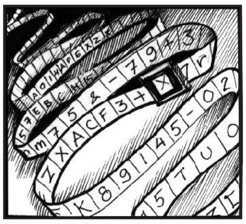

Alabaman paradoksi

Pekka Alestalo
Teknillinen korkeakoulu

Kevään eduskuntavaalien jälkitunnelmissa heräsi jälleen keskustelu vaalipiireistä ja siitä, kuinka helppoa tai vaikeaa ehdokkaan on päästä läpi kustakin piiristä. Erityistä huomiota kiinnitti Vihreän liiton kohtalo Pohjois-Karjalan vaalipiirissä, jossa puolueen kannatus kasvoi edellisistä eduskuntavaaleista 5,1 %-yksikköä, mutta se menetti ainoan edustajansa. Tätä ei tietenkään voida laskea pelkästään ”vaalimatematiikan” syyksi, sillä edellisten vaalien vaaliliiton sijasta puolue oli tällä kertaa yksinään.

Vaikka tämä kuuluisa vaalimatematiikka perustuu vain ala-asteella opittuihin laskutoimituksiin ja yksinkertaiseen prosenttilaskentaan, siihen liittyy ennalta arvaamattomia piirteitä. Tämän kirjoituksen tarkoituksena ei ole esittää kattavaa analyysiä erilaisista vaalijärjestelmistä, eikä edes Suomessa käytetystä d’Hondtin vaalitavasta. Yritän sen sijaan kuvailla, millaisia yllätyksiä liittyy jopa ”alkeellisimpiin” vaalitapoihin. Vaalimatematiikan historiassa tämä tunnetaan nimellä Alabaman paradoksi, koska asia tuli esille kyseisen Yhdysvaltain osavaltion kohdalla yli sata vuotta sitten; katso 1. linkki kirjoituksen lopussa.

Ehdokkaiden kannatuksen sijasta tarkastellaan koko vaalipiirijaon keskeisintä kysymystä: Kuinka monta edustajapaikkaa kullekin vaalipiirille pitäisi antaa? Lähtökohtana on se, että ainoastaan vaalipiirin asukasluku voidaan ottaa näissä päätöksissä huomioon, sillä muuten järjestelmän demokraattisuutta voidaan pitää kyseenalaisena. Esimerkiksi Yhdysvaltain perustuslaissa sanotaan yksiselitteisesti, että edustajainhuoneen paikkamäärien täytyy olla verrannollisia osavaltioden asukaslukuihin.

Oletetaan, että maassa on viisi vaalipiiriä, joiden asukasmäärät ovat A $= 9\,061$, B $= 7\,179$, C $= 5\,259$, D $= 3\,319$ ja E $= 1\,182$, jolloin koko maan asukasluvuksi saadaan tasan $26\,000$; nämä luvut ovat peräisin lopussa mainitusta artikkelista Balinski & Young, 1975. Tilanteen yksinkertaistamiseksi oletetaan vielä, että koko maasta valitaan 26 edustajaa, yksi kutakin $1\,000$ kansalaista kohti. Jos ryhdymme näiden lukujen perusteella miettimään paikkajakoa vaalipiirien kesken, niin tuntuu luonnolliselta laskea asukaslukuja vastaava suhteellinen paikkaluku kullekin vaalipiirille. Vaalipiirille A kuuluisi siis

$$\frac{9061}{26000} \cdot 26 = 9{,}061$$

paikkaa, ja muille 7,179, 5,259, 3,319, 1,182 paikkaa. Ongelmaksi muodostuu se, mitä tehdään tulosten murto-osille: edustajia ei voi jakaa edes kahtia, saati sitten tuhannesosiin! Murto-osat voitaisiin ehkä hyvittää muuttamalla vaalipiirin edustajien lukumäärää sopivassa kohdassa kesken vaalikautta, mutta tietääkseni näin ei ole missään tehty, vaan murto-osat on pyritty muuntamaan kokonaisiksi paikoiksi tietyille vaalipiireille.

Eräs suoraviivainen tapa on pyöristää kaikki paikat ensin alaspäin, ja jakaa jäljellä olevat paikat suurimman desimaaliosan mukaisessa järjestyksessä. Esimerkissämme saadaan pyöristyksen jälkeen paikkamäärät 9, 7, 5, 3 ja 1, jolloin yksi paikka jää jäljelle. Se annetaan siis vaalipiirille D, jonka desimaaliosa 0,319 on suurin. Näin kaikki paikat saadaan jaettua. Tämä menetelmä on peräisin Yhdysvaltain historiasta tutulta Alexander Hamiltonilta, ja se kantaa hänen nimeään.

Millaisia ominaisuuksia Hamiltonin menetelmällä on? Ensimmäinen havainto on se, että jokaisen vaalipiirin lopullinen paikkamäärä saadaan pyöristämällä suhteellinen paikkaluku joko alas- tai ylöspäin lähimpään kokonaislukuun, sillä kukin vaalipiiri voi saada korkeintaan yhden lisäpaikan desimaalikilpailussa.

Tehtävä 1. Perustele tämä väite osoittamalla, että ylimääräisiä paikkoja jää aina vaalipiirien lukumäärää vähemmän.

Muita ominaisuuksia tutkittaessa yksi luonnollinen ehto voisi olla seuraava: jos väkiluvut pysyvät samoina, mutta edustajien yhteismäärää kasvatetaan, niin minkään vaalipiirin paikkamäärä ei saa pienentyä. Matematiikko voisi sanoa, että menetelmä on kasvava paikkojen yhteismäärän suhteen, muttei kuitenkaan aidosti kasvava. Huolimattomasti ajatellen tämä ominaisuus näyttäisi olevan voimassa, mutta tarkempi miettiminen paljastaa ongelman: jos desimaalilukuja kerrotaan keskenään, niin tuloksen desimaaliosaan vaikuttavat desimaaliosien lisäksi myös kokonaisosat. Tämä ilmenee esimerkiksi laskussa

$$2{,}1 \cdot 3{,}2 = 6 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2.$$

Varsinaisessa esimerkissämme sama ilmiö esiintyy, kun verrataan vaalipiirejä B ja D, ja koko maan paikkamäärää kasvatetaan luvusta 26 lukuun 27:

$$\text{B: } \frac{7179}{26000} \cdot 27 \approx 7{,}455; \quad \text{D: } \frac{3319}{26000} \cdot 27 \approx 3{,}447.$$

Käytännössä siis vaalipiiri B vie vaalipiiriltä D desimaalikilpailun tuoman paikan, sillä kaikki kokonaisosat pysyvät samoina!

Tehtävä 2. Laske kaikkien vaalipiirien luvut ja tarkista, että näin todella käy.

Tulos on yllättävä: Hamiltonin menetelmä ei olekaan kasvava koko maasta valittavien edustajien määrän suhteen. Toisaalta koko maan edustajien lukumäärää ei ole tapana vaihtaa kovin usein, joten voisi ajatella, ettei ongelma ole kovin vakava. Se herättää kuitenkin seuraavan kysymyksen:

Onko olemassa menetelmää, joka toteuttaisi seuraavat kaksi ehtoa:

- Suhteelliset paikkamäärät pyöristetään joko alas- tai ylöspäin seuraavaan kokonaislukuun.
- Jos asukasluvut pysyvät samoina ja koko maan paikkamäärää kasvatetaan, niin yhdenkään vaalipiirin paikkamäärä ei vähene.

Lisäksi paikkajako pitäisi suorittaa jollakin etukäteen päätetyllä menetelmällä (algoritmilla). Hamiltonin menetelmä rikkoo jälkimmäistä sääntöä, ja – niin uskomattomalta kuin se kuulostaakin – voidaan osoittaa, ettei ole olemassa sellaista menetelmää, joka toteuttaisi molemmat ehdot!

Kuten alussa totesin, en ryhdy vertailemaan Hamiltonin menetelmän korvanneita muita tapoja. Historiallisena yksityiskohtana voidaan kuitenkin mainita, että siirtyminen Hamiltonin menetelmästä ns. Jeffersonin menetelmään aiheutti Yhdysvaltain v. 1876 presidentinvaaleissa sen, ettei valituksi tullutkaan koko maassa neljännesmiljoonan äänen marginaalilla suosituin Samuel Tilden, vaan valitsijamiesten vaalipiirijaon perusteella voittanut Rutherford B. Hayes.

Alla mainittujen linkkien ja kirjallisuusviitteiden avulla asiasta kiinnostuneet voivat tutustua yleisesti käytössä oleviin menetelmiin, joissa ym. ongelmien lisäksi vaalipiirin asukasluvun kasvaminen pienentää sen saamaa paikkamäärää, tai puolueen saamat lisä-äänet vähentävät sen edustajien määrää. Viimeisenä mainittussa Hoffmanin kirjassa aihetta käsitellään hyvin yleistajuisesti.

Linkkejä:

http://www.ctl.ua.edu/math103/apportionment/paradoxs.htm
http://www.ams.org/featurecolumn/archive/apportion1.html
http://www.ams.org/featurecolumn/archive/apportionII1.html
http://www.wahlrecht.de/
http://www.uusikaupunki.fi/~olsalmi/vaalit/vaalimat.html
http://de.wikipedia.org/wiki/Unmöglichkeitssatz_von_Balinski_und_Young

Kirjallisuutta:

Michel Balinski, H. Peyton Young: The Quota Method of Apportionment. American Mathematical Monthly 82, 701–30, 1975.

Michel Balinski, H. Peyton Young: Fair representation: meeting the ideal of one man, one vote. Brookings Institution Press, 2. painos, 2001.

Paul Hoffman: Archimedes' Revenge. Penguin Books, 1988.