Viisi lukion geometrian oppikirjaa

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen ja *Matti Räsänen*: **Lukion Calculus 2. MAA3 Geometria. MAA4 Analyyttinen geometria.** Otava 2005. 210 s. Ovh. 24,80.

Tarmo Hautajärvi, Jukka Ottelin ja *Leena Wallin-Jaakkola*: **Laudatur 3. Geometria.** 227 s. Otava 2005. 216 s. Ovh. 12,20.

Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoski, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen ja *Marja-Leena Viilo*: **Matematiikan Taito 3. Geometria.** WSOY 2005. 197 s. Ovh. 12,20.

Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen, Maija Salmela ja *Jorma Tahvanainen*: **Pitkä matematiikka 3. Geometria.** WSOY 2006. 227 s. Ovh. 12,80.

Pekka Kontkanen, Riitta Liira, Kerkko Luosto, Juha Nurmi, Riikka Nurmiainen, Anja Ronkainen ja *Sisko Savolainen*: **Pyramidi 3. Lukion pitkä matematiikka. Geometria.** Tammi 2005. 216 s. Ovh. 12,00.

On kulunut jo pitkä aika siitä, kun geometria oli matematiikan keskeisintä sisältöä ja sen opettamisen ja oppimisen pohjimmaiseksi syyksi esitettiin loogiseen ajatteluun harjaannuttamista. Sana looginen mainitaan yhä opetussuunnitelman perusteissa: matematiikan pitkän oppimäärän tavoitteisiin kuuluu, että opiskelija ”oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena”. Lukion pitkän matematiikan geometriaksi nimetyn kurssin MAA3 spesifisistä tavoitteista ensimmäinen on, että ”opiskelija harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa”. Lisäksi opiskelijan tulisi harjaantua ”muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita” ja ratkaista geometrisia ongelmia ”käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa”. Nämä tavoitteet opetussuunnitelma ajattelee saavutettavan kurssilla, jonka keskeiset sisällöt ovat ”kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus, sini- ja kosinilause, ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria” sekä ”kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen”.

Esittelen tässä viisi lukion pitkän matematiikan geometrian kurssia varten kirjoitettua oppikirjaa. Oppikirjaesittelyjen edellisessä osassa (Solmu 2/2006) mukana olleiden sarjojen lisäksi vertailussa on nyt myös Calculus-sarjan kirja. Muista poiketen Calculus on nitonut samoihin kansiin geometrian ja analyyttisen geometrian kurssit. Geometrian kurssin osuus päättyy sivulle 119, joten Calculus on kirjoista selvästi suppein. Kirjat ovat kaikki erilaisia. En yritä asettaa niitä paremmuusjärjestykseen, joskin mielipiteeni tulevat esiin itse kutakin kirjaa käsiteltäessä.

Edellisen esittelyn tiedot kirjojen ulkonaisista ominaisuuksista pätevät pääosin geometrian kirjoihinkin. Laudatur-sarjaan on kuitenkin ilmestynyt väripainatus, jota Pyramidissa nähtiin jo ykkösosassa. Calculus on kaksivärinen samoin kuin Pitkä matematiikka ja Matematiikan taito. Calculuksen mukaan tulon jälkeen en voi enää sanoa, että kaikkien kirjojen tekijäryhmissä olisivat molemmat sukupuolet edustettuina – mikä ei tietysti sinänsä ole tarpeenkaan. Otava näyttää käyttävän kirjoittajina opettajia, muiden kustantajien työryhmissä on mukana myös korkeakoulutaustaisia tekijöitä. Calculuksenkin kirjasin näyttää 12 pisteen korkuiselta. En ole typografian asiantuntija. Paljaalle silmälle kaikkien kirjojen käyttämä kirjasinlaji näyttää varsin samanlaiselta. Kirjoista painavimmat ovat Laudatur ja Pyramidi, 437 g. Calculus, vaikka sisältää kaksi kurssia, painaa vain 403 g, Pitkä matematiikka 395. Keveintä tietoa näyttää olevan Matematiikan taito: vaaka näytti vain 343 g. – Punnitsin vertailun vuoksi myös takavuosien koviin kansiin sidotut oppikirjat, Kalle Väisälän Geometrian ja kaksiosaisen Kallion, Malmion ja Apajalahden Geometrian. Edellinen painoi 273 g, jälkimmäisen osat (joista vain toinen kulki kerrallaan koululaisen laukussa) yhteensä 462 g.

Calculusta ja Pyramidia lukuun ottamatta kirjojen alkuun on painettu kurssin ajankäyttöehdotus. Laudatur ottaa huomioon eripituiset oppituntikäytännötkin. Ajankäyttösuunnitelmia ei voi suoraan verrata toisiinsa, koska ne on sovitettu kuhunkin kirjaan, ja asioiden jaottelussa on eroja. Samoin kuin ykköskurssissa, Matematiikan taito ehdottaa 30 tunnin käyttämistä, Pitkä matematiikka 28:aa ja Laudatur 27:ää. Jokaisen kirjan loppuun on painettu asiahakemisto.

Kirjojen esimerkkitehtävät sisältävät säännönmukaisesti jonkin laskutoimitusketjun, jonka päätteeksi saadaan toivottu tulos. Matematiikan taitoa lukuun ottamatta kirjat esittävät lopputuloksen kahdesti, jälkimmäisellä kerralla niin, että tulosta edeltää sana Vastaus. Seuraava lainaus on Laudaturista, mutta se voisi olla yhtä hyvin Calculuksesta, Pitkästä matematiikasta tai Pyramidista:

"Neliön piirin suhde ympyrän piiriin

$$\frac{p_{\text{neliö}}}{p_{\text{ymp}}} = \frac{4r\sqrt{\pi}}{2\pi r} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 1{,}13$$

Vastaus: Neliön piirin suhde ympyrän piiriin on $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 1{,}13$."

Yksi kirjojen yhteinen piirre jää hiukan kummastuttamaan. Kaikki tietysti määrittelevät ainakin sini- ja kosinifunktion ja käyttävät niitä opetussuunnitelman mukaisesti kolmion osien ratkaisemiseen. Yksikään kirja ei omista puolta sanaa sen pohtimiseen, mistä laskimen suoltamat sinit ja kosinit oikeastaan tulevat.

Kaikki viisi kirjaa tasapainolevat geometrian kurssin ristiriitaisuuden kanssa: asiaa on sinänsä paljon, laskento on tarpeellista, mutta geometrian tulisi olla myös ja nimenomaan matemaattiseen ajatteluunkin koulivaa. Ei ole kirjojen vika, ainakaan pelkästään, että geometria ei oikein löydä paikkaansa lukiossa. Olisiko laskento ja deduktio erotettava kerta kaikkiaan omiksi kursseikseen, jälkimmäinen ehkä vain erikoiskurssina eliittiä varten?

Calculus

Calculuksen kaksi lukiokurssia sisältävän niteen geometriaosuus on vain 119 sivun mittainen. Esitys on siis selvästi tarkasteltavista kirjoista suppein. Esitys on jaettu neljään varsinaiseen lukuun: Tasogeometria, Kolmion ratkaiseminen, Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus sekä Avaruusgeometria. Kirjassa on vielä asteriskin lisäainekseksi osoittama geometrisia konstruktioita esittelevään osa. Harjoitustehtäviä on, mallikokeet mukaan lukien, 371 kappaletta. Melkein kaikki tehtävät ovat laskutehtäviä. Vastaukset annetaan luettelossa silloin, kun ne ovat numeerisia. Harjoitustehtävät on luokiteltu perustehtäviksi ja vaativammiksi tehtäviksi. Suurta vaativuuseroa ei näissä näytä olevan. Ne melko harvat tehtävät, joissa ratkaisijalta toivotaan perusteluja, on yleensä luokiteltu vaativampien osastoon. Näin piiloviestitään, että geometria olisi ensi sijassa laskentoa. Kirjan esimerkkilaskuissa on sekä (huonoa) tauluesitystyyliä – peräkkäisiä lausekkeita ilman selityksiä tai välimerkkejä – että korrektisti normaalia kirjoitustapaa käyttäen esitettyä tekstiä.

Luku Tasogeometria alkaa Eukleideen viiden postulaatin luettelosta ja aksiomaattisen menetelmän esittelystä. Tästä eteenpäin kirja ei kuitenkaan noudata johdonmukaisen esityksen kaavaa. Joillekin käsitteille esitetään täsmällisen määritelmän oloisia kuvauksia, toiset vain tulevat vastaan, ilman että niitä erityisesti toivotettaisiin tervetulleiksi tai esimerkiksi viitattaisiin siihen, että käsite on perusasteen kurssista tuttu. Tarkka lukija saattaa kuitenkin keksiä määritelmät – esimerkiksi käsitteille hypotenuusa ja kateetti –kuvioista. Harjoitustehtävissä saatetaan vedota tietoihin, jotka eksplisiittisesti tuodaan esiin myöhemmin. Näin esimerkiksi tangenttinelikulmion sivujen pituuksia koskevassa tehtävässä. Osa tarjotusta tiedosta on eksplisiittisesti muotoiltu lauseiksi. Joidenkin yhteyteen on painettu virke, jossa kerrotaan todistuksen olevan harjoitustehtävä. Näitä tehtäviä ei kuitenkaan ole uudelleen esitetty harjoitustehtäväluettelossa.

Luku Kolmion ratkaiseminen lähtee liikkeelle Pythagoraan lauseesta. "Muistikolmiot" esitellään vaiheessa, jossa niiden muistettavuuden merkitystä ei voida perustella. Trigonometrisistä funktioista otetaan käyttöön sini, kosini, tangentti ja kotangentti. Funktioiden määrittelyn kannalta olennaista yhdenmuotoisuuden käsitettä ei ole tässä vaiheessa käytössä. Sinin ja kosinin määritelmät laajennetaan suoran kulman ja oikokulman välille. Sinilause perustellaan kolmion alan kirjoittamisella eri tavoin muotoon $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Sinilauseesta luvataan hiukan liikaa: kolmion muita osia ei toki voi sen avulla laskea, jos yksi pari sivuja ja vastaisia kulmia tunnetaan.

Yhtenevyyttä ja yhdenmuotoisuutta käsittelevä luku määrittelee yhtenevyyden kuvioiden ominaisuutena olla asetettavissa päällekkäin niin, että kuviot täysin yhtyvät. Kolmioiden viisi yhtenevyyslausetta luetellaan ja luettelon jälkeen kerrotaan, mitä on todistaminen ja todistetaan kolme esimerkkilausetta. Yhdenmuotoisuuden määritelmäksi esitetään kaikkien vastinjanojen verrannollisuus. Tästä sanotaan seuraavan kaikkien vastinkulmien yhtäsuuruuden. Määritelmän mukaan yhdenmuotoisuuden testaaminen vaatisi äärettömän monien janaparien mittaamisen. Määritelmän jälkeisessä esimerkissä on monikulmioita ja esitellyt vastinjanat monikulmioiden kärkien välisiä. Määritelmästä siirrytään virkkeeseen, jossa luetellaan kolmioiden yhtenevyyslauseet (vain kirjainlyhenteinä) ja kirjoitetaan auki yhdenmuotoisuuslause kk, jonka totuuden kerrotaan olevan ilmeinen. Lukuun on vielä sisällytetty kolmion merkillisten pisteiden luettelo ja yhdenmuotoisuuden sovelluksena pisteen potenssin käsitteen esittely.

Avaruusgeometria-luku alkaa suorien ja tasojen keskinäisten asentojen esittelyllä. Tason normaali määritellään suoraan kahta tason suoraa vastaan kohtisuorana suorana. Säännölliset monitahokkaat luetellaan. Lieriön määritelmä on tyypillisen epämääräinen: ”Kun suora liikkuu avaruudessa suuntansa säilyttäen ja palaa takaisin lähtökohtaansa, syntyy suljettu lieriöpinta. Entä jos suora liikkuisi vaikka ”paikallaan” edestakaisin? Kartion määritelmä antaisi vastaavasti mahdollisuuden erilaisiin tulkintoihin. Prismat ja pyramidit esitetään lieriöiden ja kartioiden erikoistapauksina, niin kuin toki mahdollista onkin. Pallosta annetaan vain erilaisia mittalukuja.

Calculuksen esitys ei sisällä ylimääräisiä koristeluja sen enempää tekstin kuin kuvituksenkaan puolella. Calculuksen lukija oppii laskemaan geometristen kuvioiden mittalukuja. Geometria loogisena oppirakennelmana tuskin kovin selvästi lukijan eteen avautuu.

Laudatur

Laudaturin ote aiheeseen on selvästi lennokkaampi ja myös lukijaa kosiskelevampi, alkaen esipuheen päiväyksestä ”Keuruulla mäntyjen siitepölyn liidellessä pilvinä”. Värejä käytetään ja kirjassa on myös muutama löyhästi tekstiin liittyvä värivalokuva, esimerkiksi sarvikuonoista, kun tehtävänä on laskea pennun ja täysikasvuisen massojen suhdetta. Parista kuvasta tunnistaa oululaistaustan. Lisäksi kirjan sivuille on ripoteltu runsaasti pieniä eläinaiheisia karikatyyrejä. Kirjan yleisasu on levoton: eritummuisia ja reunuksin koristetut laatikot täyttävät monien aukeamien pinta-alasta yli puolet.

Laudaturin harjoitustehtävien määrä, 574, on suurin vertailtavien kirjojen joukossa. Mukaan on poimittu muutamia hyvinkin vanhoja ylioppilastehtäviä. Jokunen harjoitustehtävä on kirjoitettu englanniksi, ruotsiksi, saksaksi, ranskaksi tai viroksi. Tehtävistä noin 15 on luonteeltaan todistustehtäviä. Laskutehtävien numeeriset vastaukset kerrotaan vastausluettelossa.

Kirjan alkaa lähtötaitotesti, jossa kysytään samoja asioita, joita kirjassa sitten opiskellaan. Sitten seuraa johdanto, jossa mm. väitetään paralleeliaksiooman todistamisen olleen keskiajalla kullan valmistuksen ohella muotiongelma ja käytetään vastaoletuksesta nimitystä vastaväite. Varsinaiset asiat on ryhmitelty 11 lukuun. Luku peruskäsitteitä alkaa todistuksen rakenteen esittelyllä. Saamme tietää, että perustelu ei ole täysin pätevä todistus. Pisteen määritelmää ”suureena, jolla on paikka, mutta ei ulottuvuutta” seuraa ilmoitus, että ”pistettä tai oikeastaan sen kuvaa merkitään isoilla kirjaimilla A, B, ...” Suoraa ei sitten enää määritelläkään, sanotaan vain, että se voidaan usealla tavalla määritellä. Kirjan ilmaisu on useasti kiusallisen epätäsmällistä: ”Aste voidaan kirjoittaa desimaalilukuna kuten mikä tahansa luku, esimerkiksi 54,25°”.

Laudatur siirtyy jo toisessa luvussa yhdenmuotoisuuteen, joka määritellään ominaisuutena olla samanmuotoinen, muttei välttämättä samankokoinen. Sen kummemmin filosofoimatta ilmoitetaan, että yhdenmuotoisuus seuraa vastinjanojen ja vastinkulmien yhtäsuuruudesta. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alasuhteesta loikataan sujuvasti yhdenmuotoisten kappaleitten tilavuussuhteeseen.

Kolmas luku käsittelee kolmioita. Luvun ensimmäinen virke ilmoittaa, että kolmion kärjet nimetään isoilla kirjaimilla aakkosjärjestyksessä vastapäivään. Käytäntöä ei ole helppo noudattaa kuvioissa, joissa on useita kolmioita. Kolmioiden yhtenevyys määritellään päällekkäin asettamisen kautta ja yhtenevyyslauseet todistetaan. Kolmioiden yhdenmuotoisuuden määritelmäksi esitetään vastinkulmien pareittainen yhtäsuuruus. Yhdenmuotoisuuskriteerien olemassaolo ilmoitetaan, mutta vain ”kk” mainitaan. Kolmion merkillisiä pisteitä luetellaan, mutta niiden perusteluja ei esitetä. PS-tietona annetaan kuitenkin Heronin kaava ja sanotaan, että se on ainoa tapa laskea kolmion ala tuntematta trigonometriaa. Kaava $A = \frac{1}{2}ah$ on edellisellä aukeamalla, joten ilmoitus saattaa ihmetyttää lukijaa.

Oma lukunsa on omistettu ”kulmien piirtämiselle harpilla ja viivaimella”. Lukijaa jää vaivaamaan ilmoitus ”Piirrettäessä suoralle normaali käytetään suorakulman puolittamista.”

Luvussa Suorakulmainen kolmio otetaan käyttöön sini, kosini ja tangentti. Määrittelyyn liittyvä suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuus otetaan huomioon. ”Muistikolmiotkin” tulevat loogisesti oikea-aikaisesti. Sinin ja kosinin määritelmän laajentaminen tylppiin kulmiin saa oman lukunsa, samoin sinilause ja kosinilause kumpikin. Monikulmioita käsittelevään lukuun on niputettu muutama pinta-alakaava ja muutama suunnikkaan ominaisuuden todistus (joista yhdessä viitataan minulle outoon ja kirjassa esittelemättömään ”sääntöön $(\mathrm{kks})_{\mathrm{k}}$”). Luvussa Ympyrä esitellään nimityksiä. Kehäkulmalauseen todistusta ei esitetä, sanotaan vain sen olleen todistettu jo Eukleideen aikana. Sen sijaan lauseen se erikoistapaus, jossa kehäkulman toinen kylki on halkaisija, esitetään esimerkkinä, jonka lähde on syksyn 1996 ylioppilaskirjoitus. Omituinen on myös resepti ympyrän kaaren pituuden laskemiselle: se saadaan ”laskemalla ensin koko ympyrä piiri, ja sitten yhtä astetta vastaavan kaaren pituus. Tämä kerrotaan keskuskulman suuruudella, jolloin saadaan keskuskulmaa vastaava kaari.”

11. luku vie taas kolmiulotteiseen maailmaan: se kertoo pallosta. Saamme mm. tietää, että ”Leikattaessa pallo kahteen osaan leikkauspinta on ympyrä” ja että ”Leveyspiiri tarkoittaa sitä kulmaa, joka muodostuisi käsiesi väliin, jos seisoisit maapallon keskipisteessä pitäen toisella kädellä kiinni päiväntasaajasta ja toisella kyseisestä leveyspiiristä”! Saman, ilmeisen huolimattomasti kootun luvun harjoitustehtävissä Tallinna sijoitetaan vain 50 km päähän Helsingistä. Ulkoluodolta ulkoluodolle saattaa näin ollakin, mutta Suurkirkon ja Tallinnan Raatihuoneen välimatkaksi voi laskea noin 82 km. Luvun 12 alkaa lieriön määritelmä. Calculuksen suoran sijasta Laudaturin lieriö syntyy janan liikkuessa avaruudessa suuntansa säilyttäen. Hyvä olisi nytkin hiukan rajoittaa lisää janan liikkumisvapautta. Seuraavassa luvussa kartiopinta syntyykin puolisuoran liikkeen tuloksena ja kartio sitten tasoleikkauksena. Kartiolla voi olla sivutahkoja, koska pyramidi on kartio, jonka sivutahkot ovat pohjaa lukuun ottamatta kolmioita.

Loppuun päästyään kirja alkaa alusta uudestaan. Olennainen asiasisältö on kirjoitettu – uusin laskuesimerkein höystettynä – parille kymmenelle sivulle. Takakannen sisäpuolella on ulos taitettava sivu, jossa on tärkeimpiä laskukaavoja ja mm. trigonometristen funktioiden määritelmät.

Laudatur olisi selvästi hyötynyt oppikirjatarkastuksesta. Se antaa vaikutelman innostuksen vallassa mutta hiukan lievällä itsekritiikillä kootusta paketista. Toivottavasti kirja saa uusia painoksia, joissa kummallisuuksia on vähemmän. Tekijöiden näkemys geometriasta laskentona tuskin poistuu.

Matematiikan taito

Matematiikan taito on ulkonaisesti konstailematon. Pienempi kirjasin ja tehokkaammin käytetty sivutila merkitsevät mahdollisuuksia runsaampaan asiasisältöön, vaikka kirjan sivumäärä on joukon toiseksi pienin. Harjoitustehtäviä on 443. Muista kirjoista poiketen myös todistusluonteisten tehtävien ratkaisuja tai ratkaisuvihjeitä on vastausluettelossa. Kirjan laskuesimerkit on esitetty suomen kielen kirjoitussääntöjen ja matematiikan käytänteiden mukaisesti, välimerkkejäkään unohtamatta.

Matematiikan taito jakaa aineksensa kuuteen lukuun. Ensimmäiseen lukuun, Tasogeometrian perusteita, on perusnimitysten ohessa liitetty sinin, kosinin ja tangentin määritelmät suorakulmaisessa kolmiossa; tarvittaviin yhdenmuotoisuustietoihin luvataan palata myöhemmässä luvussa. Lukuun on vielä sisällytetty keskeiset pinta-alakaavat.

Toisessa luvussa esitellään geometrista todistamista. Esimerkkinä todistetaan pari lausetta. Kolmion sivujen ja kulmien suuruusjärjestyslauseen todistus – niin kuin moni muukin alkeisgeometrian lause – nojaa olennaisesti *pons asinorumiin*, lauseeseen tasakylkisen kolmion kantakulmista. Matematiikan taito lupaa todistaa lauseen aikanaan ja ilmoittaa sen tässä yhteydessä aksioomaksi.

Kolmas luku, Yhtenevyys, alkaa määrittelemällä kaksi kuviota yhteneviksi, kun ne ovat ”samanmuotoiset ja samankokoiset”. Yhtenevyyden perustaminen kuvioiden toinen toisensa peittämiseen torjutaan, mutta seuraavassa kappaleessa kuvion vastinosat määritellään kuitenkin juuri päällekkäin asettelun avulla. Kolmioiden yhtenevyyslauseet esitetään ja niiden sovelluksena todistetaan mm. edellä mainittu tasakylkisen kolmion kantakulmalause. Matematiikan taidon todistusesimerkit on varustettu eräänlaisin todistuksen rakennetta osoittavin kulkukaaviokuvioin. Lukijalle ei heti selviä, miksi kuvion laatikkojen sisältämät relaatiot on toisinaan varustettu kysymysmerkein. Luku ei aivan radikaalisti poikkea perinteisestä deduktiivisesta geometrian käsittelystä.

Kirjan neljäs luku käsittelee yhdenmuotoisuutta. Yhdenmuotoisuus määritellään monikulmioille: vaatimus on vastinsivujen verrannollisuus ja vastinkulmien yhtäsuuruus. Yhdenmuotoisuus laajennetaan erikseen koskemaan ympyrää – koska ympyrä on monikulmion rajatapaus. Kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet luetellaan kaikki ja niiden sisältö osoitetaan kuvioiden avulla. Merkillisiä pisteitä koskevia lauseita todistetaan. Korkeusjanoja koskeva lykätään kuinekin analyyttisen geometrian kurssiin.

Luku vinokulmaisen kolmion trigonometriasta alkaa suunnatun kulman määritelmällä ja esittää sinin ja kosinin määritelmän koordinaatistoympyrän avulla negatiivisillekin kulmille. Useampia kierroksia origon ympäri ei kuitenkaan tehdä. Sinilauseelle esitetään myös täydennys, joka koskee kolmion ympäri piirretyn ympyrän sädettä.

Viimeisen luvun aiheena on avaruusgeometria. Tason normaalisuora määritellään tason kaikkia suoria vastaan kohtisuorana. Monitahokkaisiin liittyviä käsitteitä esitellään verrattain seikkaperäisesti. Särmiöt ja pyramidit esitellään monitahokkaina, ei lieriöinä tai kartioina. Lieriön ja kartion määritelmässä liikutellaan suoraa pitkin käyrää, ehkä hiukan täsmällisemmin kuvattuna kuin Laudaturissa tai Calculuksessa. Lukuun kuuluu tietysti erinäisten mittalukukaavojen esittely. Myös yhdenmuotoisuutta kolmessa ulottuvuudessa sivutaan, tilavuuksien suhteen kaavan perustelemiseksi.

Samoin kuin Laudatur, Matematiikan taito päättää esityksen kertaukseen. Se on tiivis, vain kuusisivuinen, eikä sisällä laskettuja esimerkkejä. Matematiikan taidon erikoisuus on pieni suomalais-englantilainen sanakirja. Vaikkapa internetistä lisätietoa hakevalle saattaisi englantilais-suomalaisesta sanastosta olla enemmän iloa. Sanastossa on sanoja, joita ei kirjassa esiinny, kuten homotetia.

Matematiikan taito on kirjoista selvästi kunnianhimoisin. Se tavoittelee selvästi ”vanhan hyvän ajan” oppikirjan ilmettä. Opetussuunnitelma ja aikakehys eivät oikein anna tätä tavoitetta saavuttaa. Ainakin minusta Matematiikan taito oli vertailtavista kirjoista miellyttävin lukea.

Pitkä matematiikka

Pitkä matematiikka on typografisesti melko konstailematon. Turhia kuvia ei ole, mutta ruskeankeltaisen vihertävää ja liukusävytettyä pohjaväriä käytetään runsaasti. Laskuesimerkit esitetään useimmiten välimerkittömällä taulutekniikalla, mutta muutama suomenkielen mukaisesti esitetty esimerkki on päässyt mukaan. Laskutehtävien algebra esitetään tuskastuttavakin seikkaperäisesti: jopa saman symbolin supistaminen jakolaskussa on erikseen osoitettu värillisin päällepainantein. Harjoitustehtäviä on 478. Ne on luokiteltu kahteen tasoon ”perustehtäviä” ja ”perustehtäviä ja vaativampia tehtäviä”. Myös perusteluja kysyviin tehtäviin annetaan ainakin vihjeitä vastausluettelossa. Myös numeeristen tehtävien ratkaisuihin annetaan ohjeita, toisin kuin muissa kirjoissa. Pitkä matematiikka pelaa avoimin kortein: heti alkuun on kopioitu Lukion opetussuunnitelman perusteista kurssin kannalta relevantit osat.

Kirjan ainesta ei ole muiden vertailtavien teosten tavoin kirjattu numeroituihin lukuihin. Sisällysluettelossa on 18 asiaotsikkoa. Pitkä matematiikka tukeutuu muita kirjoja selvemmin perusopetuksessa saatuun oppiin. Niinpä se käy suoraan käsitteeseen kulma, ilman pisteen, suoran, aksiomatiikan tai muun taustan esittelyä. Yhtenevyydelle Pitkä matematiikka ei uhraa sanaakaan. Yhdenmuotoisuuden määritelmä perustetaan suoraan yhdenmuotoisuuskuvauksiin, siirtoon, kiertoon, suurentamiseen, pienentämiseen tai peilaamiseen. Mitä nämä taas ovat, jätetään kertomatta! Vastinosien määritteleminen on joka tapauksessa nyt yksinkertaista. Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta mainitaan ”kk”-kriteeri. Yhdenmuotoisten kuvien alojen suhde perustellaan kuvioiden tyhjentämisellä suorakaiteiden avulla.

Suorakulmaisen kolmion trigonometriajakson alussa otetaan huomioon sinin, kosinin ja tangentin hyvän määrittelyn vaatima yhdenmuotoisuus. Pitkä matematiikka antaa monin paikoin alaviitteissä varsinaista tekstiä täydentävää tietoa. Pitkän matematiikan lukija on kuvitelluista kirjankäyttäjistä ainoa, joka saa tietää, että on olemassa myös trigonometriset funktiot sekantti ja kosekantti. Sinin ja kosinin määritelmä laajennetaan tylppiä kulmia koskevaksi. Tässä ja muissakin yhteyksissä Pitkä matematiikka opastaa lyhyesti laskimen oikeaan käyttöön. Sinilause ja kosinilause saavat kumpikin omat kappaleensa. Ainoana vertailun kirjoista Pitkä matematiikka perustelee sinilauseen laskemalla kolmion korkeusjanan kahdella tavalla – muut kirjat laskevat kolmion alaa, mikä on jonkin verran kerroksellisempi päättelyn tapa.

Ympyrän geometriaa käsitellään Ympyrä-, Ympyrän tangentti- ja Kehäkulma-nimisissä jaksoissa. Tangentin ominaisuudet esitetään ilmoitusasioina, mutta kehäkulmalauseelle esitetään todistus. Tasakylkisen kolmion kantakulmalausetta käytetään luonnollisesti hyväksi ilman, että asiaan kiinnitettäisiin huomiota. Lausetta ei sinänsä kirjassa olekaan.

Avaruusgeometrian osuus ei sisällä yleisiä pohdiskeluja tasoista ja suorista, vaan alkaa suoraan suorakulmaisen särmiön käsittelyllä. Tasoista ja suorista ja niihin liittyvistä kulmista on kuitenkin esitys otsikon Kulma avaruudessa alla myöhemmin. Pallosta esitetään sekä mittalukuja että maantieteellinen tulkinta. Lieriö ja kartio muodostetaan käyrää pitkin liikkuvan suoran avulla, prismat ja pyramidit erikoistapauksina. Kirjan päättää tyylikkäästi – niin kuin Eukleideen Alkeetkin – katsaus säännöllisiin monitahokkaisiin. Pitkässä matematiikassa tämä tapahtuu viimeisessä harjoitustehtävässä. Laudaturin tapaan Pitkä matematiikkakin tiivistää sanottavansa 20-sivuiseen kertausosastoon, jossa on myös lisää laskettuja esimerkkejä.

Pitkän matematiikan lopussa on vielä aukeaman mittainen sanasto, jossa on 38 hakusanaa.

Pitkä matematiikka ei ole geometrian esittelyssään erityisen kunnianhimoinen. Kirjaa lukee kuitenkin luottavaisin mielin: se vaikuttaa ammattitaitoisesti tehdyltä.

Pyramidi

Pyramidi on värikäs. Tekstiä korostetaan sekä keltaisin että kevyesti vihertävänharmain pohjin, lukujen numerot ovat valkoisia karmiinilla pohjalla ja kuvioissa on eri värejä. Kirjassa on vielä aika suurikokoisiakin mustavalkoisia karikatyyrinomaisia piirroksia ja yksi ei kovin tiukasti asiaan liittyvä värivalokuva, yhden kirjan tekijän Thaimaan-matkalta kameraan jäänyt. Harjoitustehtäviä on 331, mikä on vertailun kirjojen pienin määrä. Vain numeeriset vastaukset on esitetty vastausluettelossa. Pyramidi esittää laskuesimerkit "taulutekniikalla", laskujen algebralliset välivaiheet tarkkaan läpikäyden.

Kirja alkaa lyhyellä historiallisella johdannolla, jossa mainitaan antiikin kolme vaikeaa konstruktio-ongelmaa. Varsinainen asia esitetään kymmenessä luvussa, jotka on vielä jaettu yleisotsikoiden Tasogeometria ja Avaruusgeometria alle. Ensimmäisessä Tasogeometrian peruskäsitteitä -luvussa on omana osastonaan janan jakosuhteen käsittely. Luvussa Monikulmiot esitetään mm. lauseke n-kulmion lävistäjien lukumäärälle ja toisaalta peruspinta-alakaavat sekä kolmion merkillisten pisteiden ja suunnikkaiden faktat ilman todistuksia.

Ympyrää käsittelevä luku motivoi asiaa yllättävästi taitoluistelijan pakollisten kuvioiden kautta. Heti päästään kuitenkin nimityksiin ja laskukaavoihin. Kehäkulmalause seurauksineen esitetään todistuksetta. Sen sijaan Hippokrateen puolikuiden ominaisuus todistetaan.

Yhtenevyyttä ja yhdenmuotoisuutta käsitellään samassa luvussa. Yhtenevyys määritellään samanlaisella nostetaan itseä hiuksista -tempulla kuin yhdenmuotoisuus Pitkässä matematiikassa: "Kuviot K ja K' ovat yhtenevät, kun kuviosta K saadaan kuvio K' yhdellä tai useammalla yhtenevyyskuvauksella (siirto, kierto ja peilaus)". Kolmioiden yhtenevyyteen riittävät kuitenkin yhtenevyyskriteerit, jotka esitetään huolellisesti. Yhtenevyyslauseiden seurauksista todistetaan muutamia esimerkkeinä. Näiden joukossa on myös tasakylkisen kolmion kantakulmalause. Yhdenmuotoisuuden määritelmä perustetaan vastaavasti yhdenmuotoisuuskuvauksiin. kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet esitellään kaikki. Ja vaikka tasogeometrian otsikon alla mennään, ilmoitetaan myös yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuussuhdekerroin.

Luku Kolmion ratkaiseminen alkaa Pythagoraan lauseesta ja tuo kolme trigonometrista funktiota suorakulmaisen kolmion avulla, ilman varoittelua yhdenmuotoisuuden tarpeesta. Trigonometriset funktiot tulevat Pyramidissa vastaan huomattavasti myöhemmin kuin muissa kirjoissa. Pyramidi ei myöskään näe vaivaa fuktioiden arvojen laajentamiseksi tylpille kulmille. Kaavat $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ ja $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ annetaan ilmoitusasioina. Kirja ei käytä termiä muistikolmio. Muista kirjoista poiketen Pyramidi esittelee ensin kosinilauseen ja vasta sitten sinilauseen.

Avaruusgeometriaosuus alkaa tasojen ja suorien suhteiden tarkastelulla ja siirtyy kohta monitahokkaisiin ja Platonin kappaleisiin. Lieriö ja kartio määritellään melko selkeästi, mutta samalla tavalla suoraa liikuttaen kuin muissakin kirjoissa. Prismat käsitellään lieriöinä ja pyramidit kartioina. Pallon esittely on lyhyt ja asiallinen.

Varsinaisen tekstin jälkeen Pyramidissa on 30 sivun mittainen Lisätietoa-osasto. Se alkaa epäeuklidisen geometrian esittelyllä ja Beltramin ja Kleinin mallin kuvailulla. Sitten seuraakin katsaus piirtämiseen harpilla ja viivoittimella, pinta-alan tarkempi käsittely, ympyränmitannon perustelua ympyrän sisään piirretyn monikulmion sivun pituuden laskemisen kautta. Yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuskuvaukset esitellään ja kolmioiden yhtenevyyslauseet perustellaan niiden avulla. Ongelmaa, joka syntyy siitä, että yhtenevyyskuvausten määrittely – jos se halutaan osaksi geometrian järjestelmää – vaatii yhtenevyyslauseisiin perustuvaa tietoa, ei kuitenkaan pohdita. Monikulmion kulmien summalauseelle esitetään varsin hieno, yleisen monikulmion tapaukseen käyvä todistus. Kolmion merkillisiä pisteitä koskevat lauseet todistetaan samoin kuin kehäkulmalause. Avaruusgeometrian puolelta todistetaan vielä tason normaalisuoraa koskeva peruslause.

Liiteosa tekee Pyramidista kaksijakoisen. Varsinainen tekstiosa on samaan tapaan kuin Calculus, Pitkä matematiikka tai Laudatur laskennollisesti orientoitunut, mutta loppuosa kertoo geometriassa olevan matematiikkaakin, ja paljon.