



Mercatorin kartta

Antti Rasila

Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Matematiikasta yleistajuisesti kirjoittamisen tekee usein haasteelliseksi konkreettisten esimerkkien ja sovellusten puute, käsitteiden abstraktius sekä se, että lukijalla vain harvoin on aikaisempaa kokemusta kirjoituksessa käsiteltävistä asioista. Arkipäivän matematiikkaa esittelevät kirjoitukset keskittyvät yleensä kauppalaskujen kaltaisiin yksinkertaisiin sovelluksiin, jotka eivät ole matemaattisina ongelmina mielenkiintoisia.

Tässä kirjoituksessa tarkoituksenani on kertoa Mercatorin kartasta, jonka uskoisin olevan entuudestaan tuttu jokaiselle lukijalle. Se on maailmankartta, joka löytyy jokaisesta koulun maantiedonkirjasta. Aikanaan Mercatorin kartta mullisti merenkulun. Se on auttanut laivoja, lentokoneita ja valloitusarmeijoita löytämään perille vuosisatojen ajan. Eräille tämä kartta on eurooppalaisen hegemonian ja kolonialismin ajan ajattelutavan symboli. Jotkin maat ovat kieltäneet sen käytön kouluissa. Lisäksi Mercatorin kartta on puhtaan matematiikan kannalta mielenkiintoinen konstruktio ja sisältää lukuisia geometrisen funktioteorian ja differentiaaligeometrian keskeisistä ajatuksista. Hämmästyttävintä on, että kartta on peräisin vuodelta 1569, ajalta ennen differentiaali- ja integraalilaskentaa ja Descartesin analyyttistä geometriaa.

Oma kiinnostukseni Mercatorin karttaan heräsi kuul-

tuani aiheesta tieteellisessä konferenssissa pari vuotta sitten. Aihe ei esiinny maantiedon koulukursseissa – ehkä siksi, että se on matemaattisesti liian vaativa – eikä myöskään matematiikan kurseissa koulussa tai yliopistossa. Maanmittauksen alan kirjat esittävät konstruktion lopputuloksena olevan kaavan mutta eivät itse konstruktiota. Tämä on mielestäni vahinko, koska kartta on eräs parhaista esimerkeistä, jossa deduktiivista matemaattista päättelyä voidaan käyttää konkreettisen ja maallikollekin helposti esitettävän ongelman ratkaisemiksi. Konstruktio toimii myös havainnollisen johdantona moniin matemaattisiin ilmiöihin, kuten derivaataan, differentiaaliyhtälöihin, konformikuvauksiin, Riemannin pintoihin ja epäeuklidiseen geometriaan.

Kartan piirtämisestä

Ihanteellisessa tapauksessa maailmankartta olisi isometrinen. Tämä tarkoittaa sitä, että kartalla mitatut etäisyydet vastaavat mittakaavan suhteessa suoraan etäisyyksiä maastossa. Maapallon pyöreystä johtuen tällaisen kartan laatiminen on todellisuudessa mahdollista, paitsi tietenkin pallokarttana.

Koska pallokartat ovat epäkäytännöllisiä, tässä tarkastellaan ainoastaan tasoon piirrettyjä karttoja. Isometrisen kartan mahdottomuus voidaan havaita ajattele-

malla pallon pinnalle piirrettyä ympyrää ja sen sädettä. Tässä keskipisteen oletetaan olevan myös pallon pinnalla. Tasossa ympyrän säteen ja kehän pituuden suhde on 2π . Kartan oletetusta isometrisyydestä johtuen saman tulisi siis olla totta myös pallon pinnalla, kun kahden pisteen välinen etäisyys ymmärretään lyhimmän pallon pinnalla olevan polun pituutena. Pallon pinnalla kuitenkin suhde on aina eri, vääristymisen suuruus riippuu ympyrän säteestä. Siksi tasoon piirretty kartta kuvaa aina pallon pinnan osaa jossakin mittasuhteita vääristävässä karttaprojektiossa, vaikka karttoihin liittyvästä käsitteestä mittakaava voisikin päätellä toisin. Virheen suuruus riippuu kartalla esitettävän alueen laajuudesta. Monissa karttaprojektioissa, mm. Mercatorin projektiossa, navat sijaitsevat ”äärettömän kaukana” mistä tahansa muusta pisteestä.

Gerardus Mercator

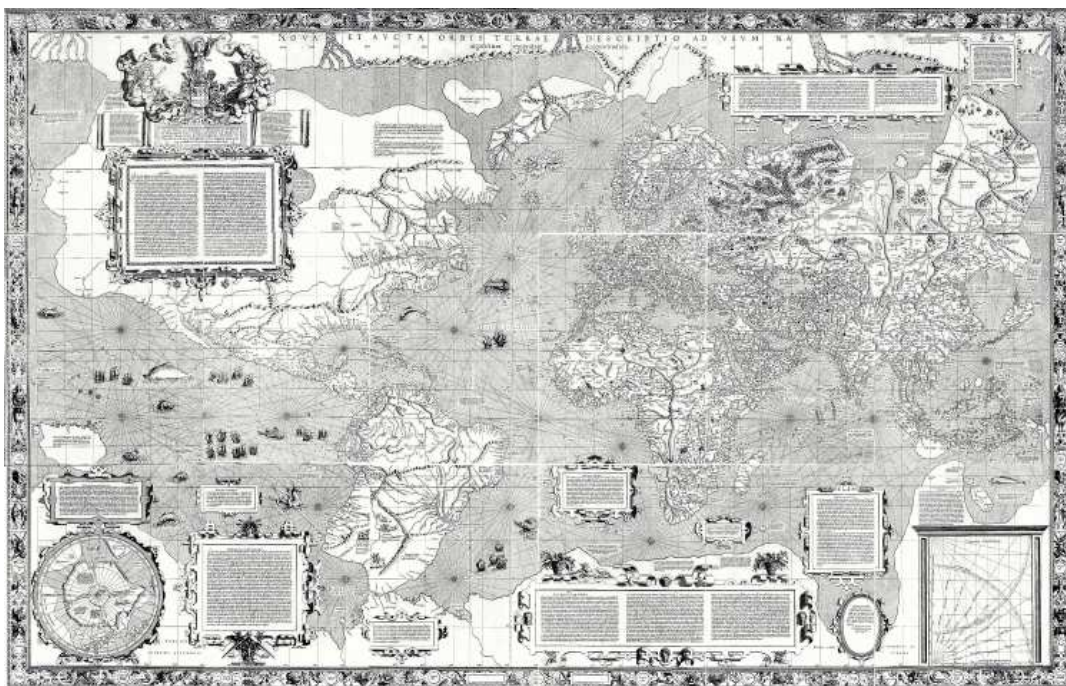
Gerard Kremer (5.3.1512 – 2.12.1594) syntyi Rupelmondessa, lähellä Antwerpeniä. Hänen vanhempansa olivat saksalaisia kauppiaita, jotka olivat paenneet Flanderiin uskonsotia ja protestantteihin kohdistuneita vainoja. Monien aikansa oppineiden tavoin hän latinisoi nimensä, ja se tunnetaan paremmin muodossa Gerardus Mercator. Mercator opiskeli Leuvenin yliopistossa kuuluisan humanistin ja näytelmäkirjailijan Macropeidiuksen oppilaana.

Hän kuitenkin pettyi teologian ja filosofian opintoihin, joiden tarjoamat selitykset eivät hänen mielestään tyydyttävällä tavalla kuvanneet maailmaa. Mercator mat-

kusteli laajasti, mutta palasi kuitenkin takaisin Leuveniini, tällä kertaa aikakauden johtavan matemaatikon ja tähtitieteilijän Gemma Frisiuksen oppilaaksi. Frisiuksella oli muitakin kuuluisia oppilaita, kuten tähtitieteilijä Johannes Stadius ja myös okkultistina tunnettu Englannin kuningatar Elisabet ensimmäisen neuvonantaja John Dee. Frisiuksen mukaan on myös nimetty kraateri Kuussa.



KUVA: Gerardus Mercator (lähde: Wikipedia).



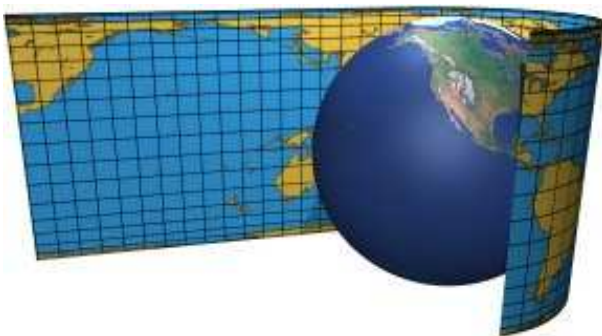
KUVA: Mercatorin maailmankartta vuodelta 1569 (lähde: Wikipedia).

Mercator perehtyi karttojen valmistamiseen työskennellessään Frisiuksen oppilaana, joka oli tehnyt monia merkittäviä alaan liittyviä keksintöjä, kuten kolmiomittauksen sekä menetelmän pituuspiirin määrittämiseksi, kun kellonaika tunnetaan tarkasti. Ensimmäinen Mercatorin itsenäisesti valmistama kartta on vuodelta 1537 ja esittää Palestiinaa. Tätä seurasivat maailmankartta (1538) ja Flanderin kartta (1540). Vuonna 1544 Mercator sai tuomion kerettiläisyydestä, syynä tähän hänen runsas matkustelunsa sekä protestanttiset näkemyksensä. Seuraavat seitsemän kuukautta kuluivat vankilassa.

Vuonna 1554 Mercator muutti Duisburgiin, syitä tähän ei tiedetä. On arveltu, että hän saattoi lähteä Alankomaista uskonnollisista syistä, tai hän oli kuullut suunnitelmista uuden yliopiston perustamiseksi. Mercator opetti matematiikkaa Duisburgin yliopistossa ja samalla kehitti uutta karttaprojektiota. Vuonna 1569 hän julkaisi merkittävimmän työnsä, kuuluisan maailmankartan *Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigatium Emendate*, uusi ja tarkka maapallon esitys käytettäväksi merenkulussa. Mercator otti myös käyttöön sanan atlas merkitsemään useista lehdistä muodostettua karttaa, jonka lehdet yhdessä muodostavat kolmiulotteisen avaruuden pinnan esityksen. Vaikka sanalla nykyään tarkoitetaan usein mitä hyvänsä karttakirjaa, sitä käytetään edelleen (lähes) alkuperäisessä merkityksessä Riemannin pintojen teoriassa ja yleisemmin differentiaaligeometriassa.

Sylinteriprojektio

Sylinteriprojektioiksi kutsutaan sellaista karttaprojektiota, jossa leveyspiirit kuvautuvat kartalla vaakasuoriksi viivoiksi ja pituuspiirit pystysuoriksi viivoiksi. Esimerkki sylinteriprojektioista on keskisyylinteriprojektio, joka saadaan kuvaamalla pallon pinnalla olevat pisteet pallon keskipisteen kautta piirrettyä suoraa pitkin palloa sivuavan lieriön pinnalle ja lopuksi levittämällä lieriö auki. Keskisyylinteriprojektio ei kuitenkaan ole Mercatorin projektio.

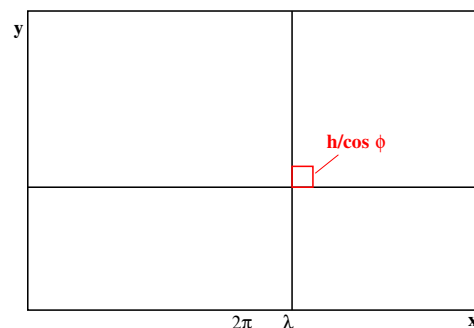
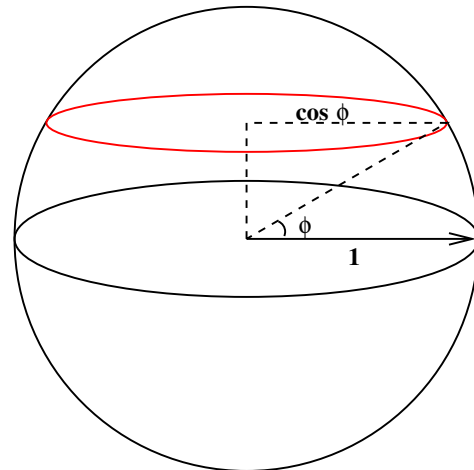


KUVA: Sylinteriprojektio (lähde: Carlos Furuti <http://www.progonos.com/furuti/>).

Mercatorin projektio on *konforminen*, eli se säilyttää kahden käyrän välisen kulman niiden leikkauspisteessä. Se on ainoa konforminen sylinteriprojektio. Tämä ominaisuus on hyödyllinen karttaprojektioilla, koska tällöin kartalta tehdyt mittaukset vastaavat maastosta mitattuja suuntia. Koska pituus- ja leveyspiiri on mahdollista selvittää mittaamalla taivaankappaleiden korkeuksia, ja suunta kompassia käyttämällä, se soveltuu erittäin hyvin navigointiin.

Mercatorin projektion konstruktio

Mercator ei esittänyt karttaprojektioilleen matemaattista selitystä. Vuonna 1599 englantilainen matemaatikko Edward Wright keksi miten projektio tehdään matemaattisesti. Tarkastellaan pientä tonttia, jonka eteläraja on leveyspiirillä ϕ . Tontin rajat ovat pituus- ja leveyspiirien suuntaiset ja sekä länsi- että etelärajan pituus on h . Jotta Mercatorin projektio voisi toimia, on tontin kuvan kartalla oltava neliö. Merkitään tontin länsirajan pituuspiiriä λ :lla.



KUVA: Mercatorin karttaprojektion konstruktio.

Merkitään kuvapistettä (x, y) ja valitaan $x = \lambda$. Jäljelle jää laskea miten saadaan y . Geometrisesti voidaan päätellä (ks. kuva), että leveyspiiriä ϕ vastaava venytys

karttaprojektiossa on $1/\cos\phi$. Siis tontin, jonka leveys on h , leveys kartalla on $h/\cos\phi$. Siksi myös korkeuden on oltava $h/\cos\phi$.

Selvästi kuvapisteen y -koordinaatti riippuu vain leveyspiiristä ϕ . Voidaan siis merkitä $y = F(\phi)$, missä F on aidosti kasvava funktio. On selvitettävä mikä F on. Tontin kuvasta kartalla saatiin yhtälö, joka voidaan kirjoittaa F :n avulla

$$F(\phi + h) = F(\phi) + h/\cos\phi,$$

eli

$$\frac{F(\phi + h) - F(\phi)}{h} = \frac{1}{\cos\phi}.$$

Kun $h \rightarrow 0$, saadaan $F'(\phi) = 1/\cos\phi$. Kiinnittämällä päiväntasaajan kuva kartalla tasolle $y = 0$, saadaan y -koordinaatille kaava

$$F(\phi) = \int_0^\phi \frac{dt}{\cos(t)}. \quad (1)$$

Valittavasti geometrinen konstruktio tehtiin ennen differentiaali- ja integraalilaskentaa, ja integraalia (1) ei osattu laskea, vaikka se nykyään onkin peruskursitasoa. Integraalin likiarvoja julkaistiin taulukkoina käytettäväksi merenkulussa. John Napier keksi vuonna 1614 logaritmifunktion, ja 1620 julkaistiin trigonometristen funktioiden logaritmeja sisältänyt taulukkokirja. Taulukkokirjoja tutkiessaan Henry Bond huomasi satumalta 1640, että

$$\int_0^\phi \frac{dt}{\cos(t)} = \ln(\tan(\phi/2 + \pi/4)).$$

Tämän tuloksen todistaminen säilyi kuitenkin avoimena ongelmana aina vuoteen 1668, jolloin James Gregory julkaisi sille (erittäin monimutkaisen) todistuksen. Mercatorin projektio voidaan siis määrittellä kaavalla

$$(x, y) = (\lambda, \ln(\tan(\phi/2 + \pi/4))),$$

missä ϕ on pallon pinnalla olevan pisteen leveyspiiri ja λ sen pituuspiiri.

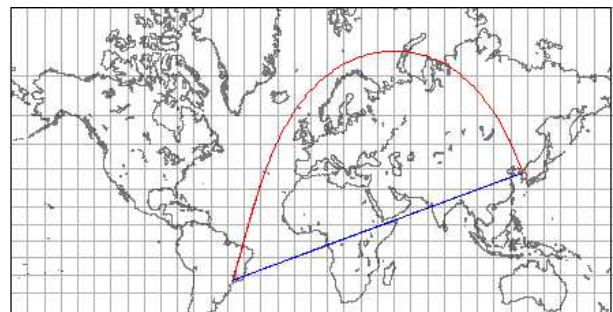
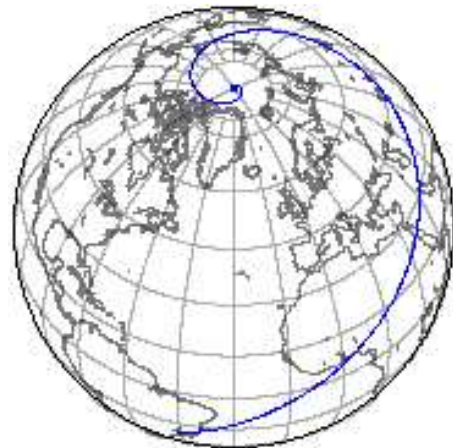
Loksodromit

Loksodromi on käyrä, joka syntyy edettäessä johonkin kiinnitettyyn kompassisuuntaan. Loksodromi kohtaa jokaisen pituuspiirin samassa kulmassa. Mercatorin projektiossa suorat kartalla vastaavat loksodromeja. Loksodromin idean keksijä on portugalilainen matemaatikko Pedro Nunes (1502–1578).

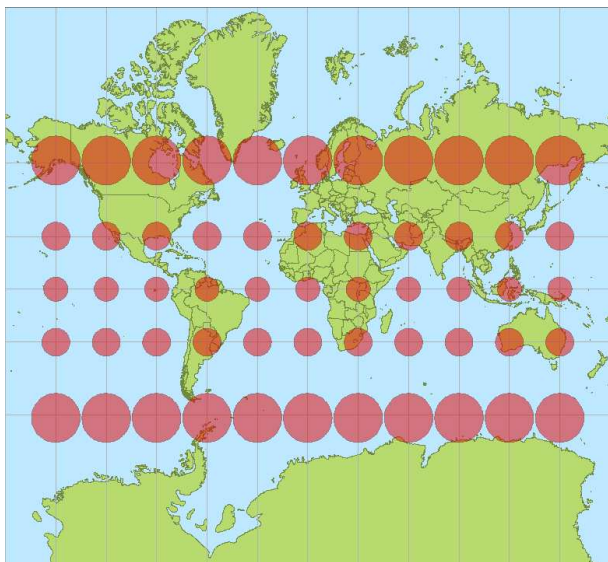


KUVA: Pedro Nunes kuvattuna portugalilaisessa postimerkissä (lähde: Wikipedia).

Loksodromit ovat hyödyllisiä navigoitaessa kompassin avulla, mutta eivät kuitenkaan (yleensä) anna lyhintä reittiä (ks. kuva) kahden pisteen välillä. Tästä huolimatta loksodromeja käytettiin mm. lentoliikenteen reittien suunnittelussa 1960-luvulle saakka, jolloin ne korvautuivat isoympyrän kaariin perustuvilla reiteillä.



KUVA: Loksodromi muistuttaa pallokartalla spiraalia, mutta sen kuva Mercatorin kartalla on suora. Loksodromi ei kuitenkaan anna lyhintä reittiä, joka on alemmassa kuvassa suoran päätepisteitä yhdistävä kaari (lähde: Carlos Furuti <http://www.progonos.com/furuti/>).



KUVA: Pinta-alojen vääristyminen Mercatorin projektiossa (lähde: Wikipedia).

Poliittinen maailmankartta?

Maailmankarttaa laatiessaan Mercatorin tavoitteena oli luoda mahdollisimman hyvä apuväline merenkul-

kijoiden käytettäväksi. Mercatorin projektio ei säilytä pinta-aloja. Esimerkiksi Grönlanti näyttää projektiossa suunnilleen samankokoiselta kuin Afrikka. Todellisuudessa Afrikka on pinta-alaltaan noin 13-kertainen.

Kartan ominaisuuksista seuraa, että kaukana päiväntasaajalta olevat alueet ovat kartassa suurempia kuin todellisuudessa. Saksalainen yhteiskuntatieteilijä Arno Peters (1916 – 2002) esitti teoksessaan *Die Neue Kartographie/The New Cartography* (1983) voimakkaita syytöksiä kartanpiirtäjiä kohtaan. Hänen mukaansa karttojen pyrkimyksenä on esittää rikkaat pohjoiset teollisuusmaat todellista suurempina ja siten merkittävämpinä. Petersin esittämän ”tasa-arvoisen” maailmankartan voi tilata osoitteesta <http://www.petersmap.com/>.

Vaikka Petersin kritiikki vaikuttaakin perusteettomalta kartan takana olevaa matematiikkaa tuntevalle, kartat toki muokkaavat ihmisten maailmankuvaa monin tavoin. Mercatorin kartan hyödyllisyys kompassin avulla tapahtuvassa merenkulussa on tehnyt siitä suosittua monissa sellaisissa asioissa, joihin se ei sovellu. Esimerkiksi koulumaantiedon opetuksessa pinta-alat ja etäisyydet ovat varmastikin kartan konformisuutta tärkeämpiä ominaisuuksia.