lukiossa pitämäni kurssi ei saa tyydytetyksi; muitakin hyviä oppikirjoja on mainittu (verkkoversion) viitteissä.

Loppukevennyksen antakoon matemaatikko ja kirjailija Klaus Vala (1930–2000). Teoksessa *Nikolai Kval* [6] hän kirjoittaa kertomuksen ”Kaksi, kolme ...” päätteeksi sivulla 87: ”Arvelen kuitenkin voivani päätellä mihin suuntaan maailmankuulu baijerilainen olutkulttuuri on menossa. Olen nimittäin opiskellut joskus niinkin turhaa asiaa kuin lukuteoriaa. Kaikki me haksahdamme elämämme aikana joihinkin hullutuksiin.”

Itse helmiin voi tutustua Solmun verkkoversiossa, osoitteessa http://solmu.math.helsinki.fi/2008/lukuteorian_helmia.pdf

Viitteet

[1] Apiola, Heikki: Lukuteoriaa ja salakirjoitusta, osa 1, *Solmu* 3/2007, 7–13.

[2] Burton, David M.: *Elementary number theory*, Revised printing, Allyn and Bacon, Inc., 1980. Useita painoksia, esim. 6th. ed., McGraw-Hill, 2005.

[3] Hautajärvi, Ottelin, Wallin-Jaakkola: *Laudatur 11, Lukuteoria ja logiikka*, Otava, 2006.

[4] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/>

[5] Khinchin, A. Y.: *Three pearls of number theory*, Graylock Press, 1952.

[6] Vala, Klaus: *Nikolai Kval*, Art House, 1955.