

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

I luku

Rationaaliset luvut

MERKITSEMISTAPOJA — YHTÄLÖITÄ

1. Jos 1 kg voita maksaa 4 mk, niin paljonko maksaa a) 3 kg b) k kg?
2. Jos 1 kg voita maksaa a kg, niin paljonko maksaa a) 3 kg b) k kg?
3. Jos p metriä kangasta maksaa a mk, niin paljonko maksaa 1 metri?
4. Jos suorakulmion vierekkäiset sivut ovat a cm ja b cm, niin kuinka suuri on ala A ? Saatuun kaavaan on sitten sijoitettava $a = 7$ cm, $b = 9$ cm ja laskettava A .
5. Jos pyöräilijän nopeus on 16 km/t (kilometriä tunnissa), niin paljonko hän ajaa a) 3 tunnissa b) t tunnissa?
6. Jos pyöräilijän nopeus on v km/t, niin kuinka pitkä on se matka s , jonka hän ajaa t tunnissa? Näin saatuun s :n kaavaan on sitten sijoitettava $v = 13\frac{1}{2}$ ja $t = 2\frac{1}{3}$ ja laskettava s .
7. Paljonko on a) 4 % 120 :stä b) 4 % luvusta a c) p % luvusta a ?
8. Jos kauppias osti erään tavaran a mk :lla ja sai siitä myydessään voittoa p %, niin kunka suuri oli hänen myyntihintansa h ? Saadun kaavan avulla on sitten laskettava myyntihinta, jos $a = 42$ ja $p = 7$.
9. Kuinka suureksi kasvaa k mk p % :n mukaan t vuodessa?
10. Kuinka voidaan kertolaskun vaihdantalaki ilmaista yhtälön avulla?
11. Kahden murtoluvun kertosääntö ilmaistava yhtälön avulla?

12. Lausuttava sanallisesti seuraavan yhtälön ilmaisema laskusääntö :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

13. Yhteenlaskun liitântälaki voidaan ilmaista lyhyesti yhtälöllä

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

jossa a , b ja c saavat olla mitä lukuja tahansa. Lausuttava sanallisesti tämän yhtälön esittämä laki.

14. Kuinka kertolaskun liitântälaki voidaan ilmaista yhtälön avulla?

15. Kuinka on merkittävä sitä, että lukujen p ja 3 summa on jaettava niiden erotuksella, käyttäen jakomerkkinä a) kaksoispistettä b) jakoviivaa?

16. Kuinka on merkittävä sitä, että luvusta x on vähennettävä lukujen y ja z a) summa b) tulo?

17. Lausekkeesta $(a + b) - (a \cdot b) - (a - b)$ on jätettävä pois tarpeettomat sulkumerkit.

18. Minkä arvon saa lauseke a) $x - 2 \cdot (x - 3)$ b) $(x - 2) \cdot (x - 3)$, kun $x = 5$?

19. Laskettava $x + 3 \cdot [4 - (x - y)]$, kun a) $x = 4$, $y = 3$ b) $x = 3\frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$.

20. Missä järjestyksessä on suoritettava laskut lausekkeessa

$$m \cdot [n + 2 \cdot (m - n)]$$

ja niissä kolmessa muussa lausekkeessa, jotka saadaan tästä pyyhkimällä pois a) hakasulkumerkit b) kaarisulkumerkit c) kaikki sulkumerkit? Näin saatuihin neljään lausekkeeseen on sitten sijoitettava $m = 5$, $n = 2$ ja laskettava lausekkeiden arvot.

21. Paljonko on $729 - abc$, kun $a = 7$, $b = 2$, $c = 9$?

22. Kun $x = \frac{1}{2}$ ja $y = 2$, niin kuinka suuri on

$$\text{a) } 6y - xy \quad \text{b) } 6(y - x)y \quad \text{c) } (6y - x)y \quad \text{d) } 6(y - xy)$$

23. Kuinka on merkittävä sitä nelinumeroista kokonaislukua, jonka peräkkäiset numerot ovat a , b , c ja d ?

24. Kaksinumeroisen luvun ykkösten numero on x ja kymmenien numero on kolmea pienempi kuin tämä. Kuinka on lukua merkittävä?

25. Yksidesimaalisen desimaaliluvun kokonaisosa on a ja desimaalia esittävä numero b . Kuinka desimaaliluku voidaan esittää?

Ratkaistava yhtälöt :

26. $x - 27 = 16$

27. $x - 1\frac{2}{3} = 2$

28. $x - 0,72 = 2,45$

29. $x + 8 = 23$

30. $x + 1\frac{5}{6} = 5\frac{1}{4}$

31. $x + b = a$

32. $58 - x = 33$

33. $7 - x = 5,27$

34. $a - x = b$

35. $6x = 15$

36. $\frac{4}{5}x = \frac{2}{3}$

37. $1,28x = 0,88$

38. $10x - 7 = 52$

39. $1\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 1\frac{1}{3}$

40. $ax - b = c$

41. a) $\frac{x}{8} = 12$ b) $\frac{x}{a} = b$. Jälkimmäisen yhtälön juuren lausekkeeseen sijoitettava $a = 4\frac{1}{6}$, $b = \frac{3}{5}$ ja laskettava vastaava juuren arvo.

42. a) $\frac{42}{x} = 3$ b) $\frac{a}{x} = b$. Jälkimmäisen yhtälön juuren lausekkeeseen sijoitettava $a = 0,12$, $b = 1,5$ ja laskettava vastaava juuren arvo.

NEGATIIVISET LUVUT

43. Mitähän tarkoitetaan sillä, kun sanotaan, että erään paikan korkeus merenpinnasta lukien on $+10$ m ja erään toisen -8 m?

44. Erään paikkakunnan leveysaste on $+45^\circ$ ja erään toisen -45° . Mitä tämä merkitsee?

45. Mitähän mahtaisi tarkoittaa sanonta : »Juna on matkalla Helsingin ja Tampereen välillä ja sen nopeus on -50 km tunnissa Tampereen suuntaan. Klo 12 juna on -30 km Riihimäeltä mainittuun suuntaan. »

46. Kolmesta lapsesta A , B ja C täytti vuonna 1060 A 2 v., B 0 v. ja C -2 v. Mitkä ovat lasten syntymävuodet ?

47. Kello 8 oli lämpötila -6° . Klo 12 :een mennessä lisääntyi lämpötila 6° :lla. Paljonko oli lämpötila silloin ? Laskutoimitus on merkittävä.

48. Mitä tarkoittaa sanonta : » A :lla on saatavaa B :ltä 100 mk ja C :ltä -100 mk » ? Paljonko on hänellä saatavaa yhteensä ? Laskutoimitus on merkittävä.

49. Henkilöllä oli tuloja yhtenä päivänä 20 mk ja seuraavana päivänä -20 mk. Paljonko oli hänellä tuloja yhteensä näinä kahtena päivänä ? Laskutoimitus merkittävä.

50. Mitkä ovat lukujen $+5\frac{1}{2}$, -3 , $-8,52$, 4 , 0 vastaluvut ?

51. Mitä tarkoittavat merkinnät $+(a + b)$ ja $-(a + b)$? Mitkä ovat niiden lausekkeiden arvot, jos $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{3}$?

52. Minkälainen on luvun n oltava, jotta $-n$ olisi a) negatiivinen b) positiivinen c) $= 0$?

53. Mitä voidaan sanoa luvuista x ja y toisiinsa verrattuina, jos

$$\text{a) } x + y = 0 \quad \text{b) } y = +x \quad \text{c) } y = -x$$

Jos $x = -5$, niin mikä on y :n arvo ?

54. Sievennettävä, so. esitettävä yksinkertaisimmassa muodossaan $+x$ ja $-x$, kun x on a) $+2$ b) -2 c) $+m$ d) $-m$.

Sievennettävä :

55. a) $+(+3)$ b) $+(-3)$ c) $-(+3)$ d) $-(-3)$

56. a) $-[-(-1)]$ b) $-[+(-1)]$

57. $--[-(-h)] + +[-(+h)]$

58. Mitkä ovat tehtävissä 50 mainittujen lukujen itseisarvot ?

59. Sievennettävä : $|-1|$, $|+1|$, $|1|$, $|+|-3|$, $-|-3|$, $+2$.

60. Millaisia ovat luvut x ja y toisiinsa verrattuina, jos $|x| = |y|$?

61. Ratkaistava yhtälö a) $|x| = 5$ b) $|x| = |k|$.

62. Millaisilla k :n arvoilla

a) $|+k| = k$ b) $|+k| = -k$ c) $|-k| = k$ d) $|-k| = -k$

63. Mikä on summan $x + |x|$ arvo, jos a) $x = 7$ b) $x = -7$?

64. Mikä on summan $-x + |x|$ arvo, jos a) $x = 7$ b) $x = -7$?

65. Luvut $-2, +3, 4, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{3}$ on merkittävä lukusuoralle ja lueteltava suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan.

66. Milloin $x = -x$?

67. Sivulla 8 on lueteltu joukko peräkkäisiä kokonaislukuja pienimmästä suurimpaan. Kun kunkin luvun alle ajatellaan kirjoitetuksi sen vastaluku, niin millaisessa suuruusjärjestyksessä ne ovat?

68. $-6, -5, -4, -3, -2, -1$ ovat pienimmästä suurimpaan kirjoitettuja peräkkäisiä negatiivisia kokonaislukuja. Jos näiden alle merkitään niiden itseisarvot, niin millaisessa suuruusjärjestyksessä ne ovat?

69. Missä lukusuoran osassa voi luvun x vastinpiste olla, jos

a) $x > 1$ b) $x < -1$ c) $-1 < x < 1$

70. Jos a) $|x| > 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| = 3$, niin mitä voidaan sanoa x :n suuruudesta? Missä lukusuoran osissa x :n vastinpiste voi kulloinkin olla?

71. Jos muuttuva luku x suurenee -2 :sta $+3$:een, niin kuinka tällöin liikkuu lukusuoralla a) x :n vastinpiste b) $-x$:n vastinpiste?

72. Jos a) $-m > -n$ b) $-m < -n$, niin mitä voidaan sanoa lukujen m ja n suuruudesta toisiinsa verrattuina?

73. Jos a) $-x > -4$ b) $-x < 2$, niin mitä voidaan sanoa x :n suuruudesta? Missä lukusuoran osissa x :n vastinpiste voi kulloinkin olla?

YHTEENLASKU

74. a) $(+13) + (-9)$ b) $(-13) + (-9)$ c) $(-13) + (+9)$ d) $(+13) + (+9)$

75. a) $-1 + 3$ b) $5 + (-8)$ c) $-12 + (-13)$ d) $2 + (-2)$

76. a) $(-\frac{1}{2}) + (+\frac{1}{3})$ b) $(+\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{3})$ c) $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{3})$ d) $(+\frac{1}{2}) + (+\frac{1}{3})$

77. a) $\frac{3}{4} + (-1\frac{1}{6})$ b) $-2\frac{3}{8} + (-1\frac{1}{4})$ c) $-1\frac{2}{7} + 3$ d) $-\frac{5}{3} + 1\frac{2}{3}$

78. a) $(-1,34) + (-0,79)$ b) $(-0,7) + (+0,5)$ c) $(+1,2) + (+2,0)$

79. a) $-0,271 + 0,194$ b) $-6,7 + (-6,7)$ c) $13,40 + (-5,71)$

80. Sivulla 10 olevat neljä yhtälöä on kirjoitettava uudestaan jättämällä pois kaikki ne etu- ja sulkumerkit, jotka eivät ole välttämättömiä (vrt. 5 §).

81. Lämpötila oli eräänä aamuna -11° ja seuraavana aamuna 13° suurempi. Mikä oli lämpötila tällöin? Laskutoimitus on merkittävä.

82. Paljonko on $x + y$, kun

a) $x = -17, y = 25$ b) $x = \frac{7}{12}, y = -\frac{5}{8}$ c) $x = -0,284, y = -1,370$

83. Paljonko on $-r + s$, kun

a) $r = 1, s = -1$ b) $r = -4, s = -10$ c) $r = -\frac{1}{2}, s = 1\frac{5}{6}$

84. Laskettava seuraavien lausekkeiden arvot, kun $x = -3$:

a) $x + (x + 2)$ b) $|x| + (x + 2)$ c) $x + |x + 2|$ d) $|x| + |x + 2|$

85. Summan $x + y$ vastaluvuksi, jota on merkittävä $-(x + y)$, oli joku kirjoittanut väärin $-x + y$. On laskettava oikea ja mainitulla tavalla saatava väärä vastaluvun arvo, kun

a) $x = 3, y = 1$ b) $x = -4, y = -7$ c) $x = -2, y = 2$

86. Sievennettävä $|a + (-b)|$, kun a ja b merkitsevät positiivisia lukuja ja a) $a > b$ b) $b < a$.

87. 8 § :n lauseen mukaan on $-(x + y) = (-x) + (-y)$. On laskettava erikseen yhtälön molempien puolien arvot, kun a) $x = 2, y = -5$ b) $x = -3, y = -4$, ja todettava, että tosiaankin saadaan samat tulokset.

88. Kuinka on merkittävä luvun $a + (-1)$ vastalukua ja mihin yksinkertaisimpaan muotoon se voidaan saattaa 8 § :n lausetta hyväksi käyttäen?

89. 8 § :n lopussa olevaan yhtälöön sijoitettava $a = -13, b = +6, c = -9$ ja laskettava erikseen kummankin puolen arvot ja todettava, että tosiaankin saadaan samat tulokset.

90. Lukusuoralla on muodostettava summat $(-2) + (+6)$ ja $(-1) + (-6)$.

91. Lukusuoralla on muodostettava summa

- a) $(-3) + (+5) + (-8) + (-2) + (+7)$
 b) $(+4) + (+3) + (-6) + (-2) + (+10) + (-14) + (+5)$

92. Luvut 5, -3 ja -7 on lukusuoralla laskettava yhteen kaikissa mahdollisissa järjestyksissä ja todettava, että saadaan aina sama summan arvo.

93. Luvut -8, +5, -1, +3 on laskettava yhteen alla esitetyissä järjestyksissä ja todettava, että tulee todellakin aina sama luku :

- a) $(-8) + (+5) + (-1) + (+3)$
 b) $(-1) + (+5) + (+3) + (-8)$
 c) $[(+5) + (+3)] + [(-8) + (-1)]$
 d) $[(-1) + (+3)] + [(+5) + (-8)]$

94. Seuraavat yhteenlaskut on suoritettava ensin merkityssä järjestyksessä ja sitten »mukavimmassa järjestyksessä » :

- a) $793 + 884 + (-793)$
 b) $69 + 162 + (-71) + (-159)$
 c) $(-279) + (+118) + (+270) + (-25) + (-118) + (+10)$
 d) $\frac{-5}{12} + (-\frac{3}{7}) + (+\frac{2}{3}) + (-\frac{5}{12}) + (-\frac{4}{7})$

95. Kun on laskettava yhteen useampia positiivisia ja negatiivisia lukuja, niin usein on mukavinta laskea yhteen erikseen positiiviset ja negatiiviset yhteenlaskettavat ja sitten yhdistää saadut summat. Suoritettava näin seuraava yhteenlasku :

$$(+1,3483) + (-0,2937) + (-3,4609) + (+0,8636) + (-1,5818) + (+1,9157)$$

96. Järjestämällä yhteenlaskettavat sopivasti ja nojaamalla vastaluvun määritelmään on näytettävä, että

$$[a + b + c] + [(-a) + (-b) + (-c)] = 0$$

97. On laskettava yhteen peräkkäiset kokonaisluvut -99 :stä 100 :aan.

98. Jos kokonaisluvulla kertominen määritellään samalla tavalla kuin laskennossa silloinkin, kun kerrottavana on negatiivinen luku, niin mitä on a) $4 \cdot (-5)$ b) $4 \cdot (-a)$ c) $m \cdot (-a)$ (m posit. kokonaisluku ja a posit. luku) ?

VÄHENNYSLASKU

99. a) $(+5) - (+8)$ b) $(-11) - (-3)$ c) $(-4) - (+5)$ d) $(-7) - (-7)$

100. a) $3 - 7$ b) $5 - (-5)$ c) $-1 - 2$ d) $-4 - (-9)$

101. a) $(-\frac{1}{2}) - (-\frac{2}{3})$ b) $(+1\frac{3}{4}) - (-1\frac{1}{4})$ c) $(-2\frac{5}{6}) - (+\frac{7}{9})$ d) $(+\frac{2}{3}) - (+2)$

102. a) $\frac{5}{6} - (-\frac{5}{6})$ b) $5\frac{4}{5} - 8\frac{1}{8}$ c) $-\frac{1}{2} - (-\frac{3}{8})$ d) $-1 - 2\frac{3}{4}$

103. a) $(-1,2) - (+0,8)$ b) $(+10,8) - (-7,3)$ c) $(-3,4) - (-4)$

104. a) $-2,87 - 1,49$ b) $0,58 - (-0,08)$ c) $0 - (-0,24)$

105. Esimerkin 2 (11 §) laskut on kirjoitettava uudestaan jättämällä pois kaikki etumerkit ja sulkumerkit, jotka eivät ole välttämättömiä (vrt. 5 §).

106. Luvusta -4 on vähennettävä -7 , ja kääntäen.

107. Paljonko on $x - y$ ja $y - x$, kun

a) $x = 5, y = -12$ b) $x = -\frac{2}{3}, y = 2\frac{3}{4}$ c) $x = 0,068, y = -0,380$

108. Paljonko on $-m - n$, kun

a) $m = 8, n = 3$ b) $m = -\frac{5}{9}, n = \frac{5}{6}$ c) $m = -2,7, n = -2,31$

109. Mitä saadaan, kun positiivisesta luvusta p vähennetään sen vastaluku?

110. Laskettava seuraavien lausekkeiden arvot, kun $x = -2$:

a) $x - (x - 1)$ b) $x - |x - 1|$ c) $|x| - (x - 1)$ d) $|x| - |x - 1|$

111. Laskettava lausekkeen $|1 - x| + |x|$ arvo, kun

a) $x = -2$ b) $x = 0$ c) $x = 1$ d) $x = 2$

Ratkaistava yhtälöt :

112. $x - 5 = -3$

113. $x - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$

114. $-7 - x = 7$

115. $x + 5 = 3$

116. $-\frac{1}{4} + x = 2$

117. $1,8 + x = -0,7$

118. $|x - 1| = 1$

119. $|x + 3| = 5$

120. $|x - a| = |b|$

121. Eräällä paikkakunnalla oli lämpötila $+8^\circ$ ja toisella 13° vähemmän. Paljonko oli viimeksi mainittu lämpötila? Laskutoimitus merkittävä.

122. Alla olevasta taulukosta on määrättävä eri päivinä ilta- ja aamulämpötilojen erotus.

			lämpötila	
			klo 8	klo 20
maalisk.	1	p	-6°	-2°
»	2	»	-4°	$+3^\circ$
»	3	»	$+4^\circ$	$+1^\circ$
»	4	»	$+0^\circ$	-7°

123. Ratkaistava yhtälö $x - 5 = 5 - x$.

124. Millaisilla x :n arvoilla a) $|x - 2| = x - 2$ b) $|x - 2| = 2 - x$?

125. Pienimmästä suurimpaan luetelluista luvuista $-2, -1, 0, 1, 2$ vähennetään sama luku -1 . Mitä saadaan erotuksiksi ja millaisessa suuruusjärjestyksessä ne ovat?

126. Luvusta -1 vähennetään vuorotellen luvut $-2, -1, 0, 1, 2$. Mitä saadaan erotuksiksi ja millaisessa suuruusjärjestyksessä ne ovat?

127. Jos $a > b$, niin mitä voidaan sanoa toisiinsa verrattuina luvuista

$$a - b, b - a, |a - b|, |b - a|$$

128. *Lause* : $|a - b|$ = lukujen a ja b vastinpisteiden väli lukusuoralla, olkoonpa a suurempi, pienempi tai yhtäsuuri kuin b . Miksi näin on?

129. Määrättävä sekä laskemalla että mittaamalla lukusuoralla seuraavan kahden luvun vastinpisteiden väli lukusuoralla :

a) 2 ja 7 b) -2 ja -9 c) -8 ja 4 d) -5 ja 5

130. *Lause* : 1) Jos $a < b$, niin $a - b > 0$

2) Jos $a < b$, niin $a - b < 0$

Pääteltävä tämä oikeaksi lauseiden 4 ja 2 (11 §) avulla.

KERTOLASKU

131. a) $(+5)(-8)$ b) $(-3)(-11)$ c) $(-6)(+5)$ d) $(-1)(+1)$
132. a) $(-\frac{2}{5})(+\frac{3}{4})$ b) $(+1\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})$ c) $(-9)(-2\frac{5}{12})$ d) $(-\frac{3}{8}) \cdot 12$
133. a) $(-1,3)(-0,71)$ b) $(-12) \cdot 2,04$ c) $(-0,63)(-1)$ d) $0,2 \cdot (-0,1)$
134. a) $(-3)(-m)$ b) $n \cdot (-5)$ c) $(-a) \cdot 2$ d) $(-x)(-1)$
135. Mitkä ovat tulojen xy ja $x(-y)$ arvot, kun

a) $x = -16, y = 5$ b) $x = \frac{7}{12}, y = -3\frac{3}{14}$ c) $x = -0,2, y = -0,06$

136. Mitä saadaan, kun luku kerrotaan a) $+1$:llä b) -1 :llä?
137. a) $2 - 3(-1)$ b) $3(-4) + (-2)(-5)$ c) $-14 - (-7)(-2)$
138. a) $(-3)(+2)(-5)$ b) $(-1)(+\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})(+\frac{3}{4})$ c) $(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)$
139. Mitä on $-3xyz$, kun $x = -2, y = -1, z = 4$?
140. $687 \cdot 7698 \cdot (-8) + 687 \cdot (-7698) \cdot (-8)$
141. Mitä voidaan sanoa toisiinsa verrattuina lausekkeista

a) $a(b - c)$ ja $a(c - b)$ b) $2(n - 1)$ ja $-2(1 - n)$

142. Seuraavat laskut on suoritettava sekä merkityssä järjestyksessä että soveltamalla niihin ensin osittelulakia ja todettava, että molemmilla tavoilla saadaan sama tulos :

a) $(-3)[(-5) + (+4)]$ b) $0,4[(-0,2) + (-0,8)]$ c) $(-\frac{1}{2})[(-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4})]$

143. Seuraavat laskut on suoritettava sekä merkityssä järjestyksessä että soveltamalla niihin ensin asianomainen lauseista 2-4 (13 §) ja todettava, että molemmilla tavoilla saadaan sama tulos :

a) $7[6 + (-5) + (-7)]$ b) $[(-3) + 10 + 8](-4)$ c) $[(-2) + (+5)][(+9) + (-15)]$

JAKOLASKU

144. a) $\frac{-12}{+3}$ b) $\frac{-24}{-12}$ c) $\frac{+10}{+2}$ d) $\frac{+25}{-5}$ e) $\frac{-4}{+1}$ f) $\frac{+1}{-1}$

145. a) $\frac{1}{-2}$ b) $\frac{-2}{3}$ c) $\frac{-6}{-8}$ d) $\frac{7}{-1}$ e) $\frac{-10}{6}$ f) $\frac{5}{-5}$

146. a) $\frac{1}{2} : (-\frac{1}{3})$ b) $-1\frac{1}{2} : (-2\frac{1}{4})$ c) $(-\frac{3}{5}) : 4$ d) $(-7) : (-2\frac{1}{10})$

147. a) $5 : (-0,01)$ b) $(-2,7) : (-1,2)$ c) $(-1,94) : 0,21$ d) $\frac{2}{3} : (-0,7)$

148. Laskettava osamäärien $x : y$ ja $y : x$ arvot, kun

a) $x = -16, y = -40$ b) $x = 3, y = -1$ c) $x = -6, y = \frac{1}{6}$

149. Mitä saadaan, kun luku jaetaan a) itsellään b) vastaluvullaan?

150. Mitä saadaan, kun luku jaetaan a) $+1$:llä b) -1 :llä?

Ratkaistava yhtälöt :

151. $3x = -18$

152. $-5x = 23$

153. $-\frac{2}{5}x = -\frac{4}{15}$

154. $6x + 21 = 0$

155. $-2,4x + 7,07 = 6,86$

156. $x : (-7) = -8$

157. $\frac{x}{-92} = 1,35$

158. $\frac{-54}{x} = 9$

159. $\frac{-1\frac{3}{5}}{x} = -5\frac{1}{3}$

160. Viikon peräkkäisinä päivinä klo 8 havaittiin lämpötilat $+3^\circ, -4^\circ, +2^\circ, +3^\circ, -4^\circ, +9^\circ, 0^\circ$. Mikä oli näinä päivinä klo 8 keskilämpötila?

161. a) $-5 + \frac{6}{-3}$ b) $\frac{(-5)+(+6)}{-3}$ c) $\frac{-5}{-3} - \frac{+6}{-3}$

162. Mitä voidaan sanoa toisiinsa verrattuina lausekkeista

a) $\frac{x}{y-z}$ ja $\frac{x}{z-y}$ b) $\frac{a-1}{b-1}$ ja $\frac{1-a}{1-b}$

163. Seuraavat laskut suoritettava sekä merkityssä järjestyksessä että soveltamalla niihin ensin 15 § :n lause : a) $[(-3) + (+6) + (-12)] : (-3)$ b) $(-1\frac{3}{8} + \frac{7}{10}) : 1\frac{5}{12}$ c) $[0,2 + (-2,9) + 4] : (-0,25)$

164. Mikä on murtoluvun $\frac{a}{b}$ arvo, kun

$$\text{a) } a = 1, b = -2 \quad \text{b) } a = 2\frac{5}{8}, b = -1\frac{1}{6} \quad \text{c) } a = -2, b = -3,2$$

165. Seuraavat murtoluvut on lavennettava niin, että osoittaja ja nimittäjä tulevat kokonaisluvuiksi ja nimittäjä lisäksi positiiviseksi ja mahdollisimman pieneksi :

$$\text{a) } \frac{3}{-4} \quad \text{b) } \frac{-\frac{2}{3}}{1\frac{1}{3}} \quad \text{c) } \frac{-1,17}{0,7} \quad \text{d) } \frac{2,7}{-1,2}$$

166. Supistettava $1\frac{1}{2}$:lla murtolukuja : a) $\frac{1\frac{1}{2} \cdot 2}{-1\frac{1}{2} \cdot 3}$ b) $\frac{3}{4\frac{1}{2}}$

Supistettava :

167. $\frac{mn}{m}$

168. $\frac{4x}{6}$

169. $\frac{18ab}{15bc}$

170. $\frac{aaaa}{aa}$

171. $\frac{-5axx}{15aax}$

172. $\frac{m(a+b)}{ma}$

173. $\frac{18(p-2)}{12(p-2)}$

174. $\frac{18(p-2)}{12(p+2)}$

175. $\frac{18(p-2)}{12(2-p)}$

176. Luku a on pantava murtoluvun muotoon ja lavennettava sitten niin, että nimittäjäksi tulee b .

177. Seuraavat murtoluvut on lavennettava kokonaisluvulla niin, että ne tulevat samannimisiksi ja yhteiseksi nimittäjäksi pienin mahdollinen positiivinen kokonaisluku :

$$\text{a) } \frac{2}{3} \text{ ja } \frac{1}{-2} \quad \text{b) } \frac{5}{-6}, \frac{-1\frac{2}{3}}{-8} \text{ ja } \frac{-7}{12}$$

178. Seuraavat murtoluvut on tehtävä samannimisiksi siten, että osoittajat ja yhteinen nimittäjä tulevat mahdollisimman yksinkertaisiksi :

$$\text{a) } \frac{1}{5b} \text{ ja } \frac{a}{-5} \quad \text{b) } \frac{a}{b} \text{ ja } \frac{c}{d}$$

179. $\frac{-1}{5} - \frac{-4}{5}$

180. $\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

181. $\frac{-2}{a} + \frac{3}{a} + \frac{-4}{a}$

182. $\frac{x}{3} + \frac{2}{-5}$

183. $\frac{a}{b} - 1$

184. $-\frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{-1}{-8}$

185. Näytettävä, että

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Sijoitettava sitten tähän identtiseen yhtälöön kirjaimille arvot $a = -4\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{5}$, $c = -3\frac{1}{2}$, $d = -1\frac{2}{5}$ ja suorittamalla laskut todettava, että kummankin puolen arvoksi tulee todellakin sama luku.

186. $\frac{1}{b} \cdot a$

187. $-6m \cdot \frac{a}{-4}$

188. $bd \cdot \frac{a}{b}$

189. $\frac{3}{4} \cdot \frac{m}{n}$

190. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$

191. $(-\frac{a}{2}) \cdot \frac{b}{3}$

192. $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$

193. $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{u}$

194. $6 \cdot (-\frac{a}{4}) \cdot \frac{5}{a}$

195. Mitkä ovat lukujen 2 , $-\frac{2}{3}$, -1 ja $-n$ käänteisluvut?

196. $\frac{x}{a} : \frac{2}{3}$

197. $\frac{a}{4} : \frac{a}{6}$

198. $\frac{a}{b} : \frac{b}{c}$

199. $\frac{x}{y} : x$

200. $(-\frac{m}{n}) : (-\frac{1}{n})$

201. $ad : bd$

202. $\frac{6a}{b} : 8$

203. $a : \frac{m}{n}$

204. $\frac{a}{b} : \frac{1}{c}$

205. a) $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ b) $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ c) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ d) $\frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}}$ e) $\frac{\frac{a}{b}}{d}$ f) $\frac{a \cdot b}{d}$ g) $\frac{a}{b \cdot \frac{c}{d}}$

206. Määrättävä seuraavien lukujen suhde : a) 24 ja -6 b) -2 ja -8 c) $-2\frac{7}{16}$ ja $5\frac{5}{12}$ d) 1,28 ja $-0,092$ e) ab ja ac .

207. Paljonko on a) 8 km :n suhde 2 m :iin b) 600 g :n suhde 2,5 kg :aan ?

208. Paljonko on a) 1 mm :n suhde 1 km :iin b) 1 tunnin suhde 1 sekuntiin ?

209. Erään luvun suhde toiseen lukuun on $-1\frac{2}{3}$. Kuinka suuri on jälkimmäisen luvun suhde edelliseen ?

210. Mitä voidaan sanoa kahdesta luvusta, joiden suhde on a) 1 b) -1 ?

211. Minkä luvun suhde -4 :ään on a) -2 b) $2\frac{1}{6}$ c) $-1,23$?

212. Kahden luvun suhde $= -2\frac{2}{3}$. Mikä on suhteen edellinen jäsen, jos jälkimmäinen on a) 6 b) $-1\frac{3}{4}$ c) 0,57 ?

213. 6 :n suhde erääseen lukuun on a) 2 b) $-\frac{3}{4}$ c) $-1,2$. Mikä kysymyksessä oleva luku on ?

214. Kahden luvun suhde $= 0,48$. Mikä on suhteen jälkimmäinen jäsen, jos edellinen on a) 4 b) $-1,5$ c) $-\frac{3}{4}$?

215. Kirjoitettava kaikki verrannot, jotka seuraavat yhtälöstä $ab = 2 \cdot 3$ ja joiden jäseninä ovat $a, b, 2$ ja 3 .

216. Määrättävä x niin, että on voimassa verranto

$$\text{a) } x : 6 = 2 : 3 \quad \text{b) } -4 : x = 5 : 2 \quad \text{c) } -\frac{1}{6} : 2 = -\frac{2}{3} : x$$

217. Ratkaistava yhtälö

$$\text{a) } \frac{x}{5} = \frac{7}{-15} \quad \text{b) } \frac{1}{2} = \frac{2\frac{1}{2}}{-3\frac{1}{3}} \quad \text{c) } \frac{-0,31}{-0,06} = \frac{x}{0,03}$$

218. Mikä on verrannon neljäs jäsen, jos kolme ensimmäistä järjestyksessään ovat a) $\frac{5}{6}, -\frac{3}{7}, 1\frac{5}{9}$ b) a, b, c ?

POTENSSEJAT

219. Mitä on 2^n , kun $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$?
220. Mitä on 3^n , kun $n = 1, 2, 3, 4$?
221. Mitä on 10^n , kun $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?
222. Mitä 10 :n potensseja ovat tuhat, miljoona, biljoona, triljoona ja kvadriljoona ?
223. Mitä on $0,1^n$, kun $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?
224. Mitä $0,1$:n potensseja ovat tuhannesosa, miljoonasosa, biljoonasosa, triljoonasosa ja kvadriljoonasosa ?
225. a) 6^2 b) $(-6)^2$ c) 6^3 d) $(-6)^3$ e) $6^5 + (-6)^5$
226. a) $(-2,7)^2$ b) $0,13^3$ c) $(-0,2)^3$ d) $1,1^4$
227. a) $(\frac{1}{3})^2$ b) $(-\frac{1}{3})^3$ c) $(\frac{2}{3})^2$ d) $(1\frac{1}{4})^4$ e) $(-2\frac{1}{3})^3$
228. a) $(-3)^2$ b) -3^2 c) $(1-3)^2$ d) $1-3^2$
229. a) $(-3 \cdot 2)^4$ b) $-(3 \cdot 2)^4$ c) $-3 \cdot 2^4$
230. a) $(2^3)^2$ b) $(2^2)^3$ c) 2^{3^2} d) 2^{2^3}
231. Laskettava a) $(x+y)^3$ b) $x+y^3$, kun $x = \frac{1}{2}, y = -1\frac{1}{2}$.
232. Laskettava a) $(-2x)^2$ b) $-(2x)^2$ c) $-2x^2$, kun $x = 0,1$.
233. Laskettava a) $(-x)^{m+1}$ b) $-x^{m+1}$ c) $-x^m + 1$, kun $x = 2, m = 3$.
234. a) 0^{57} b) 1^{92} c) $(-1)^{73}$ d) $(-1)^{180}$
235. a) 0^n b) 1^n c) $(-1)^{2n}$ d) $(-1)^{2n+1}$
236. Minkälaisia ovat toisiinsa verrattuina a) x^2 ja $(-x)^2$ b) x^3 ja $(-x)^3$ c) $(a-b)^2$ ja $(b-a)^2$ d) $(a-b)^3$ ja $(b-a)^3$?
237. $(-a)^n$ on saatettava sellaiseen muotoon, että kantalukuna on a , kun $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.
238. a) $2^{15} + (-2)^{15}$ b) $m^3 - (-m)^3$ c) $(x-2)^4 - (2-x)^4$
239. Mikä on sellaisen neliön ala, jonka sivu on a) 12 cm b) a cm ?

240. Mikä on sellaisen kuution tilavuus, jonka särmä on a) 8 cm b) a cm?

241. a) $(5x)^2$ b) $(-3abc)^2$ c) $(-mnxy)^5$

242. Jos a kerrotaan kahdella, niin millä tulee kerrotuksi a^2 ja a^3 ?

243. Käyttämällä hyväksi lausetta 1 (19 §) tai vastaavaa kaavaa käänteisesti (kaava luetaan oikealta vasemmalle) laskettava mahdollisimman yksinkertaisesti : a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $4^3 \cdot 25^3$ c) $8^4 \cdot (\frac{1}{4})^4$ d) $(0,2)^n \cdot 5^n$

244. a) $(\frac{a}{b})^3$ b) $(\frac{x}{4})^3$ c) $(-\frac{1}{2})^3$

245. a) $(\frac{2a}{3})^2$ b) $(\frac{a}{-xy})^4$ c) $(\frac{1}{a})^p$

246. Käyttämällä hyväksi lausetta 2 (19 §) tai vastaavaa kaavaa käänteisesti on laskettava mahdollisimman yksinkertaisesti : a) $\frac{50^4}{25^4}$ b) $\frac{63^2}{9^2}$ c) $\frac{340^6}{34^6}$

247. Mikä on seuraavien lukujen suhde :

a) $(2a)^2$ ja a^2 b) $(2a)^3$ ja a^3 c) $(ka)^n$ ja a^n

248. a) a^4a^7 b) x^3xx^6 c) $nn^2n^3n^4$ d) $(a+b)^2(a+b)^3$

249. a) aa^p b) $a^{m-n}a^n$ c) $x^n x^n x^n$ d) $(x+1)^n(x+1)$

250. a) $(-x)^4x^3$ b) $(-x^4)x^3$ c) $-(x^4x^3)$

251. a) $(a-b)^2(a-b)$ b) $(a-b)^2(b-a)^4$ c) $(a-b)^3(b-a)^5$

252. a^5 on kaikilla mahdollisilla tavoilla esitettävä a :n potenssien tulona.

253. a) $(a^2)^3$ b) $(x^4)^3$ c) $[(k^3)^2]^5$ d) $[(-a)^3]^2$

254. a) $(a^2)^p$ b) $(y^m)^m$ c) $[(x^2)^p]^3$ d) $[(-k)^n]^2$

255. a) $(a^2b^3)^2$ b) $(a^4x)^3$ c) $(-2x^2)^4$

256. a) $(a^3bc^4)^2$ b) $(3a^2b^3c)^3$ c) $(-2axy^2)^5$

257. a) $(a^m x^3)^n$ b) $(3x^4 y^m)^2$ c) $(na^n b)^n$

258. a) $(\frac{a^2}{b^3})^2$ b) $(-\frac{a^2}{2})^3$ c) $(\frac{5ax^3}{b^2})^2$ d) $(\frac{x^2 y^n}{z})^n$

259. Minkä luvun neliö on a) 2^{12} b) a^8 c) $(x^2)^3$

260. Minkä luvun n :s potenssi on a) 2^{2n} b) $(3^n)^3$ c) x^{n^2} ?

261. a) $\frac{a^5}{a^2}$ b) $\frac{x^6}{x}$ c) $\frac{4^{20}}{4^{17}}$ d) $\frac{(ab)^3}{ab}$ e) $\frac{(a+b)^5}{(a+b)^4}$

262. a) $\frac{a^n}{a}$ b) $\frac{x^{p+1}}{x^p}$ c) $\frac{k^{2m}}{k^m}$ d) $\frac{(a+b)^{m+n}}{(a+b)^n}$

263. a) $\frac{-x^7}{x^2}$ b) $\frac{-x^7}{-x^2}$ c) $\frac{(-x)^7}{x^2}$ d) $\frac{x^7}{(-x)^2}$ e) $\frac{(-x)^7}{(-x)^2}$
264. a) $\frac{(x-1)^2}{x-1}$ b) $\frac{(x-1)^4}{(1-x)^2}$ c) $\frac{(x-1)^5}{(1-x)^2}$ d) $\frac{(1-x)^3}{(x-1)^2}$
265. a) $\frac{a^2a^3}{a^4}$ b) $\frac{(a^2)^7}{(a^3)^2}$ c) $\frac{(x^5)^3}{x^5x^3}$ d) $(\frac{n^3}{n})^4$
266. a) 2^0 b) $(a+b)^0$ c) onko $0^0 = 1$?
267. a) 4^{-3} b) 10^{-6} c) $(0,1)^{-3}$ d) $(1\frac{1}{2})^{-2}$ e) $(\frac{1}{x})^{-n}$
268. a) 5^{-1} b) $(0,2)^{-1}$ c) $(1\frac{2}{7})^{-1}$ d) $(\frac{a}{b})^{-1}$ e) x^{-1}
269. a) 3^{-2} b) $(-3)^{-2}$ c) -3^{-2} d) $-3 \cdot (-2)$ e) $-3 - 2$
270. a) 1^0 b) 1^{-1} c) $(-1)^0$ d) $(-1)^{-1}$ e) $[(-1)^{-1}]^{-1}$
271. Mitä 10 :n potensseja ovat 1000, 100, 10, 1, 0,1, 0,01, 0,001 ?
272. Kuinka on desimaalilukuna a) $5 \cdot 10^{-6}$ b) $2,08 \cdot 10^{-14}$?
273. Mitä on $x^2y^{-3}z^{-1}$, kun

$$\text{a) } x = 2, y = 3, z = \frac{2}{3} \quad \text{b) } x = -\frac{1}{4}, y = -1, z = -\frac{1}{2}$$

274. Seuraavat laskut on suoritettava 1) suoraan 20 § :n lauseiden avulla 2) muuntamalla ensin negatiiviset potenssit positiivisiksi :

$$\text{a) } a^m \cdot a^{-m} \quad \text{b) } (a^{-2})^{-3} \quad \text{c) } \frac{a^{-2}}{a^{-3}}$$

275. a) $[(m^3)^0]^{-5}$ b) $m^{-3}m^4$ c) $[(m^{-2})^3]^{-1}$ d) $m^2 : m^{-3}$
276. Auringon paino on $1,98 \cdot 10^{33}$ g ja vetyatomin $1,65 \cdot 10^{-24}$ g. Oletko painosi puolesta suhteellisesti lähempänä aurinkoa vai vetyatomia, so. onko auringon painon suhde omaan painoosi pienempi vai suurempi kuin painosi suhde vetyatomin painoon ?
277. a) lause 1 b) lause 2 (20 §) on näytettävä oikeaksi siinä tapauksessa, että molemmat eksponentit ovat negatiivisia.

POLYNOMIEN YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU

278. Millä kahdella tavalla voidaan tulkita lauseke $3 - 6 - 2 + 7 - 5 + 1$ ja mikä on sen arvo ?

279. Merkittävä lyhimällä tavalla lukujen $-a^2$, $-3ab$ ja b^2 summa.

280. Mitkä seuraavista polynomeista ovat erikoisesti monomeja, binomeja tai trinomeja ja mitkä ovat niiden jäsenet :

a) $-2x^2 + x + 4$ b) 1 c) $\frac{a+b}{c}$ d) $\frac{a+x}{2} - \frac{a-x}{2}$ e) $a + (b+c)$

281. Mitkä ovat x :n polynomin $2x^3 - x^2 - 3x + 1$ jäsenet ja kertoimet ? Mikä on polynomin arvo, kun a) $x = 2$ b) $x = -1$ c) $x = -\frac{1}{2}$?

282. Laskettava binomin $2x^3 - x^2y$ arvo, kun

a) $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ b) $x = 0,4, y = -1,2$

283. Näytettävä, että $x = \frac{1}{2}$ ja $-\frac{3}{4}$ ovat yhtälön $-8x^2 - 2x + 3 = 0$ juuria.

284. Mitkä ovat x :n polynomin $x^2 + 2ax - 3a^{-2}$ kertoimet ? Minkä lukujen summaksi tämä trinomi voidaan tulkita ? Onko se myös a :n polynomi ?

285. Mitkä ovat $\frac{x}{2}$:n polynomin $(\frac{x}{2})^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ kertoimet ?

286. Mitkä ovat x :n ja y :n polynomin $mx - 2(m-n)y - (m+n)$ jäsenet ja kertoimet ?

287. Mitkä polynomin $3ax^2 - 2a^2x^2 - 3 + x - ax - ax^2 + a - 8a^2x$ jäsenet ovat samanmuotoisia, jos sitä pidetään a) a :n ja x :n b) pelkän x :n polynomina ?

288. Mitkä polynomin $2ay + ax - 5bx + 3a - ay - b$ jäsenet ovat samanmuotoisia, jos sitä pidetään a) kaikkien siinä esiintyvien kirjaimien b) vain x :n ja y :n polynomina ?

289. $-7x + 5x - x$

290. $8ax - 3ax - 8ax$

291. $9n - 6n - 11n - n$

292. $-2a^2 + 3a^2 + 2a^2 - 3a^2$

293. $0,274a^2b^3 - 1,542a^2b^3$

294. $\frac{5}{8}xy - \frac{3}{4}xy - \frac{5}{6}xy + xy$

295. x :n polynomin $mx^2 - 5nx^2 - x^2$ samanmuotoiset jäsenet yhdistettävä.

296. $3m - 2 - 4m$

297. $a - b - 3b - 5a$

298. $1 - x^2 - 3 - 4x + 4x^2 - 3x^2$

299. $a^2b + \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{4}a^2b - ab^2$

300. $-4b - a - 2c + 3a - b + c - 3a + 2a + 2c$

301. $2mn - 5m^2 - mn + 2n^2 - 3mn + 5m^2 - n^2 - m^2$

302. $\frac{a}{b} + 3\frac{b}{a} - 5\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

303. $3x + \frac{1}{x} - 2\frac{1}{x} - 2x$

304. $3x^{n+1} + x^n - 4x^{n+1}$

305. $2(a+b)^2 - 5(a+b)^{-2} + 5(a+b)^2$

306. Seuraavan polynomien arvo on laskettava, kun a) $x = -7$ b) $x = 1\frac{1}{4}$:

$$-x - 7x^3 + 5 + 4x^3 - 4x^2 + 11x + 3x^3 - 8x - 3$$

307. x :n polynomien $px + px^2 - 1 + 4qx + x + px^2 - 3qx$ samanmuotoiset jäsenet on yhdistettävä. Mitkä ovat tämän jälkeen polynomien kertoimet ?

308. x :n ja y :n polynomien $m^2x - y - n + my - n^2x + m$ samanmuotoiset jäsenet on yhdistettävä. Mitkä ovat tämän jälkeen polynomien kertoimet ?

309. Tehtävissä 287 ja 288 esiintyvien polynomien samanmuotoiset jäsenet on yhdistettävä, kun polynomeja pidetään a) kaikkien niissä esiintyvien kirjaimien b) x :n ja y :n polynomeina. Mitkä ovat kunkin yhdistämisen jälkeen polynomien kertoimet ?

310. $(a + 1) + (a - 1)$

311. $(-3x + 2) + (x^2 - 2x) - 2x^2$

312. $(x - y) + (y - z)$

313. $m + (-2m^2 + m) + (m^2 - 1)$

314. $(2a^2b - 3ab^2 - b^3) + (3a^3 - a^2b + 4b^3) + (-3a^2b + 3ab^2)$

315. Mikä on polynomien $a + b + c$, $a - c$ ja $-2a$ summa ?

316. Mikä on binomien $xy - 8y^2$, $-6x^2 - 2xy$ ja $4x^2 + 8y^2$ summan arvo, kun a) $x = -7, y = 11$ b) $x = -0,3, y = -0,6$?

317. Mitkä ovat seuraavien polynomien vastapolynomit :

a) $a - b$ b) $-3x^2 + 2x - 1$ c) $-5m^2$

318. $(a - b) - (a + b)$
319. $(x^2 - y^2) - (y^2 - z^2)$
320. $x^2 - (-2x^2 + x - 3)$
321. $0,4am^2 - (1,2a^2m + 0,8am^2)$
322. $-2ab + b^2 - (-5a^2 - 2ab + 3b^2)$
323. $-(a - b)$
324. $-(a + 2b) + (2a - 2b)$
325. $(2ab^2 + 3b^3) - (3a^3 - ab^2 + b^3) + (a^3 + a^2b - 2b^3)$
326. $\frac{2}{3}x^2 - (\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{6}) + (\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x - 1\frac{1}{2})$
327. $1 + [x - (2 - 3x)]$
328. $x - n - [n - [n - x]]$
329. $-(x + 1) - [(x^2 - 1) - (2x^2 - x)] + 2$
330. Polynomi $a - 3b + 2c$ on kirjoitettava siten, että kaksi viimeistä jäsentä on suluissa, joita edeltää a) $+$ -merkki b) $-$ -merkki.
331. Lausekkeeseen a) $x - y - z$ b) $-x + y - z$ c) $x - y + z$ on sijoitettava $x = -a + b - c$, $y = a - c$, $z = 2a - b$.
332. Kuinka on merkittävä sitä, että trinomista $x - 2y - 1$ on vähennettävä binomien $3x - 2$ ja $2y + 1$ erotus, ja mitä saadaan, kun sitten laskut suoriteetaan?
333. Seuraavan lausekkeen arvo on laskettava, kun $x = 2$, $y = 32$:
- $$x^2 - [(xy + 16y^2) + (x^2 - 7y^2)] - (2xy - 9y^2)$$
334. Sievennettävä $|x| + x$, kun a) $x \leq 0$ b) $x \geq 0$.
335. Sievennettävä $|1 - x| + (1 - x)$, kun a) $x \leq 1$ b) $x \geq 1$.
336. Sievennettävä $|1 - x| + |x|$, kun a) $x \leq 0$ b) $0 \leq x \leq 1$ c) $x \geq 1$.
337. Sievennettävä $|x - 1| + |x| + |x + 1|$, kun
- a) $x \leq -1$ b) $-1 \leq x \leq 0$ c) $0 \leq x \leq 1$ d) $x \geq 1$
338. Mitkä ovat monomien a) $-5x^3y^5$ b) axy c) $2x^2$ d) $3c$ asteet 1) x :n 2) y :n 3) x :n ja y :n suhteen?

339. Monennenko asteen polynomi on $mx^3 - 2m^2x^2 + x$ a) m :n b) x :n
c) m :n ja x :n d) y :n suhteen?

340. Minkä kirjaimen suhteen seuraavat polynomit ovat homogeenisia :

a) $a^3 + 4a^2b - 3ab^2 - b^3$ b) $5x^y - xyz$ c) $a^2y + 2ax - x^2y$?

POLYNOMIEN KERTOLASKU

341. $a^2b^3c \cdot ab^2c^3$

342. $2a^x \cdot (-3ax^2)$

343. $(-ax)(-ay)$

344. $5p(-2mn)(-mp)$

345. $-4am^2 \cdot a^3m \cdot (-a)$

346. $b \cdot (-2a) \cdot 3c \cdot (-1)$

347. $\frac{1}{2}xy \cdot (-\frac{4}{5}x^2yz)$

348. $-3 \cdot 0,8x^2(-1,6x^3)$

349. $2x^m(-x^n)x^{m-n}$

350. $(-2x^{n-1}y)(3x^{n+2}y^{n-1})$

351. $1\frac{1}{2}a \cdot 3ab \cdot (-\frac{5}{6}a^2b^3)$

352. $a^n(-2a^{1-n}b^{p+1})(\frac{2}{3}b^{p+1})$

353. $(2ax^2)^3 \cdot (-a^2x)^2$

354. $(y^2z)^{-n} \cdot (-3y^n)^2 \cdot z$

355. Mikä on monomien $3xy^2$ ja $-5x$ kaksinkertainen tulo?

356. Lausekkeeseen $-2xy^4$ on sijoitettava $x = -3a^2b$, $y = -ab^2$.

357. $a(a + b - c)$

358. $-2x^2y(x^2 - y^2)$

359. $-3m^3(2m^2 - m - 1)$

360. $(0,2x^2 - 0,7)(-0,16ax^2)$

361. $(2x^3 - x^2 + x - 3)(-x^2)$

362. $\frac{2}{3}xy(\frac{3}{4}x^2 - 2xy + 1\frac{1}{4}y^2)$
 363. $a^m y(a^{p-m}y^n - a^m y^{-1})$
 364. $x^{2-m}(x^{m-1} - 2x^{m-2}y^2)$
 365. $a(a+b) - b(a-b)$
 366. $x^3 - x^2(1-2x)$
 367. $a^2(a-2) - 2a(2a^2-a) + 3(-a^3+4a^2)$
 368. $-a[a^3(a+b) - 3a^2(a^2-ab)]$
 369. $x - 2[x - 2(x-2)]$
 370. $(a^{n-1})^2(a^2 - a^{2(1-n)})$
 371. Näytettävä, että $(x^m)^{n-1}(x^{1-m})^m = (x^{n-m})^m$.
 372. $(a-2b)(a-3b)$
 373. $(a-x)(a^2-x^2)$
 374. $(2a-b)(2a^2+ab-b^2)$
 375. $(x-1)(x-2)(x+3)$
 376. $(\frac{1}{3}x - 1\frac{3}{5}y)(\frac{3}{4}x + 5y)$
 377. $(0,3x - 1,2)(2,8x - 0,8)$
 378. $(2m^2 - 3mn - n^2)(-m^2 + 5mn + n^2)$
 379. $(a^2 + 2 - a)(a - 2a^2 - 1 - 2a^3)$
 380. $(2 - x + 3x^2)(-1 + 2x - x^3)$
 381. $(a - 3b + 2c)(2a - b - 4c)$
 382. $2a - 2(2a - 1) - 2(a - 1)(2a - 1)$
 383. $[k^2 - x(k - 2x)][k^2 - (k + x)(2k - x)]$
 384. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) + (a - b)(b - c)(c - a)$
 385. $(x^n)^{n-1}[x^n - (x^{n-1})^2] + (x^{n-1})^{n+2}$
 386. Näytettävä oikeaksi yhtälöt :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

387. $(1 - q)(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + q^{10})$

388. $(x - 1)(x + 1)$

389. $(2a - 3b)(2a + 3b)$

390. $(5m^3n + 2)(5m^3n - 2)$

391. $(-a - bc)(-a + bc)$

392. $(-a^2b^3 + 3c)(-a^2b^3 - 3c)$

393. $(-x^3 + y^3)(x^3 + y^3)$

394. $(0,3x^3 + 3,0)(0,3x^3 - 3,0)$

395. $(p^2 - \frac{1}{2})(p^2 + \frac{1}{2})$

396. $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

397. $(a^n - b^n)(a^n + b^n)$

398. Käyttämällä hyväksi 28 § :n lausetta on laskettava päässä :

a) $19 \cdot 21$ b) $99 \cdot 101$ c) $48 \cdot 52$

399. $(2a + 1)^2$

400. $(3x^3y - 2x^2y^2)^2$

401. $(a^2 + b^2)^2$

402. $(-xy + 1)^2$

403. $(-2a^2 - 5a)^2$

404. $(x^2 - \frac{1}{2}ax)^2$

405. $(0,2x^2y - 0,6y^3)^2$

406. $(\frac{3}{4}m + \frac{1}{3}n)^2$

407. $(a^2 + b^2) - (a + b)^2$

408. $(x + y)^2 - (x - y)^2$

409. $(x^{n-1})^{n-1} \cdot (x^n)^{2-n}$

410. $(a - x)(x - a)$

411. $(x - 3)^2 - (3 - x)^2$

412. $(a - 1)(a + 1) - (a - 1)^2$

413. $(a + b + c)(a + b - c)$

414. $(2x + 3)^2(2x - 3)^2$

415. $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$

416. $(x^3 - x^2 + x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

417. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$

418. $1 - [(-1 + x)^2 - x(x - 2)]$

419. $(x^2y^2 - y^4)[(xy + y^2)^2 - 2xy^3]$

420. Näytettävä, että jos $x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$, niin aina on $x^2 + y^2 = z^2$. Sitten on laskettava x, y ja z , kun

a) $m = 2, n = 1$ b) $m = 3, n = 2$

421. Näytettävä oikeaksi yhtälö

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

422. Käyttämällä hyväksi 29 § :n lausetta 1 on laskettava päässä seuraavien lukujen neliöt : a) 21 b) 19 c) 101 d) 102 e) 1,001.

423. Näytettävä, että numerolla 5 päättyvän kokonaisluvun neliö saadaan niinkin, että tämä numero pyyhitään pois luvusta ja jäljelle jäänyt luku kerrotaan yhtä suuremmalla luvulla ja sitten kirjoitetaan perään luku 25. Laskettava sitten tämän mukaisesti a) 45^2 b) 85^2 c) 105^2 .

424. Todistettava, että kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta pienimmän ja suurimman a) tulo on aina pienempi kuin keskimmäisen luvun neliö b) neliöiden keskiarvo on aina suurempi kuin keskimmäisen luvun neliö.

425. Trinomiin $x^2 + px + q$ on sijoitettava $x = y - \frac{1}{2}p$ ja tulos »kehitettävä» y :n polynomiksi.

426. $(x + y - z)^2$

427. $(x^2 - 3x + 2)^2$

428. $(2a - b - 3c + d)^2$

429. $(x^2 - x - 1)^4$

430. Näytettävä oikeaksi yhtälö : $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2$

431. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)^2$
432. Muodostettava Pascalin kolmion kymmenen ensimmäistä riviä.
433. Kun $(a + b)^2$ kehitetään a :n alenevien potenssien mukaan polynomiksi, niin mitkä ovat kaksi ensimmäistä ja kaksi viimeistä jäsentä?
434. $(a + b)^6$
435. $(x + 1)^3$
436. $(x - 1)^3$
437. $(a - x)^4$
438. $(a^2 + 2)^3$
439. $(x^2 + y^2)^3$
440. $(x^2 - x)^5$
441. $(a - 1)^4(a + 1)^4$
442. $(2x - 3y)^4$
443. $(x - y)^3(x + y)^3 - (x^3 + y^3)[(x - y)^3 + 3xy(x - y)]$
444. Näytettävä, että kahden mielivaltaisen luvun summan kuution ja kuu-
tioiden summan erotus = lukujen tulo ja summan kolminkertainen tulo.
445. Käyttämällä hyväksi 30 § :n lausetta on laskettava a) $1,1^3$ b) $1,1^5$.
446. Polynomiin $x^3 + 9x^2 - 3x - 30$ on sijoitettava $x = y - 3$ ja kehitettävä tulos
 y :n alenevien potenssien mukaan.
447. Binomiin $x^3 - xy^2$ on sijoitettava $x = m - n$, $y = m + n$.

POLYNOMIEN JAKOLASKU

448. $\frac{a^3b^4}{ab^3}$
449. $\frac{-8xy^2z^2}{2xy}$
450. $\frac{-15p^2q}{-3}$
451. $\frac{a^2x^2}{2ax^3}$
452. $\frac{-3m^2np^4}{-9m^2n^3p^2}$

$$453. \frac{4a^2b}{-4ab^2}$$

$$454. \frac{x^m y^{n+1}}{x^{m-2} y^{n-1}}$$

$$455. \frac{4a^4 x^{n+1}}{-2a^2 x}$$

$$456. \frac{(-1)^m a^{2m} b^{m+2}}{(-1)^{m+1} a^m b^{2-m}}$$

$$457. (-3p^{-3}qr^2)^2 : (-6p^{-4}q^2r)$$

$$458. (a^3b^{-2}c)^{-3} : (a^{-3}b^2c^{-1})^3$$

$$459. \frac{4x^2(4+x^2)}{4+x^2}$$

$$460. \frac{-12(a-x)^3}{-4(x-a)}$$

$$461. \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{(a+b)^2}$$

$$462. \frac{a^2-ab}{a}$$

$$463. \frac{8x-6y-4}{2}$$

$$464. \frac{3a^3-15a}{3a}$$

$$465. \frac{k^2m^5-2k^3m^4-k^2m^2}{k^2m^2}$$

$$466. \frac{2x^3y^3z-6xy^4}{-2xy^2}$$

$$467. \frac{x^4-2x^3+3x^2}{x^2}$$

$$468. \frac{-2a^{2m}b^{3n-1}+a^{m+2}b^{2n+1}}{a^{m-1}b^{2n}}$$

$$469. \frac{a(x-y)-b(x-y)}{x-y}$$

$$470. \frac{9x^3-6x^2(x-3)}{3x^2}$$

471. Binomi $a^4 + 2a^2b^2$ on esitettävä kahden tekijän tulona siten, että toinen tekijä on a^2 .

472. Binomi $(a-1)^2 + 2(a-1)(a+1)$ on esitettävä kahden tekijän tulona siten, että toinen tekijä on $a-1$.

$$473.^1 (6a^2 + 11ab - 10b^2) : (3a - 2b)$$

$$474.^1 (3x^3 - 8x^2 + 3x + 2) : (x - 2)$$

¹Tulos on tarkistettava osamäärän määritelmään tai 33 § :n lopulla esitettyyn sääntöön nojautuen.

$$475.^1 (7a - 4a^3 - 3) : (3 - a - 2a^2)$$

$$476.^1 (9x^5 - 6x^2 - 14x + 5x^3 - 12) : (3x^2 + 2 + 4x)$$

$$477.^1 (3x^4 + 4x^2y^2 - 2x^3y + 3xy^3 - 2y^4) : (3x^2 + xy - y^2)$$

$$478.^1 (a^4 + b^4 + a^2b^2) : (a^2 + b^2 + ab)$$

$$479.^1 (x^2 - 6a^2 - ax + x + 7a - 2) : (x - 3a + 2)$$

$$480.^1 \frac{a^3 - b^3}{a - b}$$

$$481.^1 \frac{a^5 - b^5}{a - b}$$

$$482.^1 \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

$$483.^1 \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$484.^1 \frac{x^4 + 1}{x + 1}$$

$$485.^1 \frac{x^5 + 1}{x^2 + 1}$$

486.¹ Kun binomi $a^4 + 4b^4$ esitetään tulona, jonka toinen tekijä on $a^2 + 2b^2 - 2ab$, niin mikä on toinen tekijä?

487. On näytettävä, että

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

a) suorittamalla oikealla puolella merkitty jako (annetaan jaettavan ja jakajan olla järjestettynä q :n ylenevien potenssien mukaan)

b) kertomalla $(1 - q)$:lla vasemmalla puolella oleva polynomi.

488. Edellisen tehtävän kaavaa hyväksi käyttäen on laskettava

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$

b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$

489. Mitä arvoa lähenee summa $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$, kun n kasvaa rajattomasti?

ENSIMMÄISEN ASTEEN YHTÄLÖT²

$$490. 2 + x = -5$$

²Kun yhtälö on ratkaistu, on tarkistettava, toteuttaako saatu juuri yhtälön. Näin on meneteltävä ainakin niiden yhtälöiden suhteen, joiden juurta ei ole ilmaistu vastausluettelossa.

491. $x = 5 - x$
492. $6 - x = 12 - 3x$
493. $5x - 7 = 11x + 8$
494. $12 - 7x - 23 = 4x + 13 - 5x$
495. $1 - 5x = 6x - 1 - 8x$
496. $-1,77 = x + 3,62$
497. $0,2x - 1,2 = 0,6x + 0,8$
498. $3x - (x - 5) = 4x - 3$
499. $2(3x - 5) = 10(x - 1)$
500. $(2x - 1) - (6x - 4) = 0$
501. $x - 2(x - 3) = x - 4(x + 3)$
502. $0,31(x + 1,20) = 2,67x + 1,18$
503. $(x - 2)(x - 3) = (x - 4)(x + 3)$
504. $(x + 1)^2 - x^2 = 2(x + 1)$
505. $x(x + 1) - (x - 1) = x^2 + 1$
506. $1 - [2 - (x - 1)^2]^2 = (1 - x)(1 + x)$
507. $(x^2 - x - 2)^2 = (x^2 + x)(x^2 - 3x)$
508. $\frac{2x}{3} = 3$
509. $\frac{2}{3} = 3x$
510. $\frac{3x+5}{2} = 1$
511. $\frac{3x+5}{2} = 0$
512. $12 - \frac{x}{5} = x$
513. $\frac{x}{4} - 5 = x - \frac{1}{2}$
514. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$
515. $\frac{2x-3}{5} = \frac{x+1}{3}$
516. $\frac{2x}{25} + \frac{3(100-x)}{100} = 6$
517. $\frac{3x}{4} - \frac{2x-1}{6} + \frac{7}{12} = 0$

518. $\frac{x}{10} - \frac{5x-1}{4} = 2 - x$
519. $\frac{11}{15}x - \frac{5}{6}(x-2) = 0$
520. $\frac{2(x-4)}{3} = 3(x-2) - \frac{4x-3}{2}$
521. $\frac{2,1x+0,4}{0,3} - 1,3 = 19,4$
522. $\frac{8x+9}{10} + \frac{7x-6}{25} = \frac{3(x+2)}{5} - \frac{x+3}{20}$
523. $2(x+1) - \frac{4x-1}{9} - \frac{5(x+2)}{12} - \frac{5x+2}{4} = 0$
524. $\frac{1}{4}[3 - 2x + \frac{11}{2}(x-1)] = \frac{2}{3}[4x - 3(x + \frac{4}{3})]$
525. $\frac{2x+5}{3} - \frac{x+6}{2} - \frac{x-8}{6} = 0$
526. $\frac{5(4x-1)}{8} - \left(x - \frac{3(1-x)}{2}\right) = 2$
527. $ax + b = 0$
528. $a = bx + c$
529. $7x - a = 5x - b$
530. $ax - 7 = bx - 5$
531. $ax + b = cx + d$
532. $nx = n - k(x-1)$
533. $x^2 - (1-x)(a-x) = 0$
534. $(x-a)^2 - (x+a)^2 = 4 - 2(ax+1)$
535. $\frac{x}{3} + \frac{a-x}{6} = \frac{a}{4}$
536. $(x - \frac{a}{2})(x + \frac{a}{2}) - x(x - \frac{a}{3}) = 0$
537. $\frac{x-k}{2} = \frac{k+1}{3}$. Millä k :n arvolla yhtälön juuri on a) $x = 0$ b) $x = \frac{1}{2}$?
538. $\frac{1}{2} - \frac{kx}{5} = 1 - \frac{x}{10}$. Mikä on juuren arvo, kun $k = -4\frac{1}{2}$? Millä k :n arvolla yhtälöllä ei ole juurta?
539. $1 + (m-n)x = m(4x-3) - 3(m+1)x$. Millä lukujen m ja n arvoilla
a) yhtälön juuri = 0 b) yhtälöllä ei ole juurta c) yhtälö on identtinen?
540. $|x-3| = 5$
541. $|x-3| = |x|$
542. $5x+2 = 3x-4$

543. $|5x + 2| = |3x - 4|$

544. $5x + 2 = |3x - 4|$

545. $|5x + 2| = 3x - 4$

Sekalaisia probleemoja¹

546. Millä luvulla on sellainen ominaisuus, että kun se kerrotaan 5 :llä tai siihen lisätään 5, niin saadaan sama tulos?

547. Minkä luvun puolisko on 10 suurempi kuin luvun kolmannes?

548. Luku 51 on jaettava kahteen osaan niin, että toinen osa on viidesosa toisesta.

549. Luku 78 on jaettava kolmeen osaan, joista yksi on 11 pienempi kuin toinen ja kolmas on yhtäsuuri kuin nämä molemmat yhteensä.

550. $\frac{5}{8}$ eräästä luvusta on a) $4\frac{1}{8}$ b) k . Mikä luku on?

551. Jos eräs luku jaetaan sitä tuhatta pienemmällä luvulla, saadaan osamääräksi 13 ja jakojäännökseksi 16. Mikä luku on?

552. Mitkä ovat ne kaksi lukua, joiden erotus = 51 ja suhde = 2,5?

553. Pojalla oli kanoja ja kaneja. Niillä oli yhteensä 33 päätä ja 100 jalkaa. Montako kanaa ja kania pojalla oli?

554. Isä on 42 v ja poika 9 v vanha. Monenko vuoden perästä isä on kaksi kertaa niin vanha kuin poika?

555. A on viisi kertaa niin vanha kuin B . 24 vuoden perästä A on enää kaksi kertaa niin vanha kuin B . Kuinka vanhoja ovat A ja B ?

556. Yhteiskoulussa oli tyttöjä 43 enemmän kuin poikia, joiden lukumäärä oli $\frac{7}{8}$ tyttöjen lukumäärästä. Montako oppilasta oli koulussa?

557. Kolmion suurin kulma on kolme kertaa niin suuri kuin pienin ja kolmas kulma on viimeksi mainittua 35° suurempi. Kuinka suuret ovat kulmat?

558. 18 000 mk on jaettava A :n, B :n ja C :n kesken niin, että B saa $\frac{2}{3}$ siitä minkä A saa ja C kaksi kertaa niin paljon kuin B . Paljonko kukin saa?

¹Kun probleema on ratkaistu, on tarkistettava, täyttääkö saatu tulos probleemassa asetetut ehdot. Näin on meneteltävä ainakin niiden probleemojen suhteen, joiden ratkaisua ei ole ilmaistu vastausluettelossa.

559. Henkilön kuukausipalkasta kului kolmas osa ravintoon ja puolet kaikenlaisiin muihin menoihin. Kuinka suuri oli hänen kuukausipalkkansa, kun säästöön jäi 80 mk ?
560. Erään 6-numeroisen luvun ensimmäinen numero on 1. Jos tämä siirretään luvun loppuun, saadaan alkuperäinen luku kolminkertaisena. Mikä kysymyksessä oleva luku on ?
561. Mikä on sellainen kaksinumeroinen kokonaisluku, että kun sen alkuun ja loppuun liitetään numero 2, niin luku tulee 32 kertaiseksi ?
562. Mikä on sen lukujärjestelmän kantaluku, jossa kymmenjärjestelmän lukua 111 merkitään 93 :lla ?
563. Missä lukujärjestelmässä on $3 \cdot 25 = 76$?
564. Henkilö osti koivu- ja mäntyhalkoja yhteensä 20 syltä. Edellisten hinta oli 80 mk ja jälkimmäisten 60 mk syleltä. Myyjä veloitti häntä yhteensä 1 330 mk. Montako syltä hän oli saanut koivuja ja montako mäntyjä ?
565. Erään huoneiston sähkön kulutuksesta on maksettava kuukausittain joko 6 mk 50 p suuruinen pohjamaksu ja lisäksi 7 p kilowattitunnilta (kWh) tai ilman pohjamaksua 15 p kilowattitunnilta. Kuinka monta kilowattituntia on kuukausikulutuksen vähintään oltava, jotta kannattaisi valita ensin mainittu maksutapa ?
566. Kuinka suuri on sellaisen neliön sivu, jonka ala suurenee a^2 neliömetriä, kun sivua suurennetaan b metriä ?
567. Suorakulmion muotoisen tontin kadun suuntaiset sivut ovat 40 m ja toiset 50 m. Tontti on jaettava kahdeksi tontiksi kadun suuntaisella suoralla siten, että tonttien alat tulevat yhtä suuriksi sen jälkeen, kun kadun puoleisen tontin reunasta on erotettu toiselle tontille johtava 3 m levyinen katua vastaan kohtisuora tie. Kuinka kauaksi kadusta on rajaviiva vedettävä ? Tien ei katsota kuuluvan kumpaankaan tonttiin.
568. Jos auton tuntinopeutta lisätään 15 km :llä, niin se suorittaa 3 t 30 min :ssa saman matkan, jolla se on ennen viipynyt 4 t 40 min. Kuinka suuri on auton alkuperäinen nopeus ?
569. Kaksi poikaa, jotka ovat samalla maantiellä d metrin etäisyydellä toisistaan, lähtevät yhtäaikaan liikkeelle, toinen juosten nopeudella a m/s ja toinen kävelen nopeudella b m/s. Kuinka pitkän ajan kuluttua pojat kohtaavat toisensa, jos he liikkuvat a) vastakkain b) samaan suuntaan, kävelijä edellä. Sovellutus : $d = 1000$, $a = 4$, $b = 1\frac{1}{2}$.

570. Mies ajoi autolla 225 mk ja viipyi matkalla 5 t 15 min. Ensin hän ajoi nopeudella 40 km/t, mutta lisäsi myöhemmin nopeuden 60 km/t :ksi. Kaukanako päämäärästään hän oli nopeutta lisätessään ?

571. Auto ohittaa jalkamiehen klo 13.10 30 km :n päässä kirkonkylästä A , jonne molemmat ovat matkalla. Mihin aikaan auto kohtaa paluumatkallaan jalkamiehen, jos auton nopeus on 50 km/t ja jalkamiehen 6 km/t sekä auto viipyy A :ssa 30 min. ?

572. Verrannon keskimmäiset jäsenet ovat yhtäsuuret. Ensimmäinen jäsen on 5 suurempi kuin neljäs jäsen ja 2 pienempi kuin kumpikin keskimmäinen jäsen. Mikä verranto on kysymyksessä ?

573. Mikä luku on lisättävä lukuihin 7 ja 2, jotta summat tulisivat verrannollisiksi lukuihin 7 ja 3 ?

574. Jana, jonka pituus on a , on jaettava kahteen osaan, joiden suhde on $m : n$. Tehtävä ratkaistava kummallakin esimerkissä 3 (55 §) käytetyllä keinolla.

575. Kolmion kulmat suhtautuvat toisiinsa kuten 3 : 5 : 7. Kuinka suuria kulmat ovat ?

576. Luku k on jaettava neljään osaan, jotka suhtautuvat toisiinsa kuten $a : b : c : d$.

577. Ympyrän kehä jaetaan neljään osaan, joiden pituudet suhtautuvat toisiinsa kuten 1 : 2 : 3 : 4. Mitkä ovat näiden kaarien asteluvut ?

578. Neljä henkilöä on sijoittanut yhteiseen liikeyritykseen varoja : A 5 000 mk, B 7 500 mk, C 10 000 mk ja D 15 000 mk. Kuinka on vuosivoitto 2 700 mk heidän kesken jaettava ?

579. Suoritettava jako $(x^2 + ax - 6) : (x - 2)$. Mikä arvo tulee a :lla olla, jotta jako menisi tasan ?

580. Määrättävä k :lle sellainen arvo, että jako menee tasan, kun trinomi $2x^2 + x - 2(k^2 + 1)$ jaetaan $(x + k)$:lla.

581. Mikä arvo tulee k :lle antaa, jotta yhtälöllä

$$\frac{x - k}{3} + \frac{1 + k}{4} = 0, \quad \frac{x}{7} = \frac{k - x}{3}$$

olisi sama juuri ?

582. Millä a :n arvolla yhtälön $x^3 - (2a + 3)x - 5a = 0$ juuri on $x = -1$?

583. Mikä on p :n arvo, kun tiedetään, että $x = -\frac{1}{2}$ on yhtälön $px^2 - (p + 1)x + 1 = 0$ juuri ?

584. Mikä on k :n arvo, kun tiedetään, että lauseke $2 - x(k - x^2)$ saa arvon -1 , kun $x = -3$?

585. Mitkä arvot tulee antaa luvuille a ja b , jotta yhtälö

$$\frac{a(x-a)}{3} + \frac{b+5}{12} = \frac{b}{8} - \frac{x+a}{3}$$

olisi identtinen?

Prosenttilaskuja

586. Kauppias möi tavaran 483 mk :lla ja voitti tällöin 15 %. Mikä oli hänen ostohintansa?

587. Tavara, jonka hinta oli 84 mk, myytiin 80 mk :lla. Kuinka suuri oli alennusprosentti?

588. Kauppaan oli ostettu hedelmiä 1 mk 20 p kg :lta ja myytiin aluksi 1 mk 50 p kg :lta. Mikä oli tällöin voittoprosentti? Kun puolet hedelmistä oli myyty, alennettiin niiden hintaa 8 %. Mikä oli uusi myyntihinta? Montako % kauppias voitti koko hedelmämäärällä?

589. Luokalla on 20 poikaa ja 16 tyttöä. Montako % oppilaista on poikia ja montako % tyttöjä? Montako % enemmän on poikia kuin tyttöjä ja montako % vähemmän on tyttöjä kuin poikia?

590. Suomen asukasluku oli v. 1950 4,03 milj. ja v. 1960 4,47 milj. Kuinka monta % oli väestön lisäys kuluneiden 10 v :n aikana? Kuinka suuri Suomen asukasluku olisi v. 1970, jos sen lisäys vuosina 1960–70 olisi yhtä monta % kuin vuosina 1950–60?

591. Suomen asukasluku oli v. 1880 2,06 milj. ja v. 1890 2,38 milj. Montako % suurempi oli väestön lisäys vuosina 1950–60 (ks. ed. teht.) kuin vuosina 1880–90? Kuinka paljon pienempi oli väestön lisäyksen prosenttiluku ensin mainittuna 10-vuotiskautena kuin viimeksi mainittuna?

592. Kolmion kulma, joka $= 63^\circ$, on $12\frac{1}{2}$ suurempi kuin saman kolmion toinen kulma. Kuinka suuret ovat kolmion kulmat?

593. Kauppias on ostanut tavaraa ja maksanut 5 mk 25 p kg :lta. Kuinka suureksi pitää hänen asettaa myyntihintansa voidakseen käteisostajilleen myöntää 10 % alennuksen ja kuitenkin voittaa 20 %?

594. Kauppias, myytyään osan eräästä tavaraerästä 15 % :n voitolla, myy loput ostohinnallaan ja voittaa näin koko tavaramäärällä 12 %. Montako % tavarasta hän möi ostohinnallaan ?
595. Kauppias oli myynyt omenoita 20 % voitolla. Kun hän myöhemmin joutui maksamaan omenakilosta 6 % enemmän kuin ennen, niin hän nosti myyntihintaansa niin monta %, että hän sai omenakilosta voittoa yhtä monta markkaa kuin ennenkin. Mikä oli tuo % ?
596. a on 80 % b :stä. Montako % on b a :sta ?
597. a on p % lukua b suurempi. Montako % on luku b lukua a pienempi ?
598. $m > n$. Montako % m on lukua n suurempi ja montako % n on lukua m pienempi ?
599. Kuinka paljon kuparimalmia, jonka kuparipitoisuus on 32 %, tarvitaan valmistettaessa 12 kg messinkiä, jonka tulee sisältää 60 % kuparia ?
600. Tavallinen boorivesi sisältää 2% boorihappoa. Paljonko boorihappoa on lisättävä 285 g :aan boorivettä, jotta saatu liuos sisältäisi 5 % boorihappoa ?
601. Paljonko vettä on haihdutettava 30 kg :sta 5 % :sta suolaliuosta, jotta saataisiin 8 % :sta liuosta ?
602. Paljonko on sulatettava yhteen 800 ‰ ja 600 ‰ kultaa, jotta muodostuisi $\frac{1}{2}$ kg 750 ‰ kultaa ?
603. 4 % :een suolaliuokseen lisättiin suolaa 4 kg, jolloin syntyi 6,25 % :nen liuos. Paljonko liuosta oli alkuaan ?
604. Sekoittamalla keskenään 2 % :sta ja 7 % :sta suolaliuosta on saatu $5\frac{1}{2}$ % :sta liuosta. Montako prosenttia siinä on kumpaakin liuosta ?
605. Jos maito sisältää 3,5 %, kerma 15,5 % ja kuorittu maito 0,5 % rasvaa, niin paljonko kermaa saadaan maitokilosta ?
606. Puhdasta kahvia ja kahvinkorviketta sekoitetaan suhteessa 3 : 2. Montako % puhdasta kahvia sekoitus sisältää, jos korvikkeessa on 15 % puhdasta kahvia ?
607. Tuontitavaran tullia korotettiin eräänä vuonna 60 % :lla. Kuinka monella % :lla tavaran tuonti saa enintään vähentyä, jotta valtion tullitulot eivät pieneneisi ?
608. Jos suorakulmion sivuja pidennetään p %, niin montako % suurenee suorakulmion ala ? Sovellutus : $p = 20$.

609. Jos suorakulmion toisia yhdensuuntaisia sivuja pidennetään p %, niin montako % pitää toisia yhdensuuntaisia sivuja pidentää, jotta suorakulmion ala suurensi $2p$ %? Sovellutus : $p = 20$.

610. Henkivakuutusasiamies A saa kuukausipalkkaa 600 mk ja lisäksi 10 ‰ hankkimistaan vakuutussummista. Asiamies B taas saa 16 ‰ hankinnastaan, mutta ei ollenkaan vakinaista palkkaa. Kuinka paljon on B :n hankittava vakuutuksia kuukaudessa, jotta hän ansaitsisi yhtä paljon kuin A samalla hankinnalla?

Korko- ja diskonttolaskuja

611. Paljonko korkoa tuottaa 1 800 mk $4\frac{1}{2}$ % mukaan 70 p :ssä?

612. Mikä pääoma kasvaa 5 % mukaan 8 kk :ssa 3 720 mk :ksi?

613. Henkilö maksoi syysk. 6 p :nä 6 000 markan suuruisen lainansa, jonka hän oli ottanut heinäk. 18 p :nä samana vuonna. Korkoa hän suoritti 52 mk. Minkä % mukaan oli korko laskettu?

614. Maalisk. 2 p :nä suoritettiin 400 mk :n laina korkoineen. Milloin oli laina otettu, kun korkoa jouduttiin maksamaan 6 % mukaan 5 mk 67 p?

615. Henkilö on antanut lainaksi 12 000 mk, josta 2 000 mk 4 %, 3 500 mk $4\frac{1}{2}$ % ja loput 5 % korkoa vastaan. Minkä prosentoin mukaan hän saa keskimäärin rahoistaan korkoa?

616. Kuinka suuri pääoma kasvaa kalenterivuoden kuluessa 5 % mukaan 100 mk :ksi, jos korko liitetään pääomaan a) vain vuoden lopussa b) myös kesäk. 30 p :nä?

617. Henkilöllä on kaksi velkaa, yhteensä 24 000 mk. Toisesta hän maksaa korkoa $4\frac{1}{2}$ % mukaan ja toisesta 5 % mukaan. Kuinka suuria ovat velat, kun tiedetään, että hän maksaa puolivuositain korkoa yhteensä 550 mk?

618. Koululainen, jonka oli laskettava erään pääoman korko $2\frac{1}{2}$ v :ssa $5\frac{1}{4}$ % mukaan, laski epähuomiossa koron $2\frac{1}{2}$ v :ssa $5\frac{1}{2}$ % mukaan ja sai näin 3 mk 60 p liian pienen tuloksen. Kuinka suuri oli oikea korko?

619. Näytettävä, että kun on kysymyksessä virallinen diskontto, niin

$$k = \frac{K}{1 + \frac{pt}{100}}$$

620. Näytettävä, että kun on kysymyksessä kauppadiskontto, niin

$$k = \frac{K}{1 - \frac{pt}{100}}$$

621. Henkilön on maksettava vuokraamastaan tontista kunkin vuoden tammi- ja heinäkuun 1 p:nä vuokraa 400 mk. Jos hän haluaa suorittaa tammikuun 1 p:nä myös seuraavan vuokramaksun, niin paljonko hänen on tällöin siitä suoritettava, jos alennusta annetaan 5 % a) kauppadiskontton mukaan b) virallisen diskontton mukaan?

622. Ostaja tarjosi kiinteistöstä 360 000 mk, luvaten siitä maksaa heti kolmanneksen, 3 kuukauden perästä toisen kolmanneksen ja 6 kuukauden perästä loput. Mikä oli tarjouksen nykyarvo a) kauppadiskontton mukaan b) virallisen diskontton mukaan, kun korkokanta on 6 %?

623. 20 000 mk:n suuruisen 3 kuukauden vekseli diskontattiin heti. Paljonko sillä saatiin, kun diskonttoprosentti oli $6\frac{1}{2}$ %?

624. Maaliskuun 7 p:nä asetettu 60 000 mk:n suuruisen 3 kuukauden vekseli diskontattiin 6 %:n mukaan a) heti b) huhtikuun 11 p:nä. Paljonko sillä saatiin?

625. Helmikuun 14 p:nä diskontattiin vekseli, jonka nimellisarvo oli 16 000 mk ja lankeamispäivä toukokuun 2 p. Paljonko sillä saatiin, kun diskonttoprosentti oli 6 %?

626. Mille summalle on 4 kuukauden vekseli kirjoitettava, jotta sillä heti diskontattaessa saataisiin 1 000 mk, jos diskontto lasketaan 7 % mukaan?

627. Kesäkuun 27 p:nä diskontattiin 800 mk:n suuruisen vekseli 6 % mukaan ja saatiin 791 mk 33 p. Mikä oli lankeamispäivä?

628. Mikä oli diskonttoprosentti, kun 3 kuukauden vekselistä heti diskontattaessa saatiin 200 mk ja diskontto oli 3 kuukauden 30 p?

629. Kun pankki diskonttaa 6 kuukauden perästä lankeavan vekselin 8 % mukaan, niin montako % pankki todellisuudessa saa tällöin korkoa rahoilleen?

Arvopaperit (osakkeet ja obligaatiot)

630. Jos halutaan saada rahoille 5 %:n korko, niin mihin hintaan kannattaa ostaa osakkeita, joiden nimellisarvo on 100 mk, jos edellytetään, että vuotuinen osinko on jatkuvasti 8 %?

631. Henkilö oli ostanut osakkeita, joiden nimellisarvo oli 50 mk, ja maksanut niistä 90 mk 40 p kappaleelta. Minkä prosentin mukaan näin sijoitetut rahat tuottivat korkoa eräänä vuonna, jolloin osinko oli 12 %?

632. Henkilö osti jouluk. 1 p :nä osakkeita à 360 mk ja nostettuaan maalisk. 1 p :nä osinkoja 10 % mukaan myi heti osakkeensa à 350 mk. Minkä korkokannan mukaan hän on täten saanut rahoilleen korkoa, kun osakkeiden nimellisarvo oli 200 mk?

633. Paljonko kannattaa maksaa osakkeista, joiden nimellisarvo on 200 mk ja joiden edellytetään tuottavan osinkoa 14 %, jotta niihin sijoitetut rahat tuottaisivat yhtä monta % korkoa kuin 93 mk :n kurssin mukaan ostetut 50 mk :n nimellisarvoiset osakkeet, jotka tuottavat 12 % :n osingon?

634. Henkilö osti $5\frac{1}{2}$ % :n obligaatioita kurssin 97 (%) mukaan ja maksoi niistä 8 245 mk. Paljonko hän sai nostaa korkoa kerrallaan, kun korko maksettiin puolivuositain?

635. Minkä prosentin mukaan henkilö saa rahoilleen korkoa, jos hän ostaa 6 % :n obligaatioita kurssiin 102?

636. Mihin kurssiin kannattaa ostaa $4\frac{1}{2}$ % :n obligaatioita, jos halutaan saada rahoille 5 % :n korko?

637. Kummatko tuottavat korkeamman koron rahoille : kurssin 105 mukaan ostetut $5\frac{1}{2}$ % :n obligaatiot vai kurssin 87,50 mukaan ostetut $4\frac{1}{2}$ % :n obligaatiot?

III luku

Murtolausekkeet

POLYNOMIEN JAOLLISUUSOPPI

Polynomien jako alkutekijöihin

638. $3a - 3b$

639. $8ax + 12ay$

640. $x^6 + x^2$

641. $a^2b^2 + b^2c^2$
642. $ak + bk + ck$
643. $12x^2 - 18x + 30$
644. $9a^5x^2 - 6a^3x^3 + 15a^2x^5$
645. $3ab^3 - 8a^2b^2 - 6b^2c^2$
646. $(a + b)c + (a + b)d$
647. $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 1)$
648. $x^2 + 4xy + 4y^2$
649. $4a^2 - 12a + 9$
650. $a^2 + 9b^2 - 6ab$
651. $x^2 + 2x + 1$
652. $x^2 - 2x + 1$
653. $a^4 + b^4 + 2a^2b^2$
654. $4n^3 - 4n^2 + n$
655. $80a^3 - 16a^6 - 100$
656. $-r^4 - 2r^2 - 1$
657. $2x^2y^2 - 12xyz + 18z^2$
658. $x^6y^4 + 10x^3y^3 + 25y^2$
659. $(a + x)^2 + 2a(a + x) + a^2$
660. $(x^2 + 1)^2 - 4x(x^2 + 1) + 4x^2$
661. $x^2 - 1$
662. $4a^2 - 9x^2$
663. $m^2 - 4n^2$
664. $9 - a^2$
665. $a^2b^4 - b^2c^6$
666. $-x^2 + x^2y^2$
667. $4z^2 - 16z^4$
668. $a^3b - ab^3$

669. $x^4 - 1$
670. $a^8 - b^8$
671. $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$
672. $-x^5 + 8x^3 - 16x$
673. $(a + b)^2 - c^2$
674. $(2x - 1)^2 - (2y - 1)^2$
675. $1 - x^3$
676. $a^3 - 8b^3$
677. $x^3y + y^4$
678. $a^7 - b^7$
679. $a^7 + b^7$
680. $x^{10} - 1$
681. $x^{11} - 1$
682. $x^6 + 27a^3$
683. $64 - 2k^5$
684. $a^6 + 2a^3b^3 + b^6$
685. $-4x^6 + 8x^3 - 4$
686. $(a + 1)^3 + 1$
687. $ac + ad + bc + bd$
688. $ac - ad - bc + bd$
689. $ma - a + m - 1$
690. $a^3 - a^2 - a + 1$
691. $x^2 - y^2 + x + y$
692. $ax + by - bx - ay$
693. $x^2 - 4x + 4 - y^2$
694. $x^5 + 4x^2 - 2x^2 - x$
695. $x^3 + x^2 + 2xy + y^2 + y^3$
696. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

697. Näytettävä, että kokonaisluvun ja sen numeroiden summan erotus on aina jaollinen 9 :llä (siis myös 3 :lla), ja pääteltävä tästä, että jos numeroiden summa on jaollinen 9 :llä (3 :lla), niin lukukin on jaollinen 9 :llä (3 :lla), ja kääntäen. (Todistuksessa oletetaan, että luku on esim. nelinumeroinen ja a , b , c ja d sen peräkkäiset numerot (ks. 3 §)).

Pienin yhteinen jaettava

698. ab, ac

699. 18, 27, 45

700. $a - b, b - a$

701. $36a^4, 72a^2, -24a^3$

702. $6ab, 2bc, 3bd$

703. $12x^3yz, 8x^2y^3, 6x^2y^2z^2$

704. $m^3a^2, m^2a^2 - m^2b^2$

705. $a^2 - b^2, a^2 + 2ab + b^2$

706. $a^4 - a^3, a^4 - a^2$

707. $n^4 - n, n^3 - 2n^2 + n, n^4 + n^3 - 2n^2$

708. $a - x, a^2 - x^2, a^3 - x^3, a^4 - x^4$

709. a, b

710. 2, 3, 5

711. $x - 1, x + 1$

712. $a^2, b^2, -2ab$

713. $a, b, a + b$

714. $a^2 - ab, b^2 - ab$

715. $m - n, m + n, m^2 - n^2$

716. $x, x - x^2, x^2 - 1$

717. ab, bc, cd, da

718. 4, $2a, a^2 + a^3$

MURTOLAUSEKKEILLA LASKEMINEN

Supistaminen

719. $\frac{ab}{ac}$

720. $\frac{2a^2b}{6a^2b^2c}$

721. $\frac{x(x+y)^2}{x^2(x+y)}$

722. $\frac{(y-x)^2}{(x-y)^2}$

723. $\frac{n^2-4}{n^2-2n}$

724. $\frac{4a^2-4}{10}$

725. $\frac{1-x}{x^2-1}$

726. $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$

727. $\frac{18x^4y^3z^2}{-12x^2y^2z^3}$

728. $\frac{2k^2+kn}{2kn}$

729. $\frac{2a+2b}{2a+2c}$

730. $\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2}$

731. $\frac{(x-y)^3}{x^3-y^3}$

732. $\frac{m^4-m}{m^4-m^3}$

733. $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+4}$

734. Näytettävä, että murtolauseke $\frac{n^2-nx+n-x}{n^2-nx-n+x}$ saa saman arvon riippumatta siitä, mikä on x :n arvo.

735. Mikä on murtolausekkeen $\frac{1+x+x^2}{1-x^3}$ arvo, kun $x = -\frac{19}{24}$?

Yhteen- ja vähennyslasku

736. $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$

737. $\frac{1+a}{a} - \frac{1-a}{a}$

738. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$
739. $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$
740. $\frac{x}{3} - \frac{y}{-3}$
741. $x - \frac{x-y}{2}$
742. $\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}$
743. $\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a-x}$
744. $\frac{m^2}{m-n} + \frac{n^2}{n-m}$
745. $\frac{a-b}{ab} + \frac{c-a}{ac}$
746. $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$
747. $1 - \frac{2}{x+1}$
748. $\frac{a}{a-b} - \frac{2ab}{a^2-b^2}$
749. $a - b + \frac{2b^2}{a+b}$
750. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$
751. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
752. $\frac{2p+q}{2pq} - \frac{p+q}{q^2}$
753. $\frac{a}{5} + \frac{1-a}{6} + \frac{3a}{10}$
754. $\frac{n}{n-2} + \frac{n}{n+2} - 2$
755. $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}$
756. $\frac{1}{(1-a)(a-b)} + \frac{1}{(1-b)(b-a)}$
757. $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$
758. $\frac{a-x}{x} + \frac{2a}{a-x} - \frac{a^2}{ax-x^2}$
759. $\frac{1+x}{x^2-xy} - \frac{1-y}{y^2-xy} - \frac{4}{x^2-y^2}$
760. $\frac{x^2-2}{3} - \frac{2x^2-4x+1}{4} - x + \frac{1}{2}$
761. $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$
762. $1 - \left[\frac{a-1}{2a+2} + \left(\frac{1}{a-1} - \frac{a}{1+a} \right) \right] - \frac{1}{1-a}$

Kerto- ja jakolasku

$$763. m \cdot \frac{m^2}{n^2}$$

$$764. \frac{m^2}{n^2} : m$$

$$765. \frac{m}{n} : \frac{m^2}{n^2}$$

$$766. \frac{x^2}{12} : \frac{x^5}{18}$$

$$767. \frac{4x^3}{a} \cdot \frac{ax^2}{2b^2}$$

$$768. \frac{4x^3}{a} : \frac{ax^2}{2b^2}$$

$$769. 10a^2b \cdot \frac{x}{2ab}$$

$$770. \frac{9m^3n}{-p} : 6m^2p$$

$$771. \frac{a-b}{b-c} : (b-a)$$

$$772. \frac{2p}{p^2-1} \cdot \frac{(p-1)^2}{p^3}$$

$$773. \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y-x}{2}$$

$$774. \frac{a^2}{bc} \cdot \frac{b^2}{ca} \cdot \frac{c^2}{ab}$$

$$775. \frac{2+x}{n} : \frac{4-x^2}{n^2}$$

$$776. \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} : \frac{a-b}{c-d}$$

$$777. \frac{a^2-a}{b^2-b} : \frac{1-a}{1-b}$$

$$778. \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a^2b-b^3} \cdot (a^2b - a^3)$$

$$779. \frac{(x-1) \cdot \frac{x^2-1}{x}}{x+1}$$

Rationaalisten lausekkeiden sieventäminen

$$780. \frac{a + \frac{b^2}{a}}{b + \frac{a^2}{b}}$$

$$781. \frac{x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1}$$

$$782. \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

783. $\frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2}$
784. $\left(\frac{t^2 + a^2}{2t}\right)^2 - a^2$
785. $\frac{2 - \frac{1}{x}}{4x - \frac{1}{1-x}}$
786. $\frac{1}{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}} - 1$
787. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right)$
788. $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}}$
789. $1 - \frac{x-3}{x - \frac{x+3}{x-1}}$
790. $\left(\frac{x^2}{a-x} + \frac{a^2}{x-a}\right) : (a+x)$
791. $\left(a - b \cdot \frac{a-b}{a}\right) : \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right]$
792. $x - y \left(-2 \cdot \frac{x+y}{x-y} - 1\right)$
793. $\left(n - \frac{1}{2-n}\right) : (1-n)$
794. $(8p^2q^2 - 2r^4) : \left(\frac{2pq}{r} - r\right)$
795. $a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$
796. $x - \frac{1}{x} \left(\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{2x^2+1}{x+1} - 1\right)$
797. $1 + \left[1 - \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2\right] : \left[1 + \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2\right]$
798. $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{b}{a+b} - 1\right) \left(\frac{b}{a-b} + 1\right)\right]$
799. Näytettävä, että $x^2 + y^2 = 1$, jos $x = \frac{2t}{1+t^2}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
800. Näytettävä, että $x^2 - y^2 = 1$, jos $x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + t\right)$, $y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t\right)$

ENSIMMÄISEN ASTEEN YHTÄLÖT (jatkoa)¹

Yksi tuntematon

$$801. \frac{a}{b} = \frac{x}{d}$$

$$802. \frac{2}{x-2} = \frac{3}{5}$$

$$803. \frac{x}{a} = x + k$$

$$804. \frac{x-m}{n} = \frac{x-n}{m}$$

$$805. (x - k)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2}\right)$$

$$806. \frac{x-a}{a-b} = \frac{x-b}{a+b}$$

$$807. \frac{ax+c}{b} = \frac{bx+c}{a}$$

$$808. \frac{a}{b} + \frac{x}{a} = \frac{b}{a} - \frac{x}{b}$$

$$809. 1 - \frac{x-1}{n-1} = \frac{x}{n+1}$$

$$810. \frac{cx+1}{2c-1} - \frac{x+1}{c} = 0$$

$$811. \frac{x-2}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$812. \frac{3x-2}{2x-1} = \frac{2}{3}$$

$$813. \frac{a-x}{x-b} - \frac{a}{b} = 0$$

$$814. \frac{1}{x+p} + \frac{1}{x+q} = \frac{2}{x}$$

$$815. \frac{x+1}{m^2} - \frac{x-1}{4} + \frac{1}{m} = 0$$

$$816. \frac{a^2(x-1)}{a+1} = 1 + \frac{x}{a^2+a}$$

$$817. \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{2}{x^2-4}$$

$$818. \frac{x+1}{3-x} + \frac{2x-5}{x-3} = 4$$

$$819. \frac{11+x}{6+x} = \frac{8+x}{4+x}$$

$$820. \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2 = \frac{x-2}{x}$$

$$821. \frac{0,3x-1,8}{1,6x+2,7} = 0,6$$

$$822. \frac{3}{4} - \frac{x-0,2}{x+0,2} + \frac{0,25(x-1)}{x+1} = 0$$

¹Ks. alimuist. 2 s. 27.

$$823. \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$$

$$824. \frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{2x-x^2} = 1$$

$$825. \frac{2x-3}{x-\frac{1}{2}} - \frac{x-\frac{1}{2}}{2x-1} = 2$$

$$826. \frac{x}{x-\frac{1}{3}} - \frac{2}{x+\frac{1}{2}} = 1$$

$$827. \frac{4x+19}{3-3x^2} - \frac{7}{3-3x} = \frac{x}{1-2x+x^2}$$

$$828. \frac{14}{35-10x} - \frac{3+x}{7x-2x^2} - \frac{3}{4x} = 0$$

$$829. \frac{\frac{x}{x+2}+1}{\frac{x+2}{x+2}-1} = 2$$

$$830. \frac{1-\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x-1}} = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+\frac{1-x}{x}}{1-\frac{1+x}{x}}$$

$$831. x + 1 - \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$832. \frac{1-\frac{x-n}{x+n}}{1+\frac{x-n}{x+n}} = \frac{1+\frac{2n}{x-n}}{1+\frac{2n}{x-n}}$$

$$833. \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{1}{2x^2+2x} = 0$$

$$834. \frac{1}{x+1} = \frac{1-h}{1-x}$$

Mikä on juuren arvo, kun $h = 1\frac{2}{3}$? Millä h :n arvolla yhtälöllä ei ole juurta?

$$835. \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} - \frac{k}{x-x^2}$$

Millä k :n arvolla a) yhtälön juuri = $2\frac{1}{2}$ b) yhtälöllä ei ole juurta?

$$836. \left| \frac{1}{12} - \frac{x+3}{4} \right| = \left| \frac{x+1}{3} - \frac{2x+5}{6} - \frac{x}{4} \right|$$

$$837. \left| \frac{2(x+1)}{x^2-x} - \frac{2x+1}{x^2-1} \right| = \left| \frac{3}{x} - \frac{3x-1}{x^2+x} \right|$$

Kaksi tuntematonta – Yhtälöparit

$$838. \begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$839. \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$840. \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

$$841. \begin{cases} 7x - 2y = 25 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$842. \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 6x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$843. \begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$844. \begin{cases} 8x + 10y = 2 \\ 13x + 15y = 3 \end{cases}$$

$$845. \begin{cases} 2x = 5y - 2 \\ 5x = 8y + 1 \end{cases}$$

$$846. \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$847. \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

$$848. \begin{cases} x + y = 10 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$849. \begin{cases} x = 2 - 3y \\ y = 4 + x \end{cases}$$

$$850. \begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ x = 3y - 5 \end{cases}$$

$$851. \begin{cases} 2,4x + 0,6y - 2,0 = 0 \\ 0,4x + 0,5y - 0,3 = 0 \end{cases}$$

$$852. \begin{cases} 4(x - 1) = 3(y + 2) \\ 5y = 2(3x - 1) - 8 \end{cases}$$

$$853. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 0 \\ x(3 - y) = (1 - x)(1 + y) \end{cases}$$

$$854. \begin{cases} x - \frac{y}{3} - \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$855. \begin{cases} \frac{2(x+y)}{5} + \frac{y-3}{2} + x = 0 \\ \frac{5x}{4} - \frac{2x-3y}{6} = 1 \end{cases}$$

$$856. \begin{cases} \frac{3x}{5} - (1 - 4y) = 0 \\ x - 10(4y - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$857. \begin{cases} \frac{2x+y}{0,5} - \frac{3x-y}{0,8} = 3,75 \\ \frac{x+2y}{0,4} + \frac{3y-x}{0,9} = \frac{100}{9} \end{cases}$$

$$858. \begin{cases} \frac{x+0,5y-3}{x-5} + 7 = 0 \\ \frac{3y-10(x-1)}{6} + \frac{x-y}{4} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$859. \begin{cases} \frac{x+4y}{x-1} = 3 \\ \frac{2x-9}{5x-3y} = -2 \end{cases}$$

$$860. \begin{cases} \frac{3}{x-2} = \frac{1}{x+y} \\ \frac{x}{3(x+y)} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$861. \begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{1}{y+1} = 1 \\ \frac{x-1}{x-y} - \frac{x+1}{x+y} = \frac{2y(x-2)}{x^2-y^2} \end{cases}$$

$$862. \begin{cases} ax + by = 2c \\ ax - by = 2d \end{cases}$$

$$863. \begin{cases} ax - by = c \\ bx - ay = c \end{cases}$$

$$864. \begin{cases} y = mx + a \\ y = nx + b \end{cases}$$

$$865. \begin{cases} x + y = k \\ x : y = m : n \end{cases}$$

$$866. \begin{cases} \frac{x+a}{y} = b \\ \frac{y}{x+b} = a \end{cases}$$

$$867. \begin{cases} 2(x-1) + \frac{y}{k} = 0 \\ \frac{1}{2x+y} - \frac{k}{2} = 0 \end{cases}$$

$$868. \begin{cases} \frac{x}{a+b} = \frac{y}{a-b} \\ \frac{x}{b} = \frac{y}{a} + \frac{1}{ab} \end{cases}$$

$$869. \begin{cases} \frac{x-1}{a} + \frac{y-1}{b} = 0 \\ (a+b)(x+y) = \frac{a^2+b^2}{a-b}(x-y) \end{cases}$$

Yhtälöparien avulla ratkaistavia probleemoja¹

870. Kahta tuntematonta käyttäen on ratkaistava probleemat 552 ja 553.

871. Millä murtoluvulla on sellainen ominaisuus, että kun osoittajaa ja nimittäjää suurennetaan 1 :llä, niin murtoluvun arvoksi tulee $\frac{3}{4}$, ja kun osoittajaa ja nimittäjää pienennetään 1 :llä, niin arvoksi tulee $\frac{2}{3}$?

872. Määrättävä kaksi lukua, joiden summa ja suhde = 3.

873. Mitkä ovat ne kaksi lukua, joiden summa = a ja erotus = b ?

874. A sanoi B :lle : »kolme vuotta sitten olin vielä neljä kertaa niin vanha kuin sinä, mutta kolmen vuoden perästä olen enää kolme kertaa niin vanha kuin sinä. » Kuinka vanhoja olivat A ja B ?

875. Henkilö osti 5 kg omenia ja 2 kg appelsiineja ja maksoi niistä yhteensä 9 mk 60 p. Toisella kerralla hän osti 8 kg omenia ja 5 kg appelsiineja ja maksoi yhteensä 18 mk 60 p. Mikä oli omenien ja appelsiinien hinta kilolta, kun hinta oli välillä pysynyt muuttumattomana?

876. Kauppias sekoitti kahta kahvilaatua, joista toisen hinta oli 10 mk/kg ja toisen 16 mk/kg. Paljonko hänen oli sekoitukseen pantava näitä kahvilaatuja, kun hän halusi saada 30 kg kahvia, jonka kilohinta olisi 12 mk 50 p?

877. Kun eräs kaksinumeroinen luku jaetaan numeroiden summalla, saadaan osamääräksi 1 ja jakojäännökseksi 9. Jos vaihdetaan luvun numeroiden paikat ja suoritetaan sama laskutoimitus, saadaan osamääräksi 9 ja jakojäännökseksi 1. Mikä luku on?

¹Ks. alimuist. s. 30.

878. Kahden kolminumeroisen luvun summa on 999. Toinen niistä kahdesta kuusinumeroisesta luvusta, jotka saadaan, kun luvut kirjoitetaan peräkkäin, on kuusi kertaa niin suuri kuin toinen. Mitkä kysymyksessä olevat kolminumeroiset luvut ovat?

879. Laiva kulkee 56 km pituisen matkan jokea pitkin myötävirtaan 3 t 30 min :ssa ja takaisin vastavirtaan 4 t :ssa. Mikä on laivan nopeus virratto-massa vedessä ja mikä on virran nopeus?

880. Paikasta A ammutaan 500 m etäisyydellä paikassa B olevaan maaliin. A :han kuuluu luodin napsahdus taulua vastaan 2,5 s laukaisun jälkeen. B :hen taas kuuluu pamahdus 0,5 s sen jälkeen, kun luoti on napsahtanut taulua vastaan. Laskettava luodin ja äänen nopeudet.

881. Kaksi pistettä liikkuu tasaisella nopeudella umpinaista rataa, jonka pituus on s metriä, ja kohtaa toisensa aina a sekunnin kuluttua liikkueensa vastakkaisiin suuntiin ja b sekunnin kuluttua liikkueensa samaan suuntaan. Mitkä ovat pisteiden nopeudet? Sovellutus : $s = 1000$ m, $a = 50$ s, $b = 300$ s.

882. Henkilöllä on kaksi 6 000 markan suuruista lainaa, joista hän maksaa korkoa eri prosenttien mukaan. Erään vuoden lopussa hän maksoi korkoa yhteensä 630 mk ja samalla lyhensi toista lainaa puoleen entisestään. Tämän johdosta joutui hän seuraavan vuoden lopussa maksamaan korkoa yhteensä vain 465 mk. Mitkä olivat korkoprosentit?

883. Henkilö osti yhteensä 80 750 mk :lla 4 % :n ja $4\frac{1}{2}$ % :n obligaatioita, joiden nimellisarvo oli 1 000 mk. Alempikorkoiset obligatiot hän osti kurssin 101,25 mukaan ja ylempikorkoiset kurssin 100,75 mukaan. Montako obligatiota hän osti, kun vielä tiedetään, että hän vuosittain nostaa niistä korkoa yhteensä 3 450 mk?

884. Mitkä arvot on annettava luvuille k ja b , jotta binomi $kx + b$ saisi arvon -1 , kun $x = 2\frac{1}{4}$, ja arvon $2\frac{1}{2}$, kun $x = -3$?

885. Määrättävä a ja b niin, että polynomi $x^3 + (a - b)x^2 + bx + c$ tulee jaolliseksi trinomilla $x^2 + x - 1$.

886. Määrättävä m ja n niin, että yhtälöiden
$$\begin{cases} (m + n)x - my = 2 \\ mx - (n + 1)y = 0 \end{cases} \quad \text{juu-}$$
 ripari on $x = 3$, $y = -1$.

887. Yhtälön $x^2 + px + q = 0$ juuret ovat α ja β . On laskettava p ja q .

888. Määrättävä a :n ja b :n arvot niin, että yhtälö

$$(b + 1)(x + a) - (a - 1)(x + b) = 1$$

on identtinen.

889. Määrättävä A :n ja B :n arvot niin, että yhtälö

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

on identtisesti voimassa.

890. Määrättävä A ja B niin, että yhtälö

$$\frac{x + c}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \quad (a \neq b)$$

on voimassa, olkoon x :llä mikä a :sta ja b :stä eriävä arvo tahansa.

IV luku

Neliöjuuret

Juurikäsite ja irrationaaliset luvut

891. a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{1000000}$

892. a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ b) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ c) $\sqrt{\frac{25}{49}}$ d) $\sqrt{\frac{121}{144}}$

893. a) $\sqrt{0,01}$ b) $\sqrt{0,09}$ c) $\sqrt{0,0025}$ d) $\sqrt{0,000001}$

894. a) $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{1000}$ d) $\sqrt[3]{1000000}$

895. a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ b) $\sqrt{\frac{64}{125}}$ c) $\sqrt[3]{0,001}$ d) $\sqrt[3]{-0,000008}$

896. a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[5]{-32}$ c) $\sqrt[6]{1000000}$ d) $\sqrt[4]{0,0001}$

897. a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt[3]{-1}$ c) $\sqrt[n]{1}$ d) $\sqrt[n]{a}$

898. a) $\sqrt{7^2}$ b) $\sqrt{a^2}$ c) $\sqrt{a^6}$ d) $\sqrt{a^{2n}}$

899. a) $\sqrt[3]{2^3}$ b) $\sqrt[3]{a^3}$ c) $\sqrt[n]{a^n}$

900. a) $\sqrt{a^2b^2}$ b) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$ c) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$

901. Kuinka suuri on sen neliön sivu, jonka ala on a) 25 cm^2 b) $a \text{ cm}^2$?

902. Kuinka suuri on sen kuution särmä, jonka tilavuus on a) 125 cm^3 b) $a \text{ cm}^3$?

903. Näytettävä, että $\sqrt{a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1} = a^2 - a + 1$.

904. Onko $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$?

905. Näytettävä, että $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Ratkaistava yhtälöt :

906. $x^2 = 81$

907. $20x^2 = 45$

908. $6(1 - x) - (1 - 3x)^2 = 1$

909. Näytettävä, että $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

910. Haettava a) $\sqrt{5}$:n b) $\sqrt{311}$:n yksidesimaalinen ala- ja ylälikiarvo.

911. Haettava a) $\sqrt{0,9}$:n b) $\sqrt{1,78}$:n kaksidesimaalinen ala- ja ylälikiarvo.

Neliöjuurien sieventäminen

912. $\sqrt{27}$

913. $\sqrt{1000}$

914. $\sqrt{a^3}$

915. $\sqrt{2(x-2)^2}$

916. $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 4x}$

917. $\sqrt{(a-b)(a^2-b^2)}$

918. $3\sqrt{\frac{1}{3}}$

919. $5\sqrt{0,4}$

920. $21\sqrt{\frac{8}{7}}$

921. $ab\sqrt{\frac{1}{b}}$

922. $\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x}}$

923. $(a - b) \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

924. Näytettävä, että kun tasasivuisen kolmion sivu = s , niin sen korkeus

$$h = \frac{s\sqrt{3}}{2}$$

Sovellutus : $s = 6$ cm ($\sqrt{2} = 1,73$).

925. Näytettävä, että kun tasasivuisen kolmion korkeus = h , niin sen sivu

$$s = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$$

Sovellutus : $h = 6$ cm.

Neliöjuuren arvon laskeminen¹

926. $\sqrt{4225}$

927. $\sqrt{61009}$

928. $\sqrt{25,6036}$

929. $\sqrt{2}$ (4 des.)

930. $\sqrt{3}$ (4 des.)

931. $\sqrt{5}$ (4 des.)

932. $\sqrt{65}$ (3 des.)

933. $\sqrt{728}$ (2 des.)

934. $\sqrt{2819}$ (3 des.)

935. $\sqrt{72,35}$ (3 des.)

936. $\sqrt{44003,7}$ (2 des.)

937. $\sqrt{1,21409}$ (5 des.)

938. $\sqrt{0,4}$ (3 des.)

¹Neliöjuuren määritelmään nojautuen on tarkistettava, onko saatu neliöjuuren arvo oikea. Tällöin on huomattava, että jos neliöjuuri on irrationaalinen, niin saadun likiarvon neliö ei ole tietenkään aivan tarkkaan sama kuin juurettava.

939. $\sqrt{0,0005427}$ (5 des.)

940. $\sqrt{0,001}$ (5 des.)

941. $(\sqrt{10})^5$ (2 des.)

942. $\frac{11}{\sqrt{11}}$ (3 des.)

943. $\frac{1}{\sqrt{11}}$ (3 des.)

944. Laskettava $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (3 des.) a) muuttamalla ensin $\frac{2}{3}$ desimaaliluvuksi b) kirjoittamalla ensin neliöjuuri muotoon $\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

945. Mikä on pienin kuusinumeroinen kokonaisluku, jonka neliöjuuri on kokonaisluku?

946. Neliön ala on 350 cm^2 . Laskettava sen sivu mm :n tarkkuudella.

947. Ympyrän ala on 2 m^2 . Laskettava sen säde cm :n tarkkuudella.

Ratkaistava yhtälöt :

948. $7x^2 = 3$

949. $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 = (2x - 1)(2x + 1)$

V luku

Funktiot ja niiden kuvaajat

Funktiokäsite ja koordinaatisto

950. Kuution tilavuus on lausuttava särmän funktiona.

951. Tavarankilohinta olkoon k mk (vakio). Tavarankilohinta on lausuttava kilometrin funktiona.

952. Laskettava seuraavien funktioiden arvot, kun argumentille x annetaan arvot $-3, 0, \frac{1}{2}, -0,6, 2, 4$:

$$\text{a) } y = x^2 - 3x \quad \text{b) } y = \frac{x}{1-x} \quad \text{c) } y = 0$$

953. Mitä nimityksiä voidaan käyttää seuraavista funktioista :

a) $x + \frac{1}{x}$ b) πx^2 c) $\sqrt{x+1}$ d) $x\sqrt{2}$
e) $\frac{ax+b}{cx+d}$ f) $ax^2 + bx + c$ (a, b, c ja d vakioita)

954. Kasvanut pääoma K on lausuttava alkuperäisen pääoman k , prosenttiluvun p ja ajan t (vuosissa) funktiona.

955. Merkittävät koordinaatistoon pisteet : $(1, 2)$, $(-3, 4)$, $(-2, 5)$, $(2, -1, 5)$, $(-3, 2, 0)$, $(0, 4, 6)$, $(0, 0)$.

956. Missä neljänneksissä ovat pisteen molemmat koordinaatit a) samanmerkkiset b) erimerkkiset ?

957. Mitkä ovat sen pisteen koordinaatit, joka on symmetrisessä asemassa pisteen (a, b) kanssa a) x -aks. b) y -aks. c) origon suhteen ?

958. Piirrettävä niiden pisteiden ura, joiden a) ordinaatta = 0 b) abskissa = 0 c) ordinaatta = 2 d) abskissa = -3 e) abskissa = ordinaatta f) abskissa ja ordinaatta ovat toistensa vastalukuja.

959. Pisteiden $(0, 0)$ ja $(3, 4)$ kautta on piirrettävä suora ja samoin pisteiden $(-3, 0)$ ja $(0, -5)$ kautta sekä määrättävä kuviosta 0,1 :n tarkkuudella näiden suorien leikkauspisteen koordinaatit (kuvio piirrettävä millimetripaperille).

960. Tasasivuisen kolmion kaksi kärkeä on pisteissä $(1, -1)$ ja $(-2, 3)$. Mitkä ovat kolmannen kärkipisteen koordinaatit ? Tehtävä ratkaistava piirtämällä, harppia käyttäen.

Ensimmäisen asteen funktiot

961. Esitettävä taulukossa muuttujan x arvot $-4, 0, -3, 5, -1, 8, -0, 6, 0, 0, 8, 2, 0, 3, 7$ ja vastaavat funktion $y = \frac{1}{2}x$ arvot sekä merkittävät koordinaatistoon näin saatavat pisteet (x, y) ja todettava, että ne ovat samalla suoralla viivalla, joka siis näyttää olevan funktion $y = \frac{1}{2}x$ kuvaaja. Mitä voidaan tämän perusteella päätellä funktion $y = -\frac{1}{2}x$ kuvaajasta ?

962. Piirrettävä funktion a) $y = x$ b) $y = -x$ kuvaaja (vrt. teht. 958 e) ja f)).

963. Piirrettävä samaan koordinaatistoon funktion $y = kx$ kuvaajat tapauksissa $k = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -4$.

964. Kuinka suuret kulmat muodostavat edellisessä tehtävässä mainitut suorat x -akselin kanssa?¹

965. Piirrettävä funktion $y = 0,7x$ kuvaaja. Tämän avulla on sitten määrättävä $0,1$:n tarkkuudella argumentin arvoja $-4,5$, $-0,8$ ja $2,6$ vastaavat funktion arvot sekä ne argumentin arvot, joita vastaavat funktion arvot ovat $2,6$, $0,9$ ja $-3,2$. Tulokset on lopuksi tarkistettava laskemalla.

966. Minkä funktion kuvaaja on se suora, joka kulkee origon ja pisteen a) $(1, 3)$ b) $(3, 2)$ kautta? Mikä on suoran kulmakerroin?

967. Piirrettävä origon kautta suora, a) jonka kulmakerroin $= \frac{1}{4}$ b) jonka pisteiden ordinaattojen ja abskissojen suhde $= 2 : 3$. Minkä funktioiden kuvaajia nämä suorat ovat?

968. Minkä funktion kuvaaja on origon kautta kulkeva laskeva suora, jonka kaltevuuskulma x -akselin suhteen on a) 60° b) $34,7^\circ$?

969. Määrättävä kymmenen funktion $y = -0,8x - 1,7$ kuvaajan pistettä antamalla x :lle kymmenen eri arvoa (annettava positiivisia ja negatiivisia arvoja sekä arvo 0 ; myös sellaisia arvoja on annettava, jotka eivät ole kokonaislukuja). Ovatko saadut pisteet todellakin samalla suoralla, kuten pitäisi?

Piirrettävä seuraavien funktioiden kuvaajat (saman tehtävän suorat samaan koordinaatistoon) :

970. a) $y = 3x$ b) $y = 3x + 2$ c) $y = 3x - 2$

971. a) $y = 0$ b) $y = 3$ c) $y = -3$

972. a) $y = x + 1$ b) $y = x - 1$ c) $y = -x + 1$ d) $y = -x - 1$

973. a) $y = 5x - 1\frac{1}{2}$ b) $y = -5x - 1\frac{1}{2}$ c) $y = -1\frac{1}{2}$

Piirrettävä suorat (eri koordinaatistoihin) :

974. $y = 2x - 3$

975. $y = -8x + 4$

976. $y = -\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$

977. $y = -1,6x + 0,6$

978. $y = 0,2x + 3,7$

979. $y = 2,3$

¹Katsotaan geometrian liitteenä olevan trigonometrinen funktioiden taulukosta.

980. Suoraa a) $y = 0,9x - 2,1$ b) $y = -6x + 5$ piirtämättä päätettävä, nouseeko vai laskeeko se (oikealle siirryttäessä), ja missä pisteessä se leikkaa y -akselin. Mikä on edelleen suoran kulmakerroin?

981. Kuinka suuri on suoran $y = -1,28x + 2,57$ kaltevuuskulma x -akselin suhteen?

982. Piirrettävä funktion $y = -0,7x + 1,1$ kuvaaja ja sen avulla määrättävä $0,1$:n tarkkuudella funktion arvo, kun argumentin arvo on a) -4 b) $-1,4$ c) $3,6$ sekä millä argumentin arvolla funktio saa arvon a) 1 b) 0 c) $-1,6$?

983. Piirrettävä samaan koordinaatistoon funktioiden $y = \frac{1}{4}x - 1$ ja $y = -2x - 3$ kuvaajat ja katsottava kuviosta, millä muuttujan arvolla funktiot saavat saman arvon. Tulos on sitten tarkistettava ratkaisemalla tehtävä algebrallisesti.

Piirrettävä seuraavien funktioiden kuvaajat :

984. $y = |x|$

985. $y = |1 - x|$

986. $y = |x| + x$ (vrt. teht. 334)

987. $y = |1 - x| + |x|$ (vrt. teht. 336)

988. $y = |x - 1| + |x| + |x + 1|$ (vrt. teht. 337)

989. $y = |2x| + |2 + x|$. Millä x :n arvoilla $y = 3$?

990. $y = ||x - 1| - 1|$. Millä x :n arvoilla $y = \frac{1}{2}$?

Toisen ja korkeamman asteen funktiot

991. Piirrettävä funktion $y = x^2$ kuvaaja ja määrättävä sen avulla

1) neliön ala, kun sen sivu on a) $0,8$ cm b) $1,3$ cm c) $2,2$ m

2) neliön sivu, kun sen ala on a) 2 cm² b) $0,8$ cm² c) $3,6$ m²

992. Piirrettävä samaan koordinaatistoon parabelit :

a) $y = 3x^2$ b) $y = -3x^2$

993. Piirrettävä samaan koordinaatistoon parabelit :

a) $y = \frac{1}{10}x^2$ b) $y = -\frac{1}{10}x^2$

994. Piirrettävä samaan koordinaatistoon funktioiden $y = x^2$, $y = x^2 - 2$, $y = x^2 + 1$ kuvaajat. Ne ovat yhtenevät. Miksi?

Piirrettävä seuraavien funktioiden kuvaajat ja katsottava kuviosta, minkälaisilla argumentin arvoilla kukin funktio on a) = 0 b) positiivinen c) negatiivinen :

995. $y = 2x^2$

996. $y = 2x^2 - 4x$

997. $y = 2x^2 + 2x + 1$

998. $y = -x^2$

999. $y = -x^2 - 4x - 3$

1000. $y = -x^2 + 3x - 1$

Piirrettävä seuraavien funktioiden kuvaajat (pituusyksiköksi valitaan 2 cm) :

1001. $y = x^3$. Annetaan x :lle arvot 0, $\pm 0,2$, $\pm 0,4$, $\pm 0,7$, ± 1 , $\pm 1,5$.

1002. $y = x^4$. » » » 0, $\pm 0,5$, $\pm 0,8$, ± 1 , $\pm 1,5$.

1003. $y = x^3 - 3x$. » » » 0, $\pm 0,2$, $\pm 0,8$, ± 1 , $\pm 1,5$, ± 2 .

1004. $y = x^2 - x^4$. » » » 0, $\pm 0,3$, $\pm 0,5$, $\pm 0,7$, $\pm 0,9$, ± 1 , $\pm 1,5$.

1005. Piirrettävä samaan koordinaatistoon käyrät :

$$y = x, \quad y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = x^4, \quad y = x^5$$

Yksiköksi valitaan 10 cm ja käyristä piirretään vain ne osat, jotka vastaavat 0 :n ja 1 :n välillä olevia x :n arvoja (sijoitetaan x :lle esim. arvot 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 0,9, 1). Mitä viivaa lähenee käyrä $y = x^n$ ko. välillä, kun n :lle otetaan yhä suurempia ja suurempia arvoja?

Irrationaaliset ja murtofunktiot

1006. Kuviosta 12 on katsottava, paljonko on a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{0,8}$ c) $\sqrt{3,6}$.

1007. Esitettävä graafisesti funktiot : a) $y = 2\sqrt{x}$ b) $y = x\sqrt{x}$.

1008. Piirrettävä funktion $y = \sqrt{25 - x^2}$ kuvaaja (sijoitetaan esim. arvot $x = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$; huomattava funktion kaksikäsitteisyys). Miltä tultua käyrältä kuvaaja näyttää?

1009. Esitettävä graafisesti funktio $y = \sqrt[3]{x}$ (vert. teht. 1001).

1010. Kuvion 13 avulla on määrättävä lukujen 1,3, 2,8, -0,6, -2,1 käänteisarvot.

1011. Piirrettävä samaan koordinaatistoon hyperbelit :

$$\text{a) } y = \frac{1}{x} \quad \text{b) } y = \frac{4}{x} \quad \text{c) } y = \frac{0,25}{x}$$

Empiiriset funktiot

1012. Suomen koululaisten pituusmittauksissa on saatu seuraavia keskiarvoja :

ikä	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
pojat	127,1	132,3	137,3	142,1	147,6	154,2	162,2	168,3	171,9	173,6	173,8
tytöt	126,2	131,5	136,6	143,0	149,6	155,8	159,3	160,6	161,3	161,5	161,5

Piirrettävä samaan koordinaatistoon poikien ja tyttöjen pituuksia esittävät käyrät. Jotta käyrät mahtuisivat paperille pannaan ordinaatta 0 vastaamaan 130 cm pituutta ja käytetään 5 mm ordinaatta-akselilla yksikkönä. Abskissa 0 pannaan vastaamaan 9 vuoden ikää ja käytetään 1 cm abskissa-akselilla yksikkönä.

1013. Suomen asukasluvun vaihtelut vuosina 1800–1960 näkyvät seuraavasta taulukosta :

vuosi	asukasl.	vuosi	asukasl.	vuosi	asukasl.
1800	0,83 milj.	1860	1,75 milj.	1920	3,15 milj.
10	0,46 »	70	1,77 »	30	3,46 »
20	1,17 »	80	2,06 »	40	3,70 »
30	1,37 »	90	2,38 »	50	4,03 »
40	1,45 »	1900	2,66 »	60	4,47 »
50	1,64 »	10	2,94 »		

Piirrettävä asukaslukua esittävä käyrä (abskissa 1 cm = 10 v, origossa v. 1800, ordinaatta 1 cm = 0,2 milj. asukasta).

1014. Alla olevassa taulukossa on esitettyä erään potilaan aamuisin ja iltaisin mitattu »kuume » :

päivämäärä	9	10	11	12	13	14	15	16	17
aamukuume	38,8	38,9	39,5	39,3	37,8	38,3	39,1	37,2	36,6
iltakuume	39,5	39,0	39,1	40,0	38,7	38,1	38,8	37,8	36,8

Piirrettävä »kuumekäyrä» (ord. 1 cm = 1°, ord. 0 = 37°; pisteet yhdistetään janoilla).

1015. Helsingissä mitatut kuukauden keskilämpötilat vuosina 1901–1930 ja v. 1941 olivat :

kuu	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1901–30	−5,5	−5,8	−2,7	2,2	8,2	13,0	16,8	15,0	10,6	5,3	0,5	−3,4
1941	−12,7	−8,3	−4,0	0,5	7,5	13,3	20,5	16,3	9,9	2,4	−2,1	−9,8

Piirrettävä samaan koordinaatistoon molempia keskilämpötiloja esittävät käyrät (ord. 1 cm = 2°).

1016. Ilmapallon mukana lähetetty »radioluotain» sähkötti eri korkeuksista (k km) seuraavat lämpötilat (t °) :

k	t	k	t	k	t	k	t	k	t
0,0	+12,2	2,8	+1,6	8,9	−42,9	15,0	−47,8	20,4	−48,0
0,6	+6,5	3,8	−3,8	10,0	−51,4	16,0	−49,8	22,0	−47,0
1,0	+3,0	5,0	−11,1	10,9	−49,2	16,9	−50,3	24,0	−45,1
1,6	+6,2	6,2	−20,3	12,0	−46,9	17,8	−49,5	26,3	−44,0
2,0	+4,7	7,5	−30,6	13,3	−47,5	19,2	−49,2	27,4	−42,0

Esitettävä graafisesti lämpötilan muuttuminen korkeuden mukana (absk. 1 cm = 2 km, ord. 1 cm = 5°).

Yhtälöparin graafinen ratkaiseminen

1017. Mikä on suoran $4x + 6y = 3$ kulmakerroin?

Piirrettävä suorat :

1018. $x - 2y = 3$

1019. $2x = 5$

1020. $3y + 2 = 0$

1021. $3x + 4y = 0$

$$1022. 5x - 9y + 20 = 0$$

$$1023. 7x + 6y - 1 = 0$$

1024. Piirrettävä samaan koordinaatistoon suorat $8x + 5y + 20 = 0$ ja $5x - 8y + 1 = 0$ sekä määrättävä kuviosta niiden leikkauspisteen koordinaatit.

1025. Määrättävä graafisesti (piirtäen) suorien $x + y = 0$, $3x - 8 = 0$ ja $2x - y = 4$ rajoittaman kolmion kärkipisteiden koordinaatit.

$$1026. \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$1027. \begin{cases} 6x + 4y = 3 \\ 5x - 3y = -7 \end{cases}$$

$$1028. \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$1029. \begin{cases} 2y + 3 = 0 \\ 3x + 5y + 14 = 0 \end{cases}$$

$$1030. \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$1031. \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$1032. \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ 6x - 5y = 2 \end{cases}$$

$$1033. \begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 3 \\ y = -\frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$$

1034. Ratkaisematta seuraavia yhtälöpareja on tutkittava, montako ratkaisua niillä on :

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 10y = 6 \\ -6x + 15y = -9 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -6x + 9y = 3 \\ 8x - 12y = 4 \end{cases}$$

1035. Millä p :n arvolla yhtälöparilla

$$\begin{cases} (1 + p)x + py = 1 \\ px + (2 + p)y = p \end{cases}$$

ei ole ratkaisua?

1036. Määrättävä a ja b niin, että yhtälöparilla

$$\text{a) } \begin{cases} (a+b)x - (a-2)y = b+1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (a+b)x + y = a-2b \\ ax - 2y = 2a+5 \end{cases}$$

on äärettömän monta ratkaisua?

1037. On näytettävä, että jos x :lle annetaan mikä arvo tahansa, niin y :lle voidaan määrätä sellainen arvo, että molemmat yhtälöt

$$\frac{3y+5}{3x-2} = 2 \quad \frac{y+15}{5x-2y} = 2$$

toteutuvat. Mikä on y :n arvo, kun a) $x = 2$ b) $x = 0$?