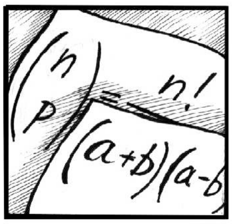


Kuusi vaikeaa tehtävää – matematiikkaolympialaiset Hanoissa

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

48. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Hanoissa Vietnamissa 23.–31. heinäkuuta 2007. Ennätykselliset 520 kilpailijaa 93 maasta ratkoi tavan mukaan kahtena päivänä yhteensä yhdeksän tunnin ajan kuutta vaikeaa tehtävää. Kukaan ei saanut kaikkia tehtäviä virheettömästi ratkaistuksi, mutta jokaiselle tehtävälle löytyi ratkaisija. Olympiatehtävien arvosteluasteikko on nollasta seitsemään. Kilpailun tulokset löytyvät sivuilta `http://www.imo2007.edu.vn`.

Esittelen tässä olympialaisten kuusi tehtävää ja niiden ratkaisut.

Tehtävä 1

Kilpailun tehtävistä ensimmäisen tuomaristo valitsi kategoriasta algebra. Tehtävä oli seuraava:

On annettu reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Jokaiselle i, $1 \le i \le n$, määritellään

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \le j \le i\} - \min\{a_j \mid i \le j \le n\}.$$

Olkoon

$$d = \max\{d_i \mid 1 \le i \le n\}.$$

(a) Osoita, että mielivaltaisille reaaliluvuille $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ pätee

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Osoita, että on olemassa reaaliluvut $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, joille epäyhtälössä $(*)$ vallitsee yhtäsuuruus.

Ensimmäinen tehtävä on tavan mukaan helpohko. Niin tämäkin, vaikka se ensilukemalta näyttää aika mutkikkaalta ja yllättävältäkin: siinähän esiintyy kaksi eri lukujonoa tai oikeastaan n:n luvun järjestettyä joukkoa, joilla ei sinänsä ole mitään tekemistä keskenään. Ensimmäisen jonon perusteella muodostetaan lisäksi kolmas, d_i, jonka jäsenet ovat indeksiin i asti suurimman ja samasta indeksistä i loppuun asti laskettuna pienimmän a-luvun erotuksia. Koska a_i on mukana molemmissa joukoissa, kaikki d_i:t ovat ei-negatiivisia. Luvuista d_i suurin on d. Silloin on jokin indeksi k, ei välttämättä yksikäsitteinen, jolle $d_k = d$. Edelleen, kun kerran äärellisistä joukoista on kyse, löytyvät indeksit p ja q, joille $d = d_k = a_p - a_q$. Tässä on tietysti $p < q$. p ja q eivät nekään ole yksikäsitteisiä, mutta riittää, että ainakin jotkin tällaiset luvut ovat olemassa.

Tehtävän (a)-kohdan todistukseksi riittää, jos osoitetaan, että olipa (x_k) mikä nouseva jono hyvänsä, niin x_k:n etäisyys ainakin toisesta luvuista a_p ja a_q on $\ge \dfrac{d}{2}$. Mutta tämä onkin aika lailla itsestään selvää. Jos nimittäin $x_p \le a_p - \dfrac{d}{2}$, asia on selvä. Jos taas $x_p > a_p - \dfrac{d}{2}$, niin (x_i)-jonon kasvavuuden vuoksi myös

$x_q > a_p - \frac{d}{2}$. Mutta $a_p - \frac{d}{2} = a_q + \frac{d}{2}$, joten tässä tapauksessa $x_q - a_q > \frac{d}{2}$. Tehtävän (a)-kohdan oikea ratkaisu tuotti kilpailijalle 3 pistettä.

Täysien pisteiden saamiseksi kilpailijan piti vielä keksiä jokin kasvava lukujono (x_i), jolle tehtävän epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus. Tässä täytyy huomata, että (a_i) on lukujono, joka on annettu, ja jono (x_i) voidaan rakentaa jonon (a_i) varaan. Jonoa (x_i), joka toimisi halutulla tavalla kaikkien mahdollisten (a_i)-jonojen suhteen, ei tietenkään voi löytyä.

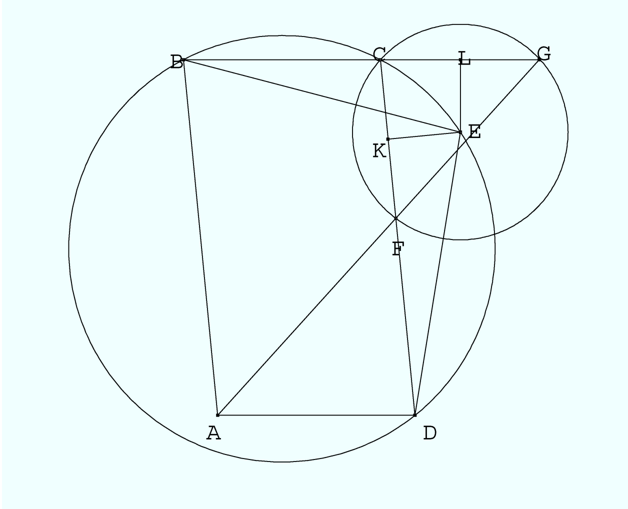
Mahdollisia tapoja määritellä jono (x_i) on useita. Yksi strategia on lähteä mahdollisimman alhaalta: näin voidaan ehkä helpoimmin varmistua siitä, että jonosta on vara tehdä kasvava. Aloitetaan siis asettamalla $x_1 = a_1 - \frac{d}{2}$. Seuraavan luvun on oltava $\geq x_1$, mutta se ei saa erota a_2:sta enempää kuin $\frac{d}{2}$. Asetetaan siis $x_2 = \max\{x_1, a_2 - \frac{d}{2}\}$. Nythän $a_1 - a_2 \leq d$, joten a_2:n ja x_2:n välimatka ei ylitä $\frac{d}{2}$:ta. Havaintomme kannustaa jatkamaan jonon määrittelyä samalla tavalla. Se on syytä tehdä induktiivisesti: jos $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ on määritelty, asetetaan $x_k = \max\{x_{k-1}, a_k - \frac{d}{2}\}$. Näin saadaan ilman muuta nouseva jono: $x_k \geq x_{k-1}$ kaikilla k. Myös epäyhtälö $x_k - a_k \geq -\frac{d}{2}$ tulee automaattisesti todeksi. Ainoa varmistettava seikka on enää epäyhtälö $x_k - a_k \leq \frac{d}{2}$. Tämän varmistamiseksi täytyy palata jonossa pienimpään indeksiin j, jolle $x_k = x_j$. Tämä j on joko 1 tai sellainen, että $x_{j-1} < x_j$, jolloin myös, koska x_i:t määritellään niin kuin ne määritellään, $x_j = a_j - \frac{d}{2}$. Mutta $a_j - a_k \leq d$. Siispä $x_k - a_k = x_j - a_j + a_j - a_k < -\frac{d}{2} + d = \frac{d}{2}$, niin kuin pitikin.

Tehtävään 1 kilpailijat antoivat 161 täysin pistein arvosteltua vastausta. Pistekeskiarvo oli 3,4.

Tehtävä 2

Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtävät valitaan neljästä kategoriasta, joista yksi on geometria. Lähes aina geometrian luokasta tulee valituksi kaksi tehtävää, joista toinen on helppo, toinen vaativampi. Tällä kertaa vaativampi tehtävä oli sijoitettu ensimmäisen kilpailupäivän toiseksi tehtäväksi. Se oli tällainen:

Pisteet A, B, C, D ja E sijaitsevat niin, että $ABCD$ on suunnikas ja $BCED$ on jännenelikulmio. Suora ℓ kulkee pisteen A kautta. Oletetaan, että ℓ leikkaa janan DC sen sisäpisteessä F ja suoran BC pisteessä G. Oletetaan, että $EF = EG = EC$. Todista, että ℓ on kulman DAB puolittaja.



Kun tilanteesta piirtää kuvan, huomaa, että $\angle FAD = \angle FGC$ (koska $GC \| AD$) ja $\angle BAF = \angle CFG$ (koska $AB \| FC$). Tavoitteeksi voi siis ottaa kulmien CFG ja CGF yhtäsuuruuden osoittamisen, mikä taas seuraisi kolmion CFG tasakylkisyydestä. Jännenelikulmio-oletuksen hyödyllinen seuraus on aika ilmeinen: kulmat CBE ja CDE ovat yhtä suuret. (Jännenelikulmiohan tarkoittaa nelikulmiota, jonka ympäri voidaan piirtää ympyrä; kulmien yhtäsuuruus seuraa kehäkulmalauseesta.) Tämä johtaa houkutukseen todistaa kolmiot CBE ja FDE yhteneviksi. Jos tämä saataisiin varmaksi, esitetty tasakylkisyys seuraisi helposti. Kun kolmioista ei kuitenkaan löydy tarvittavaa kolmatta samanlaista osaparia, on edettävä mutkitellen.

Tehdäänpä siis vastaoletus, jonka mukaan olisi $CG > CF$. Koska E on oletuksen mukaan kolmion CFG ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, jänteen CF tulee nyt olla kauempana E:stä kuin jänteen CG.

Piirretään vielä E:n kohtisuorat projektiot K ja L sivuille CF ja CG. Sivujen CF ja CG puolikkaille KF ja CL pätee $KF < CL$. Edellä sanotun perusteella $EK > EL$. Suorakulmaiset kolmiot DEK ja BEL ovat yhdenmuotoisia (kk), joten $KD > BL$. Mutta nyt $AD = BC = BL - CL < DK - KF = FD$. Kolmiot CFG ja DFA ovat yhdenmuotoiset, koska $CG \| AD$. Mutta nyt on tultu siihen risitriitatilanteeseen, että kolmiossa ADF on $AD < FD$, mutta kolmiossa CFG vastinsivut ovat toisessa suuruusjärjestyksessä, $CF < CG$. Tämä on mahdotonta, joten vastaoletus $CG > CF$ ei voi olla tosi. Mutta oletuksesta $CG < CF$ seuraa aivan samojen päättelyaskelten jälkeen myös ristiriita. Siis $CG = CF$, ja väite on todistettu.

Tehtävän kaksi ratkaisi oikein 137 kilpailijaa ja pistekeskiarvo oli 2,5.

Tehtävä 3

Ensimmäisen kilpailupäivän kolmas tehtävä oli kombinatorinen. Siinä esiintyy verkkoteorian käsite klikki, mutta tehtävä oli muotoiltu, niin kuin usein tapana on, ihmisjoukossa vallitsevien tai ei-vallitsevien relaatioiden avulla.

Matematiikkakilpailun osallistujista jotkut ovat toistensa ystäviä; ystävyys on aina molemminpuolista. Sanomme, että jokin kilpailijoiden joukko on klikki*, jos kaikki sen jäsenet ovat toistensa ystäviä. (Erityisesti joukot, joissa on vähemmän kuin kaksi alkiota, ovat klikkejä.) Sanomme klikin jäsenten lukumäärää klikin* kooksi.

Tiedetään, että tässä kilpailussa klikkien suurin koko on parillinen. Todista, että kilpailijat voidaan jakaa kahteen huoneeseen niin, että suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki on samankokoinen kuin suurikokoisin toisessa huoneessa oleva klikki.

Keskeinen havainto klikin olemuksesta on, että klikin jokainen epätyhjä osajoukko on klikki. Merkitään $|E|$:lla joukon E alkioiden lukumäärää. Merkitään huoneissa olevien kilpailijoiden joukkoja symboleilla A ja B ja merkitään vastaavasti huoneessa olevan suurikokoisimman klikin kokoa $c(A)$:lla ja $c(B)$:llä. Olkoon nyt M jokin klikki, jonka koko on suurin mahdollinen. Tällaisiahan voi olla useita, mutta tarkastetaan yhtä sellaista. Olkoon $|M| = 2m$.

Lähdetään rakentamaan vaadittua huoneisiin jakoa niin, että sijoitetaan aluksi kaikki M:n jäsenet huoneeseen A ja kaikki muut kilpailijat huoneeseen B. Silloin $c(A) = |M| \geq c(B)$. Nyt voi olla niin, että $c(A) = c(B)$. Tällöin vaadittu sijoittelu on tehty, ja olemme tyytyväisiä.

Jos onkin $c(A) > c(B)$, siirretään yksi henkilö huoneesta A huoneeseen B. Tällöin $c(A)$ pienenee yhdellä ja $c(B)$ joko säilyy ennallaan tai kasvaa yhdellä, riippuen siitä, kasvattiko siirretty henkilö B-puolen suurinta klikkiä vai ei. Jatketaan siirtoja, kunnes $c(A) \leq c(B) \leq c(A)+1$. Tällainen tilanne tulee vastaan viimeistään silloin, kun puolet A-huoneessa aluksi olleista on siirretty B:hen. Kuvatussa tilanteessa on siis $c(A) = |A| \geq m$. Merkitään $c(A) = k$. Jos nyt $c(A) = c(B)$, jako on valmis.

Ellei näin ole, on oltava $c(B) = c(A) + 1$. Jos nyt B-huoneessa on kilpailija $x \in M$ ja klikki C, jolle $|C| = k + 1$, mutta $x \notin C$, niin siirretään x huoneeseen A. Silloin $c(A) = k + 1 = |C| = c(B)$, ja jako on suoritettu. Ellei tällaista kilpailijaa ole, niin jokainen $x \in B \cap M$ kuuluu jokaiseen sellaiseen klikkiin $C \subset B$, jolle $|C| = k + 1$. Valitaan nyt jokin tällainen klikki C ja siirretään siitä yksi kilpailija, joka ei kuulu M:ään, A-huoneeseen. Tällainen kilpailija on olemassa, koska jos kaikki C:n jäsenet olisivat myös M:n jäseniä, M:ssä olisi $k + k + 1$ eli pariton määrä jäseniä, toisin kuin tehtävässä oletettiin. Toistetaan askel niin monta kertaa kuin se on mahdollista. Joka siirrossa $c(B)$ pienenee enintään yhdellä. Viimeisen mahdollisen siirron jälkeen $c(B) = k$.

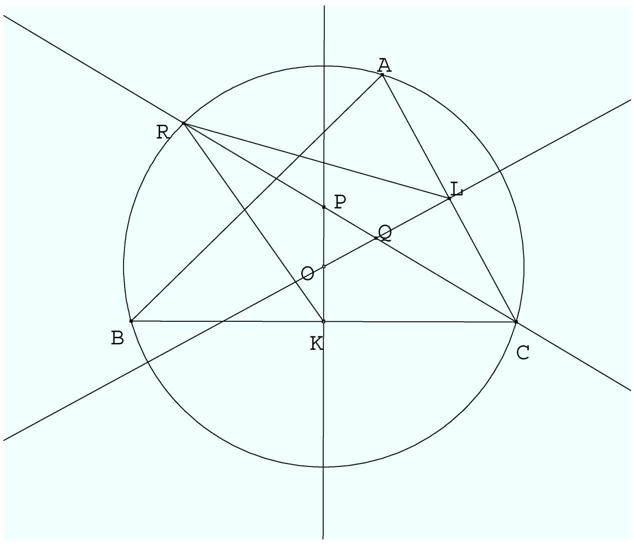
Tarkastellaan nyt tilannetta. A:ssa on yhä klikki $A \cap M$, joten $c(A) \geq k$. Olkoon Q mielivaltainen A:n klikki. Jos $x \in Q$, niin joko $x \in A \cap M$, jolloin x on jokaisen $B \cap M$:n jäsenen ystävä, tai x on siirretty sellaisesta B:n klikistä, joka sisälsi $B \cap M$:n, jolloin x myös on jokaisen $B \cap M$:n jäsenen ystävä. Siis $Q \cup (B \cap M)$ on klikki. Mutta M on suurikokoisin klikki, joten $|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|$. Siis $|Q| \leq |A \cap M| = k$. Siis $c(A) \leq k$. Siis $c(A) = k$, ja haluttu jako on suoritettu.

Päättely ei ollut helppo. Kilpailussa sen osasi vain kaksi kilpailijaa. Pistekeskiarvokaan ei noussut korkeaksi: se oli 0,3.

Tehtävä 4

Kilpailun toinen geometriatehtävä oli sijoitettu toisen kilpailupäivän ensimmäiseksi tehtäväksi. Olettama oli siis, että tehtävä olisi helpohko. Se oli tällainen:

Kolmion ABC kulman BCA puolittaja leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä R, kolmion sivun BC keskinormaalin pisteessä P ja sivun AC keskinormaalin pisteessä Q. Sivun BC keskipiste on K ja sivun AC keskipiste on L. Osoita, että kolmioilla RPK ja RQL on sama ala.



Tehtävä voidaan ratkaista monin tavoin. Tässä yksi: Kolmion RPK sivua RP vastaan piirretyn korkeusjanan pituus on $KP \cdot \sin(\angle CPK)$ ja kolmion RQL sivua RQ vastaan piirretyn korkeusjanan pituus on $LQ \cdot \sin(\angle LQC)$. Koska kulmat KCP ja LCQ ovat yhtä suuret, niin suorakulmaisten kolmioiden CPK ja

CQL kolmannet kulmat KPC ja LQC ovat yhtä suuret. Väite tulee todistetuksi, jos saadaan osoitettua $RP \cdot KP = RQ \cdot LQ$.

Olkoon O kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste eli keskinormaalien leikkauspiste. Edellä tehdyn kulmahavainnon perusteella OQP on tasakylkinen kolmio. (Jos $Q = P = O$, tehtävän väite pätee triviaalisti.) Koska P ja Q ovat yhtä etäällä kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipisteestä, niillä on tämänympyrän suhteen sama potenssi. Mutta se merkitsee, että $RP \cdot PC = RQ \cdot QC$. (palauytetaan mieleen, että pisteen X potenssi ympyrän Γ suhteen on tulo $XY \cdot XZ$, missä Y ja Z ovat mielivaltaisen X:n kautta kulkevan suoran ja ympyrän *Gamma* leikkauspisteet; tulon arvo on valitusta suorasta riippumaton.) Yhdenmuotoisten suorakulmaisten kolmioiden CPK ja CQL perusteella saadaan heti $PC : KP = QC : LQ$. Siis todellakin $RP \cdot KP = RQ \cdot LQ$.

Tämä tehtävä osoittautui kilpailun helpoimmaksi. Täydet 7 pistettä sai 363 kilpailijaa, ja pistekeskiarvokin oli 5,7.

Tehtävä 5

Lukuteorian osuudesta kilpailutehtäviin valikoitui vain yksi. Se oli tällainen:

Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Todista, että jos luku $4ab-1$ on luvun $(4a^2-1)^2$ tekijä, niin $a = b$.

Tehtävän ratkaisu on klassisen, Pierre de Fermat'han palautuvan "äärellisen laskeutumisen" menetelmän mukainen. Perusidea on tehdä vastaoletus ja päätellä siitä, että löytyy yhä pienempiä vastaoletukseksi kelpaavia lukuja.

Tehdään siis vastaoletus: oletetaan, että on olemassa vastaesimerkkipari (a, b), niin että $a \neq b$ mutta $4ab-1$ on luvun $(4a^2-1)^2$ tekijä. Koska $4ab \equiv 1 \mod (4ab-1)$, niin $(4ab)^2 \equiv 1 \mod (4ab-1)$ ja $(4b^2-1)^2 \equiv (4b^2-(4ab)^2) = 16b^2(4a^2-1) \equiv 0 \mod (4ab-1)$. Tämä merkitsee, että myös pari (b, a) on vastaesimerkkipari. Voidaan siis olettaa, että on olemassa vastaesimerkkipari (a, b) niin, että $a < b$. Olkoon nyt

$$r = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} r &\equiv (-r)(-1) \equiv (-r)(4ab-1) \\ &\equiv -(4a^2-1)^2 \equiv -1 \mod (4a). \end{aligned}$$

Siis $r = 4ac-1$ jollain positiivisella kokonaisluvulla c. Siis $(4ac-1)(4ab-1) = (4a^2-1)^2$. Oletuksen mukaan $4ab-1 > 4a^2-1$. Siis $4ac-1 < 4a^2-1$ eli $c < a$.

Tarkastellaan nyt kaikkia vastaesimerkkipareja. Jollakin parilla (a, b) lauseke $2a+b$ saa pienimmän mahdollisen arvonsa. Jos $a > b$, niin $2b+a < 2a+b$. Kuitenkin myös (b, a) on vastaesimerkkipari. Jos $a < b$, on olemassa vastaesimerkkipari (a, c), jolle $c < a$. Selvästi $2a+c < 2a+b$. Kummassakin tapauksessa tullaan ristiriitaan $2a+b$:n minimaalisuuden kanssa. Vastaesimerkkipareja ei siis voi olla olemassa.

Tehtävän ratkaisi oikein 94 kilpailijaa. Pistekeskiarvo oli 1,9.

Tehtävä 6

Kilpailun viimeinen tehtävä sisälsi geometrisia ja kombinatorisia aineksia. Ratkaisu oli kuitenkin algebrallinen. Tehtävän alan voisi luonnehtia algebralliseksi geometriaksi. Tehtäviä valittaessa esitettiin arvioita, joiden mukaan tehtävä tulisi osoittautumaan kilpailijoille ylivoimaiseksi.

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan kolmiulotteisen avaruuden $(n+1)^3-1$ pistettä sisältävää joukkoa

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x+y+z > 0\}.$$

Mikä on pienin määrä tasoja, joiden yhdiste sisältää joukon S pisteet, muttei pistettä $(0, 0, 0)$?

Tasot, joiden yhtälöt ovat $x+y+z = k$, $k = 1, \ldots, 3n$, sisältävät kaikki S:n pisteet. Näitä tasoja on $3n$ kappaletta. Tästä sinänsä ratkaisun kannalta tarpeellisesta havainnosta ei vielä annettu pisteitä ollenkaan.

Osoitetaan, että vähemmällä kuin $3n$:llä tasolla peitto ei onnistu. Jos peittävien tasoja on m kappaletta ja niiden yhtälöt ovat $T_k(x, y, z) = a_kx + b_ky + c_kz - 1 = 0$, $k = 1, \ldots, m$, niin polynomi

$$P(x, y, z) = \prod_{k=1}^{m} T_k(x, y, z)$$

saa arvon 0 aina kun $(x, y, z) \in S$, mutta $P(0, 0, 0) = (-1)^m \neq 0$. Polynomin aste on m. Osoitetaan, että $m \geq 3n$.

Ratkaisun ymmärtämiseksi kannattaa aluksi käydä läpi tasotapaus. Tarkastellaan siis ensin kahden muuttujan polynomia $P(x, y)$, jolle $P(x, y) = 0$, kun x tai y on jokin luvuista $0, 1, \ldots, n$, mutta $(x, y) \neq (0, 0)$, ja jolle $P(0, 0) \neq 0$. Olkoon $S(y) = y(y-1)(y-2)\cdots(y-n)$ ja olkoon $R(x, y)$ polynomi, joka saadaan jakojäännökseksi, kun $P(x, y)$ jaetaan $S(y)$:llä: $P(x, y) = Q(x, y)S(y) + R(x, y)$. Nyt $R(x, y)$:n aste y:n suhteen on $<$ $S(y)$:n aste, eikä $R(x, y)$ kaikkiaan ole korkeampaa astetta kuin $P(x, y)$. Lisäksi $R(x, y) = P(x, y)$, kun $x, y \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Siis

$R(x, y) = R_n(x)y^n + R_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + R_0(x)$. Polynomi $R(0, y)$ saa arvon 0, kun $y = 1, \ldots, n$, mutta $R(0, 0) \neq 0$. Siis $R(0, y)$:n aste on $\geq n$. Tästä seuraa, että $R_n(0) \neq 0$. Olkoon sitten $x \in \{1, \ldots, n\}$. y:n n:nnen asteen polynomi $R(x, y) = 0$, kun $y = 0, 1, \ldots, n$, joten polynomi on identtisesti 0. Siis myös $R_n(x) = 0$, kun $x \in \{1, \ldots, n\}$. Koska $R_n(x)$ ei ole nollapolynomi, sen asteen on oltava $\geq n$. Mutta tämä merkitsee, että $R(x, y)$:n ja siis myös $P(x, y)$:n aste kahden muuttujan polynomina on $\geq 2n$.

Nyt todistetun perusteella voidaan osoittaa, että kolmen muuttujan polynomin $P(x, y, z)$, jolle $P(x, y, z) = 0$, kun $(x, y, z) \in S$, mutta $P(0, 0, 0) \neq 0$, aste on $\geq 3n$. Päättely on aivan sama kuin edellä (ja voitaisiin kiteyttää induktioaskeleeksi). Muodostetaan $P(x, y, z)$:n jakojäännös $R(x, y, z)$ modulo $S(z) = z(z-1)\cdots(z-n)$. R:n aste z.n suhteen on $\leq n$ ja R saa saman arvon kuin P kaikissa niissä pisteissä (x, y, z), joissa $x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Jos kirjoitetaan $R(x, y, z) = R_n(x, y)z^n + \cdots + R_0(x, y)$, niin $R(0, 0, z)$ ei ole nollapolynomi, mutta kuitenkin polynomi, jolla on ainakin n nollakohtaa; siis $R_n(0, 0) \neq 0$. Jos $(x, y) \neq (0, 0)$, mutta $x, y \in \{0, 1, \ldots, n\}$, niin $R(x, y, z)$ on z:n n:nnen asteen polynomi, jolla on $n + 1$ nollakohtaa. Se on siis identtisesti nolla, joten $R_n(x, y) = 0$. Mutta aikaisemmin todistetun perusteella $R_n(x, y)$:n on oltava ainakin astetta $2n$. Siis $R(x, y, z)$ ja myös $P(x, y, z)$ on kolmen muuttujan polynomina ainakin astetta $3n$. Ratkaisu on valmis.

Vastoin ennakko-oletuksia tämäkin tehtävä löysi kilpailijoista ratkaisijansa. Heitä oli kaikkiaan 5. Mutta tehtävästa jaettujen pisteiden keskiarvoksi jäi 0,15.

Lopuksi

Kukaan kilpailijoista ei onnistunut ratkaisemaan molempia vaikeita tehtäviä. Siispä täysiin pisteisiin ei yltänyt kukaan. Parhaaseen pistemäärään, 37:ään, ylsi Venäjän **Konstantin Matvejev**. Sääntöjen mukaisesti kultamitaleja sai osapuilleen paras kahdestoistaosa kilpailijoista. Pisterajaksi muodostui 29, ja kultamitaleja jaettiin 39. Hopeamitali annetaan seuraavalle kuudennekselle; näitä oli 83 ja pisteraja 21; pronssimitalin saa seuraava neljännes. Pisteraja oli 14 ja kilpailijoita 131.

Seuraavat matematiikkaolympialaiset järjestää Espanja Madridissa heinäkuussa 2008. Sitten ovat järjestyksessä Saksa, Kazakstan ja Hollanti.