

Kavaljeeri- ja sotilasprojektiot

Petteri Harjulehto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Johdanto

Usein on tarvetta esittää kolmiulotteisesta kappaleesta kuva paperilla eli kahdessa ulottuvuudessa. Toiveena olisi tietysti havainnollinen, mittatarkka ja helposti piirrettävä kuva. Valitettavasti havainnollisuus ja mittatarkkuus ovat melkein vastakkaisia toisilleen, joten joudumme aina tekemään näiden suhteen kompromissin.

Taiteessa käytetään usein perspektiivikuvaa, joka perustuu keskusprojektiioon. Siinä kuvaussäteet kulkevat yhden kiinteän pisteen, projektiokeskuksen, kautta. Perspektiivikuvien mittatarkka piirtäminen on varsin työlästä. Silmän tai kameran muodostama kuva on (suurin piirtein) keskusprojektion mukainen.

Tässä kirjoitelmassa tutustutaan yhdensuuntaisprojektiioihin. Erona keskusprojektiioon on, että kuvaussäteet ovat keskenään yhdensuuntaisia ja leikkaavat kuvatason jokaisessa pisteessä samassa kiinteässä kulmassa. Yhdensuuntaisprojektiio voidaan myös tulkita keskusprojektion rajatapaukseksi, jossa projektiokeskus on äärettömän kaukana. Tällä tulkinnalla voidaan ajatella auringonsäteiden aikaansaaman heittovarjon olevan yhdensuuntaisprojektion antama kuva.

Yhdensuuntaisprojektiioilla on monia hyviä ominaisuuksia. Ne kuvaavat pisteet pisteiksi, suorat suoriksi

(joissakin erikoistapauksissa pisteeksi) ja yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi. Myös janojen jakosuhte säilyy eli erityisesti janan keskipiste kuvautuu keskipisteeksi. Lisäksi kuvatason suuntaiset kuviot säilyvät oikean mittaisina.

Tutustumme kahteen yhdensuuntaisprojektiioon, kavaljeeriprojektiioon ja sotilasprojektiioon. Molemmissa projektiioissa kuvaussäteet kohtaavat kuvatason vinossa. Niissä muodostuvat kuvat aivot osaavat tulkita varsin helposti ”kolmiulotteiseksi”, varsinkin jos kuvaa kallistaa sopivasti katsojaan nähden. Mikä parasta – yksinkertaisen kolmiulotteisen kappaleen kuvan mittatarkka piirtäminen on varsin helppoa – ja jopa hauskaa.

Molempien projektioiden nimet juontavat juurensa siitä, että niitä on käytetty linnoitusten piirustuksissa. Kavaljeeri on ratsumies mutta myös linnoituksen päävalliin torni.

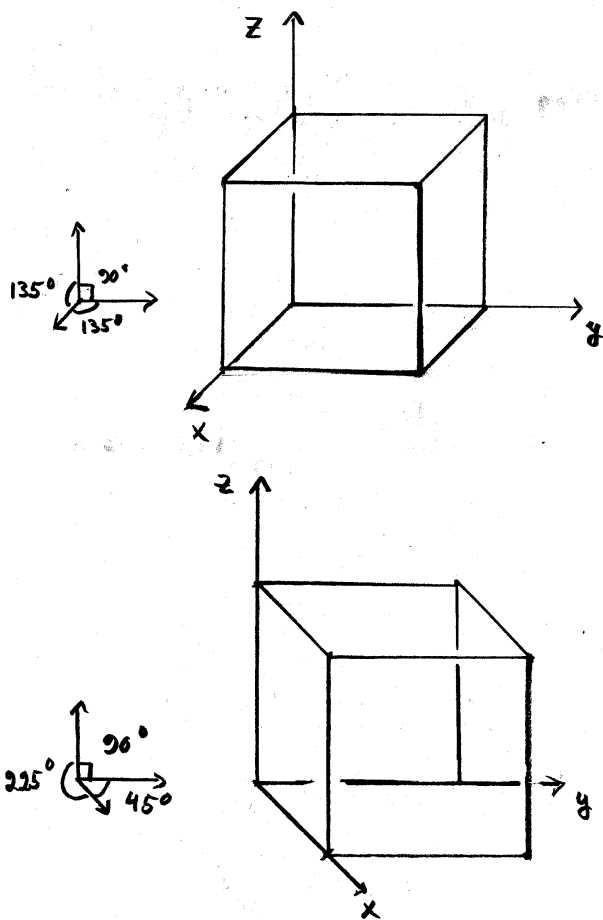
Tämä kirjoitelma perustuu Erkki Rosenbergin kirjaan *Geometria*, Limes ry, Helsinki 1991. Kaikki kuvat ovat kirjoittajan lyijykynällä, viivottimella ja harpilla piirtämiä.

Kavaljeeriprojektiio

Ajatellaan kolmiulotteista (x, y, z) -koordinaatistoa. Kiinnitetään paperi pystysuoraan (y, z) -tasolle ja ku-

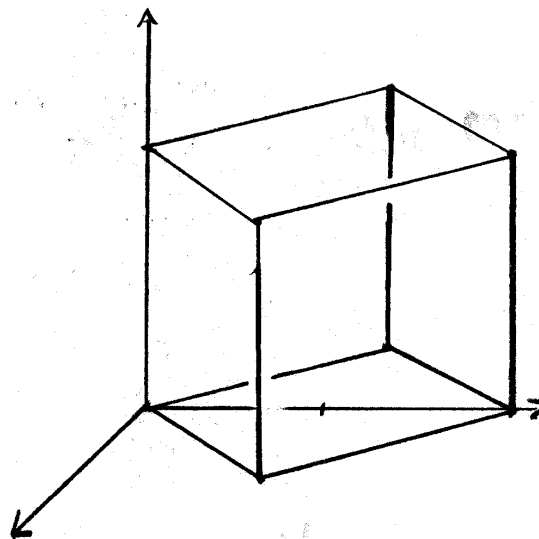
vattava kappale paperin eteen vaikka (x, y) -tasolle. Ajatellaan että valonsäteet tulevat, paperin takaa katsoen, vasemmalta tai oikealta ylhäältä siten, että x -akselille laitetun janan (lyijykynän) varjo muodostaa 45 asteen kulman y -akselin kanssa ja että varjon pituus on puolet alkuperäisen janan (lyijykynän) pituudesta. x -akselin kuvaksi tulee suora $z = y$ tai suora $z = -y$ ja x -akselin yksikköjana kuvautuu puoleen lyhennettynä. Koska jana oli kohtisuorassa paperia vastaan, saamme suorakulmaisen kolmion, jonka tangentit ovat 1 ja 2 yksikön pituisia. Valo siis kohtaa paperin kulmassa $\tan^{-1} 2$ eli noin 63,4 asteen kulmassa. Kavaljeeriprojektiossa kuvattu aihe näyttää luonnollisemmalta kun sitä katsoo vasemmalta/oikealta alhaalta.

Käytännössä esimerkiksi kuution piirtäminen on varsin helppoa. Valitaan mikä tahansa kuution kärjistä origoon ja mikä tahansa tahkoista (y, z) -tasoon. Piirretään ensin valittu tahko koordinaatistoon. Mitataan kustakin kärjestä x -akselin suuntaan kulkevä särmä muistaen että tämän särmän pituus kutistuu puoleen. Näin löydettyt kärjet yhdistetään toisiinsa särmien mukaan. Tapana on katkaista kuution takana olevat särmät niin, että ne eivät leikkaa edessä olevia särmiä; ”jos ei leikkaa todellisuudessa, ei leikkaa kuvassa”. Kuvassa 1 on esitetty kuutio molemmissa kavaljeeriprojektion vaihtoehdoissa.



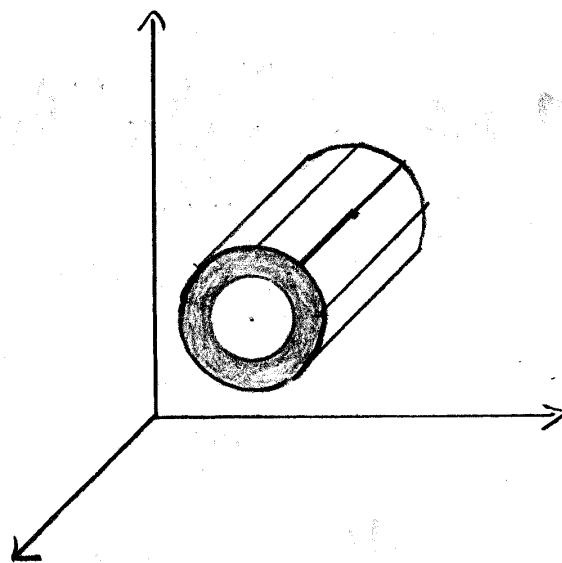
Kuva 1. Kuutio kavaljeeriprojektiossa.

Mikään ei estä sijoittamasta kuutiota myös muulla tavalla koordinaatistoon. Kuvassa 2 on kuutio sijoitettu koordinaatistoon niin, että pohjatahkon halkaisija on y -akselilla.



Kuva 2. Kuutio kavaljeeriprojektiossa.

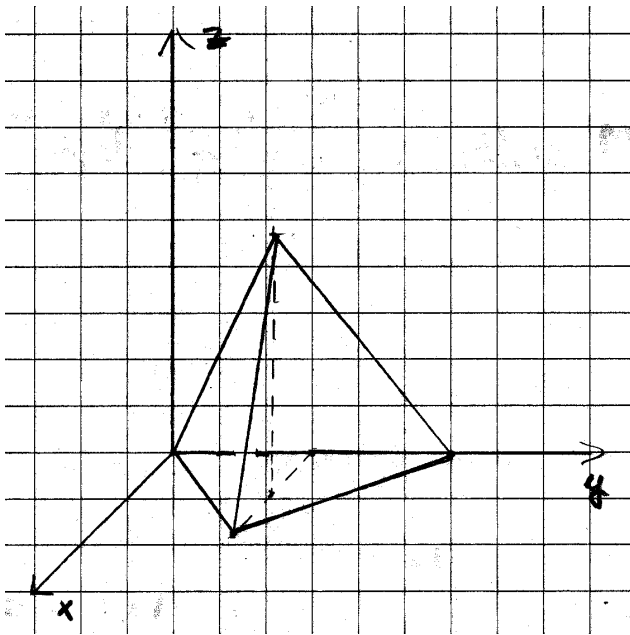
Kavaljeeriprojektioilla on myös helppo piirtää kuvioita, joissa on (y, z) -tason suuntaisia ympyröitä, sillä nämä ympyrät voidaan piirtää harpilla. Kuvassa 3 on putki, joka on kohtisuorassa (y, z) -tasoa vastaan.



Kuva 3. Putki kavaljeeriprojektiossa.

Ruutumenetelmä

Usein kavaljeeriprojektio piirretään ruutupaperille. Jos y - ja z -akselit asetetaan ruutuviivoja pitkin, niin x -akseli voidaan piirtää ruutujen lävistäjän mukaan. Varsinaisessa kavaljeeriprojektiossa akseleiden yksiköt suhtautuvat toisiinsa lukujen $\frac{1}{2} : 1 : 1$ mukaan. Valitsemalla yksiköksi x -akselilla ruudun halkaisija sekä y - ja z -akseleilla kolmen ruudun pituiset janat, päästään suhteeseen $\sqrt{2} : 3 : 3 \approx 0,471 : 1 : 1$. Poikkeama kavaljeeriprojektioista on alle 6 prosenttia, eikä se ole helposti havaittavissa käsin tehdyistä piirustuksista. Kuvassa 4 on ruutumenetelmällä piirretty tetraedri.

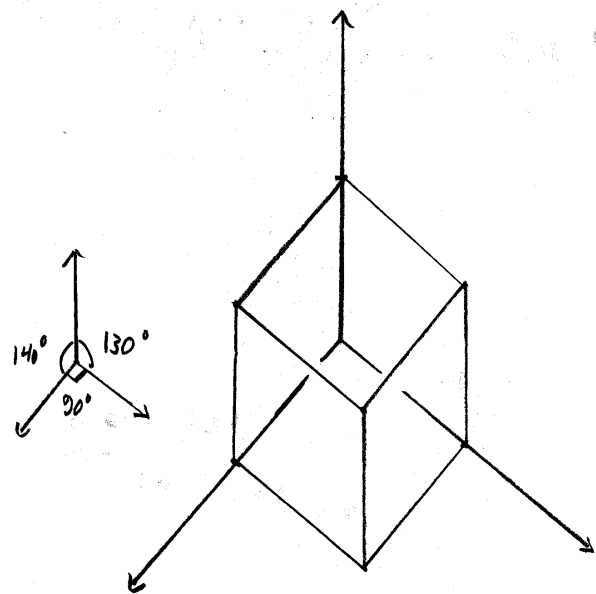


Kuva 4. Tetraedri ruutumenetelmällä.

Aina piirrettäessä kuvaa kolmiulotteisesta kappaleesta tulee kappaleen asemointia kuvaan mieltää huolellisesti. Tutkitaan vaikka kuvassa 4 olevan tetraedrin kärkeä $(0, 2, 0)$. Tähän samaan pisteeseen kuvautuu myös piste $(2, 2\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Siis näiden pisteiden kautta kulkeva suora kuvautuu pisteeksi $(0, 2, 0)$ ja jokainen tämän suoran kanssa yhdensuuntainen suora kuvautuu pisteeksi. On selvää, että jos joku piirrettävää kappaletta rajaavista suorista, esimerkiksi osa kuution sivuista, kuvautuu pisteeksi, niin kuvan havainnollisuus kärsii.

Sotilasprojektiio

Sotilasprojektiiossa on kuvatasona (x, y) -taso ja kuvaussäteet muodostavat tämän kanssa 45 asteen kulman. Otetaan z -akselin suuntainen yhden yksikön mittainen jana. Tällöin saamme suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan muodostaa kuvaussäteiden osa ja jonka toinen tangentti on janamme. Koska kolmion kulmat ovat 90 astetta ja kahdesti 45 astetta, havaitsemme, että kateetit ovat yhtä pitkiä; z -akselin suuntaiset pystyjanat kuvautuvat siis oikeanpituisiksi. Pystyjanat pyritään havainnollisuuden parantamiseksi suuntaamaan aina suoraan ylöspäin. Sotilasprojektiota piirrettäessä voidaan lähtökohdaksi ottaa esimerkiksi rakennuksen pohjapiirros. Piirustuksessa voidaan jättää katto piirtämättä, jolloin rakennukseen katsellaan sisään ylhäältä päin. Sotilasprojektiota voidaan käyttää myös pystyssä olevien pyörähdykappaleiden kuvaamisen, sillä vaakatasossa olevat ympyrät voidaan piirtää harpilla. Kuvassa 5 on kuutio.



Kuva 5. Kuutio sotilasprojektiiossa.