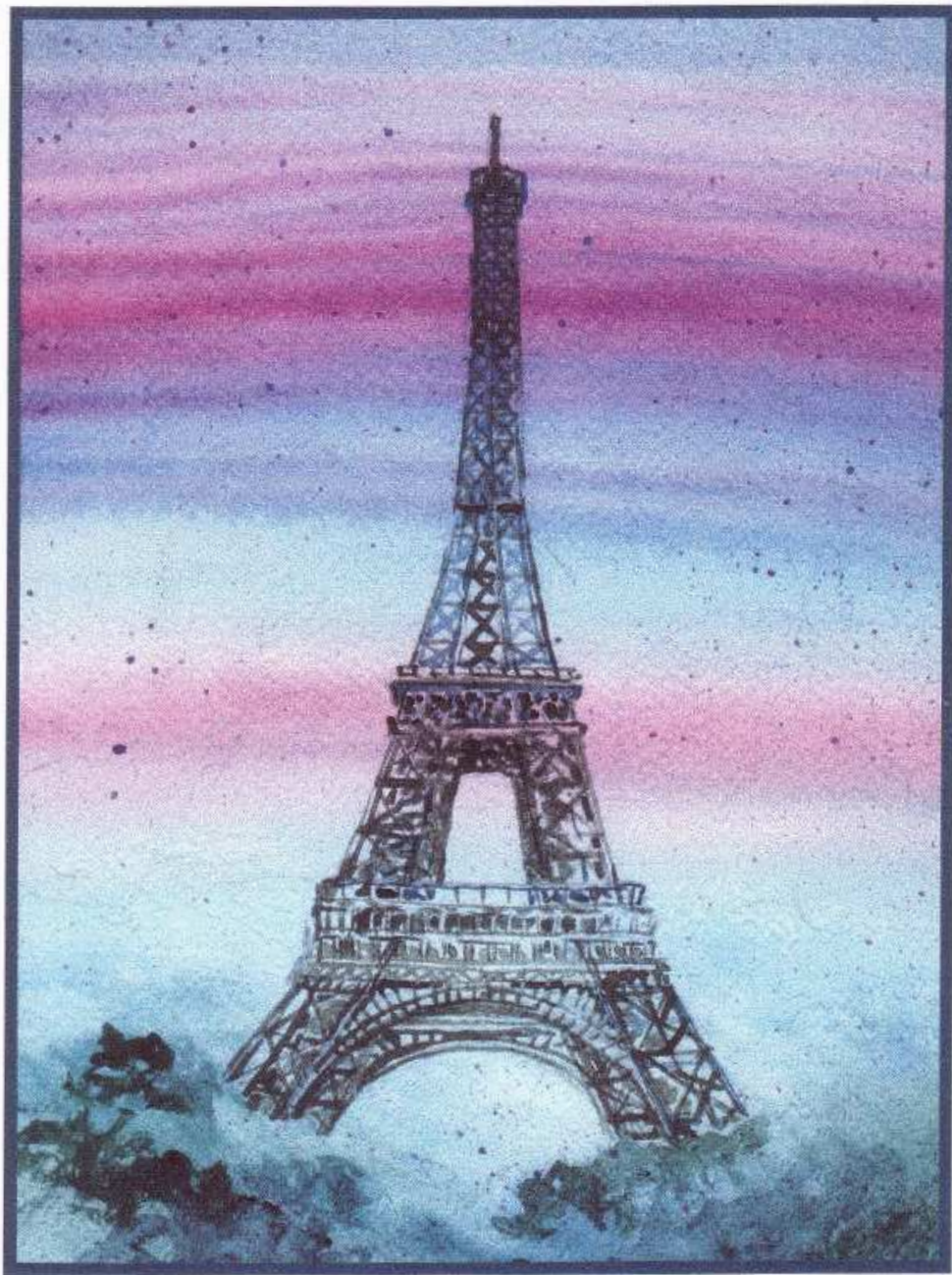


# Matematiikkalehti Solmu

Erikoisnumero 2/2005–2006

<http://solmu.math.helsinki.fi>



## Solmu

### Erikoisnumero 2/2005–2006

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

<http://solmu.math.helsinki.fi>

Erikoisnumeron päätoimittaja

*Marjatta Näätänen*, dosentti; Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri

*Mika Koskenoja*, tohtoriassistentti; Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti [toimitus@solmu.math.helsinki.fi](mailto:toimitus@solmu.math.helsinki.fi)

Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*

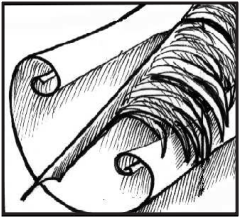
Kannen kuva: Eiffeltorni

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

# Sisällys

Pääkirjoitus: Pariisin kokouksen antia (Marjatta Näätänen) .....	4
Toimitussihteerin palsta: Tutkimuksia PISA-tulosten pohjalta (Mika Koskenoja) .....	6
Matematiikan opetusta käsitteleviä puheenvuoroja Pariisissa (Marjatta Näätänen) .....	8
Oppimäärien muutokset ja niiden vaikutukset matematiikan osaamiseen Suomessa (Olli Martio) .....	12
PISA:n kattavuus matematiikan oppisisällöistä Ranskassa (Marjatta Näätänen) .....	14
Matematiikkaa tietoliikenneinsinööreille ammattikorkeakouluissa – tavoitteita ja haasteita Suomessa (Pertti Toivonen) .....	18
Matematiikkakerhotoimintaa (Marjatta Näätänen) .....	20
Tietokoneet ja matematiikan opetus: Erään PISA-aineiston pohjalta tehdyn tutkimuksen tuloksia (Marjatta Näätänen) .....	21
Mitkä ovat Suomen PISA-menestyksen taustalla olevat syyt? (George Malaty) .....	23
Päätoimittajan kommentti (Marjatta Näätänen) .....	27
Tilanne Ranskan ”suurissa kouluissa” (Marjatta Näätänen) .....	28
Tytöt ja matematiikka PISA:n valossa (Marjatta Näätänen) .....	30

Käännösten tarkistus *Tapani Kuusalo*



## Pariisin kokouksen antia

Tässä erikoisnumerossa julkaistaan kirjoituksia matematiikan opetusta ja PISA-tutkimusta käsittelevästä Pariisin kokouksesta. Kokous pidettiin Suomen Kulttuuri-instituutissa ja sen pääjärjestäjät olivat Suomen ja Ranskan matemaattiset yhdistykset sekä Suomessa Matematiikan kansallisen komitean matematiikan opetuksen toimikunta. Vastuulliset järjestäjät olivat *Guy Chasse* ja *Marjatta Näätänen*. Osallistujat Suomesta olivat: *Pekka Koskela*, *George Malaty*, *Olli Martio*, *Marjatta Näätänen*, *Osmo Pekonen*, *Pertti Toivonen*. Suomalaisten osallistumista kokoukseen avustivat taloudellisesti opetusministeriö ja Suomalais-ranskalainen teknillistieteellinen seura.

Kokouksen päätteeksi oli lauantaipäivä keskustelua Institut des Hautes Études Scientifiques -instituutissa. Keskustelussa ICMI:n varapuheenjohtaja Michèle Artigue käsitteli mm. matematiikan yhteiskunnallista merkitystä. Nykyisin odotetaan koulutetulta kansalaiselta matematiikan osaamista, joka ylittää suuresti perusaritmetiikan. Kansalaisen tulisi pystyä arvioimaan kriittisesti joka taholta tulvivaa numeerista dataa, tekemään päätöksiä asioista, joihin liittyy epävarmuutta ja riskiä, kuten terveydenhoito, vakuutukset, ympäristö. Matematiikka ei ole ainoa aine, joka tukee kvantitatiivista lukutaitoa, eikä kvantitatiivinen lukutaito ole matematiikan opetuksen ainoa tavoite, mutta matematiikan opetuksella on ratkaiseva osuus kvantitatiivisen lukutaidon kehittämisessä.

Teknologiaan sijoitetaan yhä enemmän resursseja, mut-

ta teknologiaa ei pystytä kunnolla hyödyntämään eikä sen ongelmia välttämään.

Matematiikan kouluopetuksen tulisi pystyä tasapainoisesti tarjoamaan riittävä matematiikan osaaminen kaikille ja samalla myös huolehtimaan tieteen ja matematiikan kykyjen tarpeista. Sen tulisi myös löytää tasapaino kyllin vahvan matematiikan oppimisen ja kvantitatiivisen lukutaidon kehittymisen välille.

Pariisin kokouksessa tuli usein esille, että perusalgebran osaamisessa on puutteita – myös niillä, jotka selviävät hyvin PISA:n tehtävistä, voi olla hyvin vähäiset algebran kyvyt. Artigue esitti huolensa siitä, että PISA:n vaikutukset joidenkin maiden koulutusjärjestelmille voivat olla kaukana positiivisista. Hän ei pelännyt niinkään Ranskan puolesta, vaan niiden maiden, jotka eivät ole yhtä hyvin suojattuja. Erityisesti vaarassa ovat ne maat, jotka toivovat taloudellista tukea kansainvälisiltä järjestöiltä koulujärjestelmänsä kehittämiseksi.

Kaikenkaikkiaan Pariisin kokouksessa tuli selväksi, että hienona matematiikkamaana tunnettu Ranska on vakavassa vaarassa matematiikan kouluopetuksen tason suhteen: matematiikan luonnollisia rakenteita ei käytetä opetuksessa hyväksi, tärkeitä asioita jätetään pois ja eteneminen on hidastunut huomattavasti.

Suomessa Opettaja 10/2006 kertoo tutkimuksesta, jonka mukaan sanomalehtien säännöllinen lukeminen on yksi selittävä tekijä suomalaisten kärkituloksille PISA-

**Pääkirjoitus**

vertailussa; se edistää paitsi lukutaitoa, myös matematiikan ja luonnontieteiden osaamista sekä ongelmanratkaisua. Tulos ei ole yllättävä, jos ottaa huomioon, että PISA:n tehtävistä 40 prosenttia käsitteli datan samanlaista esittämistä, mitä käytetään sanomalehdissä. Lisäksi tehtävän tekstin ymmärtäminen, siis opetuskielen taito on tietenkin edellytys tehtävän ratkaisemiselle.

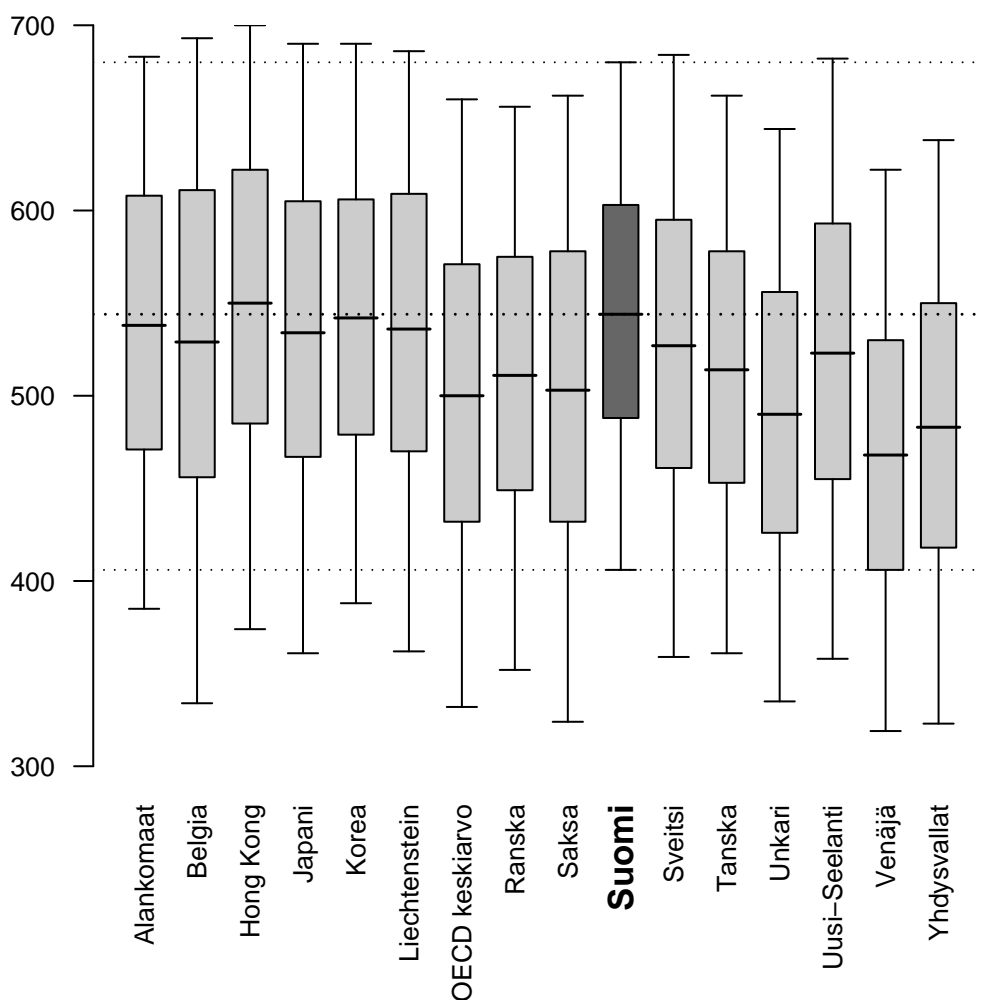
Suomen PISA-menestyksen salaisuus oli myös, että Suomen huonoin neljännes selvisi paljon paremmin kuin muiden maiden huonoimmat neljännekset, katso

erikoisnumero 1/2005–2006, pääkirjoitus ja kuva alla.

Matematiikan ja kvantitatiivisen lukutaidon suhteita on käsitelty kirjassa: L.A. Steen (ed.) (2001). *Mathematics and Democracy – The Case for Quantitative Literacy*. National Council on Education and the Disciplines.

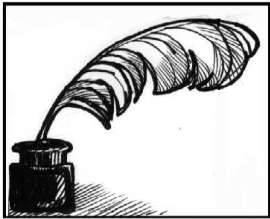
Erikoisnumeron lyhenneltyjen käännösten alkuperäiset kirjoitukset löytyvät osoitteesta <http://smf.emath.fr/en/VieSociete/Rencontres/France-Finlande-2005/ResumeConferences.html>.

### Marjatta Näätänen



**PISA:n matematiikan koe vuonna 2003:** Kuvassa näkyvät kunkin maan jakauman 5., 25., 75. ja 95. prosenttipisteet, siis alapuolelle jää tämä osuus jakaumasta. Keskellä olevat poikkiviivat ovat keskiarvojen kohdalla. Näiden perusteella uutisoitiin Suomen huipputuloksesta.

Kuva **Petri Koistinen**



## Tutkimuksia PISA-tulosten pohjalta

Koululaisten lukutaidon, matematiikan ja luonnontieteiden osaamista sekä ongelmanratkaisutaitoja mitanneen PISA 2003 -tutkimuksen pohjalta on alkanut ilmestyä uusia, tulosten tarkempaa analyysiä sisältäviä tutkimuksia. Suuntaukselle sopii toivoa jatkoa, sillä ensitulokset näyttävät olleen vain alkuaskel laajan tutkimusaineiston tarjoamiin mahdollisuuksiin.

PISA-tutkimusohjelman järjestäjä OECD on itse toteuttanut tämän vuoden 2006 alussa julkaistun tutkimuksen ”Are Students Ready for a Technology-Rich World? What PISA Studies Tell Us” (138 sivua). Tutkimuksessa selvitettiin 15-vuotiaisen koululaisten mahdollisuuksia käyttää tietokoneita koulussa ja kotona, asenteita tietokoneiden opetuskäyttöä kohtaan sekä tietokoneiden käytön vaikutusta oppimistuloksiin.

Tutkimuksen mukaan säännöllisesti tietokonetta kotona tai koulussa käyttävät suoriutuvat keskimääräistä paremmin matematiikassa, mutta tietokoneiden käytöstä saatava hyöty vaihtelee paljon eri maiden kesken. Eräs tutkimuksen havainto oli, että tytöt luottavat itseensä poikia vähemmän tietokoneella työskennellessään. Asennekyselyn mukaan Suomen koululaiset kuuluvat negatiivisimmin tietokoneiden opetuskäyttöä kohtaan suhtautuvien joukkoon, jossa olivat myös Tanskan, Unkarin, Irlannin ja Japanin koululaiset.

Tanskan teknologinen instituutti ([www.danistechnology.dk](http://www.danistechnology.dk)) julkaisi marraskuussa 2005 raportin ”Explai-

ning Student Performance. Evidence from the international PISA, TIMSS and PIRLS surveys” (216 sivua). Vertailussa mukana olleet tutkimukset PISA ja TIMSS kohdistuvat matematiikan osaamisen eri alueisiin, ja Suomen kannalta on harmillista, että olemme osallistuneet vain yhteen TIMSS-tutkimukseen (vuonna 1999, muut ovat olleet vuosina 1995 ja 2003). Tanskalaisten tutkimuksessa keskitytään opintomenestykseen vaikuttaviin taustatekijöihin, joita ovat mm. koulutusjärjestelmien erityispiirteet, koululaisten sosioekonominen viiteryhmä, koulujen hallintotavat ja ilma- piiri sekä koululaisten asenteet ja motivaatio.

OECD:n koulutusasiantuntija *Andreas Schleicher* esittää Lissabonin julistuksen ([www.lisboncouncil.net](http://www.lisboncouncil.net)) hengessä maaliskuussa 2006 julkaistussa artikkelissaan ”The economics of knowledge: Why education is key to Europe’s success” (20 sivua), että Euroopan koulutuskehitys on taantumassa. Tämä näkyy mm. kouluista valmistuneiden määrässä ja laadussa, koulutusjärjestelmien avoimuudessa kaikista sosiaaliryhmistä tulevia opiskelijoita kohtaan sekä jatkokoulutuksen tarjonnassa ja eniten harjoitusta tarvitsevien tukemisessa. Näihin Suomessa onkin panostettu. Schleicherin tekemät johtopäätökset perustuvat PISA 2003 -tutkimustuloksiin sekä muutamiin muihin tutkimuksiin. Raportissaan Schleicher tuo esille useita suosituksia kehityksen kääntämiseksi parempaan suuntaan.

Professori *Pirjo Linnakylä* ja FT *Antero Malin* Jyväskylän yliopiston koulutuksen tutkimuslaitokselta

Toimitussihteerin palsta

([ktl.jyu.fi](http://ktl.jyu.fi)) ovat selvittäneet, missä määrin suomalaisnuorten sanomalehtien lukemisaktiivisuus on yhteydessä oppimistuloksiin ja opiskeluasenteisiin. Sanomalehtien Liiton tilaamassa tutkimuksessa analysoitiin PISA 2003 -tutkimukseen kerättyä materiaalia. Helmi-kuussa 2006 julkaistun raportin ”Tukeeko sanomalehtien lukeminen oppimista? Sanomalehtien lukemisaktiivisuus ja oppimistulokset” (56 sivua) mukaan 15-vuotiaista nuorista noin 60 prosenttia lukee sanomalehteä useita kertoja viikossa. Toisaalta 15 prosenttia lukee lehteä vain kerran kuukaudessa tai harvemmin. Kaupungeissa luetaan sanomalehtiä vähemmän kuin maalla ja Uudellamaalla lukeminen on vähäisempää kuin muualla Suomessa.

PISA:n tehtävissä menestyivät sanomalehtiä säännöllisesti lukevat nuoret. Tätä saattaa selittää se, että hyvät perustiedot ja -taidot omaavat oppilaat ymmärtävät muita paremmin sanomalehtien tekstejä ja lukevat niitä siksi innokkaammin kuin ne, joille lehtien lukeminen on puutteellisten tietojen takia työlästä. Sanomalehtien lukeminen on myös vahvasti sidoksissa koulunkäynnin hyödylliseksi kokemiseen ja jatko-opintosuunnitelmiin. Vähän lehtiä lukevat eivät koe koulunkäyntiä tulevaisuutensa kannalta hyödylliseksi.

Linnakylä ja Malin toteavat, että ”koska PISAn koe-tehtävät eivät perustu kansallisiin opetussuunnitelmiin vaan niin koulussa kuin koulun ulkopuolellakin omak-suttuun tietoon, sanomalehtien ja muun joukkovies-tinnän välittämä informaatio voi olla merkittävä osate-kijä koemenestyksessä. Esimerkiksi nuorten käsitykset ilmastonlämpenemisestä perustuvat suurelta osin leh-tien ja television välittämiin tietoihin (Nevanpää 2005). Tämä merkitseekin melkoista haastetta ja vastuuta tie-dotusvälineille oikean tiedon välittämisestä tulevaisuu-

den kannalta näinkin merkittävästä luonnontieteelli-sestä ilmiöstä”.

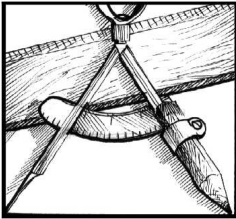
Kolmen ensiksi mainitun tutkimuksen raportit ovat tulostettavissa OECD:n PISA-verkkosivulla [www.pisa.oecd.org](http://www.pisa.oecd.org). Viimeksi mainitun tutkimuk-sen raporttiin löytyy linkki mm. Sanomalehtien Liiton verkkosivulta [www.sanomalehdet.fi](http://www.sanomalehdet.fi).

Jyväskylän yliopiston koulutuksen tutkimuslaitoksen PISA 2003 -tutkimuksen jatkoanalyysit eivät kovin hy-vin tue suomalaisten tiedotusvälineiden välittämää ku-vaa ”koululaisistamme matematiikan huippuosajina”. Professori *Jouni Välijärvi* ja FT *Antero Malin* toteavat (ks. mediatiedotteet [ktl.jyu.fi](http://ktl.jyu.fi), ”Heikoimmat oppi-laat nostivat Suomen kärkeen PISAssa”), että ”Suo-men PISA 2003 -huipputulos perustui erityisesti suo-malaisten heikoimpien ja keskitason oppilaiden erittäin hyviin suorituksiin. Suomalaisoppilaiden heikoimman neljänneksen keskiarvopistemäärä oli selvästi parem-pi kuin minkään muun maan vastaavan neljänneksen. Ero OECD:n heikoimman neljänneksen keskiarvoon oli Suomen hyväksi matematiikassa 56, luonnontieteissä ja ongelmanratkaisussa 61 ja lukutaidossa jopa 64 pis-tettä. Sen sijaan paras neljänneksemme oli paras ai-noastaan lukutaidossa”.

Matematiikassa kahdeksan maan parhaat menivät Suo-men parhaimmiston edelle (ks. kuva s. 5). Tulevaisuu-den haasteenamme on hyvän osaamisen vahvistami-nen varmistuen samaan aikaan, että heikommin suo-riutuvat menestyvät vähintään nyt saavutetulla tasol-la. Välijärvi ja Malin mainitsevat hyvin menestyvien oppilaiden osaamisen kehittämisen keinoina opetuksen eriyttämisen opetusryhmän sisällä sekä lahjakkaiden rohkaisun, jotta he kehittävät ja hyödyntävät osaamis-taan sekä koulussa että sen ulkopuolella.

**Mika Koskenoja**

**Toimitussihteerin palsta**



# Matematiikan opetusta käsitteleviä puheenvuoroja Pariisissa

Koonnut *Marjatta Näätänen*

## Matematiikan kouluopetuksen muuttamisesta

Keskustelussa *Jean-Michel Bismut*, eräs akateemikojen manifestin (ks. Solmun erikoisnumero 1/2005–2006) kirjoittajista, kertoi omasta kouluajastaan n. 50 vuotta sitten. Hän sai opettajiltaan pyrkimyksen tarkkuuteen ja älyllisen vapauden aatteen. Tarkkuutta opetettiin erityisesti alkeisgeometrian todistuksilla, tekemällä täydellisiä loogisia päättelyitä yksikertaisessa tilanteessa. Eukleideen aksioomat todella esitettiin aksioomina. Ongelman ratkaisu tarkoitti täsmällisen, selkeän, mahdollisimman elegantin todistuksen kirjoittamista. Bismut oppi, että ratkaisusta voi kunnioittavasti väitellä opettajan kanssa ja ehdottaa muita ratkaisuja säilyttäen uskon omaan päättelykykyynsä. Oppikirjat olivat yksinkertaisia, värittömiä, mutta sisällöltään asianmukaisia. Ympäröivään maailmaan tutustuttiin silloin myös tutkimalla yksinkertaisia laitteita, kuten radioita ja puhelimia.

Kielten ja kirjallisuuden opetus perustui monenlaisten, myös kovin vaikeiden tekstien lukemiselle. Hän muistaa valtavan ilonsa huomattuaan, että romaanista tai näytelmästä voi väitellä samalla älyllisellä tasolla, joskin eri termein kuin tieteen opiskelussa opittiin. Opiskeltiin myös englantia, latinaa, kreikkaa, historiaa, filosofiaa, fysiikkaa, biologiaa. Tarkoituksena oli kehittää

tasapainoinen ja rikas persoonallisuus. Bismut oppi todennäköisyyslaskentaa lukemalla Pascalin kirjoituksen, jossa uskoa Jumalaan perustellaan peliteorian alkeilla. Samoin Pascalin kirjoitus geometrian hengestä ja hienovaraisuuden tajusta antoi hänelle aiheen ajatella jonkinasteista geometrian osaamistaan ja täydellistä kykenemättömyyttään jälkimmäisen suhteen. Kenellekään ei tullut mieleen kysyä: Mitä hyötyä tästä kaikesta on? Koulun tarkoitus oli tehdä moraalisesti ja älyllisesti tasapainoisia yksilöitä. Bismut ei väitä, että hänen saamansa koulutus olisi ihanteellinen, mutta se tarjosi valtavia mahdollisuuksia kehittyä yksilönä.

Nykymaailma on erilainen. Nuoruus ei sinänsä ole kovin toisenlaista kuin ennen, mutta heijastelee luonnollisesti ympäröivän yhteiskunnan käsityksiä ja arvoja. Kysymys ”Miksi tämä on hyödyllistä?” on koko ajan läsnä ja kaiken tiedon on perusteltava hyödyllisyytensä, jopa yhteiskunnan kannalta. Markkina-arvo näyttää olevan kaiken lopullinen testi. Jossain jopa kerrotaan, että koulutuksen tarkoitus on opettaa valitsemaan kännykkä tai mielikanavasi TV:ssä. Eräs Euroopan valtio on keskittänyt koulutuksensa tavoitteet: Internet, tietotekniikka, bisnes, joskus lisäten Wordin käytön ja arkienglannin hallinnan.

Tekniikan muutos tarjoaa jokaiselle merkittäviä mahdollisuuksia, mutta ikäänkuin mustan laatikon muodossa.



Voidaanko matematiikkaa yhä opettaa? Ranska pystyy yhä tuottamaan ensiluokkaisia nuoria matemaatikkoja pitkällisen traditionsa ja opettajien ponnistelijien avulla. Kuitenkin hyötynäkökohtien vallitsema yleinen ilmapiiri tekee tehokkaan opetuksen mahdottomaksi. Todistuksen idea hämärtyy ja sekaantuu ”ominaisuuteen”. Jos matematiikan merkitys on vain sen hyödyllisyys tavallisen kansalaisen kannalta, niin se merkitsee matematiikan loppua tieteenä. Matematiikan opetuksen tarkoituksiin kuuluu myös tarjota yksilölle älyllisiä virikkeitä ja avata pääsy älylliseen vapauteen.

Bismutin mielestä pitäisi ajatella esimerkiksi seuraavia kysymyksiä: Miten voi tuoda tietokoneet matematiikan opetukseen, ottaen huomioon laskinten massiivisen käytön aiheuttaman tuhon? Tämä koskee myös yliopistoja. Mistä löytää hyviä matematiikan koulukirjoja tai hyviä verkko-osoitteita? Miten tehdä pieniä kokeita, joissa voisi kokeilla opetusmenetelmien muutosten vaikutuksia tai vertailla menetelmiä? Miten sellittä suurelle yleisölle ja muille tutkijoille, millainen rooli matematiikalla on heidän kaikissa työväliseissä ja ympäristössään?

Kansainvälinen matemaattinen unioni kirjoitti matematiikan opetuksen komissiolle ”Aikaisemmin oltiin huolestuneita siitä, että tarpeeton formalismi peitti yksinkertaisimmatkin käsitteet. Nykyisin on huolena, että todistuksen käsite on kadonnut joistain matematiikan kursseista ja että peruskurssien sisältöjä on karstittu huomattavasti. Asiaa mutkistaa myös se, että monien maiden opetusviranomaiset ovat alkaneet kysellä, eikö matemaattisten ohjelmistojen hallinta voisi korvata monia nykyisin vaadittuja matematiikan tietoja ja taitoja.”

Uskon, että matematiikan opetuksessa on kyse paljon enemmän kuin oman alamme puolustuksesta. Tärkeä osa sisäistä vapauttamme on kyseessä, tämän koskiessa aivan samalla tavalla myös luonnontieteiden ja humanististen tieteiden opetusta.

## Matematiikan opetus 20. vuosisadalla

Professori *George Malaty* käsitteli matematiikan opetusta 20:nneellä vuosisadalla. Teknologian kehitys on saanut monet uskomaan, että matematiikan opetus-kulttuuri on jäänyt jälkeen teknologian kehittyessä ja että nämä tulisi kytkeä yhteen. Professori Malaty on eri mieltä. Matemaattisesti maailma ympärillämme ei ole muuttunut, eikä tule muuttumaan. Matematiikan opetus liittyy aina erilaisiin joukkoihin, muotoihin, lukuihin. Matematiikan kehitys perustuu deduktiivisen päättelyn voiman keksimiseen ainakin 2600 vuotta sitten. Matematiikan opetuksessa euklidinen geometria on ollut tärkein työkalumme aina 1950-luvulle asti.

Oppisisältöuudistukset poistivat euklidisen geometrian kouluista, painopistealueeksi tuli ongelmanratkaisu,

erityisesti jokapäiväiseen elämään liittyvä. Euklidisen geometrian pitäminen vanhanaikaisena näyttää syyllä tähän, mutta todellinen syy sen katoamiseen on opetustradition katkeaminen, ja sen seuraamus: sen opetuksen taitojen häviäminen.

Euklidista geometriaa tarvitaan muiden geometrioiden, kuten analyyttisen geometrian oppimiseen. Myös trigonometrian ja analyysin sekä jopa aritmetiikan oppimiseen se on tarpeellinen. Euklidinen geometria on erikoisasemassa ajattelutaidon kehittämisessä ja monet matemaatikot muistelevat lämmöllä sen opiskelua 11–12-vuotiaasta alkaen. Einstein vihasi koulua, mutta euklidinen geometria teki hänestä tuntemamme Einsteinin. Psykologian tutkimus vahvistaa, että vain 30 % aikuisista on saavuttanut formaalin ajattelun tason. Piagét'n mukaan lopullinen vaihe ajattelun kehittymisessä tapahtuu noin 12–14- tai 15-vuotiaana. Saamansa kritiikin takia hän kohotti ylärajaa 20 vuoteen joidenkin ihmisten hitaamman kehityksen takia. Älykkyysosamäärätestit on jo kauan ajoitettu 16-vuotiaisiin. Matematiikan historia osoittaa, että monet suuret matemaatikot aloittivat luovan työnsä 16-vuotiaana ja euklidinen geometria on ihanteellinen ympäristö jokaisen ihmisen formaalin ajattelun kehittämiseksi, mm. tälle geometrialle on myös yksinkertainen visuaalinen malli.

Nykyisin yritetään Suomessa korostaa ongelmanratkaisun ohella myös matematiikan struktuurin systemaattista opiskelua erityisesti yrittäen opettaa todistamista euklidisen geometrian avulla. Lapsia johdatellaan keksimään todistus tai jopa oma todistuksensa. Elegantin todistuksen tarjoaminen ei riitä kehittämään oppilaiden ajattelua, vaan tarvittava prosessi on tärkeä. Eriyttäminen on tällaisessa opetuksessa tärkeä haaste. Kaikkien, erityisesti 13–18-vuotiaiden, tulisi pystyä antamaan ainakin jokin todistus, joka ratkaisee jonkin hänen tasolleen sopivan ongelman.

Tietokoneiden käytöstä matematiikan opetuksessa on professori Malatyn mielestä muistettava, että ne ovat eräs väline, mutta on monta muutakin välinettä, kuten taulu, kalvot – valinta on tehtävä opetusryhmän mukaan. Jossain tilanteessa apuvälineet ja työskentely käsiä käyttäen voisi olla paras valinta. Tietokoneet eivät pysty syrjäyttämään paperin ja kynän käyttöä ongelmanratkaisussa. Koulut ja opettajat eivät tule katoamaan, sillä koulutus on ihmisten välistä toimintaa.

Tietokoneiden käyttö matematiikan opetuksessa on siihen kohdistuvasta mielenkiinnosta huolimatta vielä vähäistä. Tähän on monia, myös käytännön syitä. Lasten deduktiivisen ajattelun kehittämisessä tietokoneet eivät ole olleet menestys. Esimerkiksi Cabri-Geometrian luultiin motivoivan oppilaat todistusten etsimiseen, mutta kävi päinvastoin. Cabri-Geometria on vahva väline erilaisten tapausten tutkimiseen, mutta yleinen seuraus tästä oli, että oppilaiden motivaatio todistusten etsimiseen hävisi, koska tarkastelta-

vat suhteet näyttivät selviltä. Cabri-Geometrian kaltaiset ohjelmistot tarjoavat voimakkaan välineen induktiolle, pienessä ajassa oppilas voi tutkia kovin monia tapauksia – mitä ei voida tehdä kynällä ja paperia käyttämällä. Tärkeitä kysymyksiä ovat: Miten tietokoneita voidaan tulevaisuudessa käyttää parantamaan matematiikan ymmärtämistä? Miten niillä voidaan auttaa keksimistä?

Pahin ongelma Suomen matematiikan opetuksessa on tuntimäärien vähyys, UNESCO:n tutkimus 1986 paljasti, että viikkotuntien määrä oli pienin koko Euroopassa; vain 2,6, eikä tilanne ole siitä paljoa parantunut. On valittava, mitä tässä vähässä ajassa pystytään tekemään. Professori Malatyn mielestä deduktiivisen ajattelun kehittäminen on tärkein päämäärä.

## Matematiikka tarjoaa mielihyvää

*Jean-Pierre Kahane* kertoi matematiikan tarjoamasta mielihyväästä. Hänen mielestään matematiikan ilo on perin moninaista ja henkilökohtaista. Aiheesta voi puhua sekä harrastelijana että ammattilaisena. Hän muisteli ensimmäistä matematiikkakokemustaan: isä kysyi häneltä lyhintä etäisyyttä kahden pisteen välillä (talosta toiselle) kulki suoran (joen, joka ei erota taloja) kautta. Kahane ei keksinyt vastausta, vaan isä antoi sen. Hän ei muistanut enää ikäänsä, mutta muisti elävästi silloisen tunnereaktionsa. Matematiikka herätti siis hänessä voimakkaan tunteen, joka saattaa tietystä tilanteesta olla myös hyvin tuottoisa.

Kahane arvioi, että hänen intuiotensa, myös analyysin ja kombinatoriikan suhteen, on ennen kaikkea geometrista. Sokeat matemaatit kertovat myös, että he katsovat ja yrittävät nähdä; heidän sisäiset kuvansa ovat geometrisia. Toisinaan Kahane antaa liikkeen kuljettaa mielikuvitustaan, seuraa prosessin vivahteita tai laskun rullaamista. Hän lisää mielellään liikkeen idean geometriseen intuiotioon: Peanon käyrä ilman liikettä on vain tasonpintaa. Kun käyrä saa juosta pienissä erissä, saadaan ihastuttava kuva turbulenssista.

Kahane on ollut sekä tutkija että opettaja. Hänestä ammatti oli loistava sekä matematiikan tutkimiseen että sen opettamiseen. Matematiikka on kehittynyt valtavasti hänen aikanaan. Hän on nauttinut myös vanhojen kirjoitusten lukemisesta.

Matematiikan historian paikka on ihmiskunnan historiassa. Kahane on lukenut Platonia (alkukielellä), Eukleidesta, kiinalaisia kirjoituksia, Arkhimedesta, Gaussia, Laplace'n ja Fourier'n kirjoituksia. Näistä hän on saanut innoitusta sekä tutkimukseen että opetukseen. Matematiikan tekee kulttuurin osaksi mielikuvitus, tarkkuus, kauneus, sen historiallinen merkitys. Matematiikalla on ihmeellinen kestävyys, joka viittaa ihmiskunnan ulkopuoliseen matemaattiseen todel-

lisuuteen: Eukleideen alkuluvut ovat edelleen alkulukujamme, Pythagoraan lause on aina yhtä ihmeellinen. Niihin suhtautuminen kuitenkin muuttuu, fysiikka ja kryptografia muuttivat alkulukujen jakautumisen esoteerisesta asiasta kaikkia kiinnostavaksi, yhdenmuotoisuus ja ortogonaaligeometria antaa keskeisen sijan Pythagoraan lauseelle ja siihen liittyvälle, kuten Brownin liikkeelle. Matematiikan arvoa ei vähennä, että se on ihmisen luomus. Voidaan ajatella katedraalin rakentamista tai harvinaisten kukkien kasvattamista sen puutarhan nurkassa. Kahane tuntee itsensä paremminkin puutarhuriksi kuin katedraalin rakentajaksi. Hän on osallistunut uusien avaruuksien teorioiden kehittämiseen, aluksi ne ovat tuntuneet oudoilta, siten niihin on tutustuttu. Häntä johdattivat opettajien, työtovereiden tai sattuman esittämät avoimet kysymykset. Aina oli kehitettävä työkalut ja mielihyvä tuli, kuten kaikissa ammateissa, siitä, että työkalut toimivat hyvin. Tiedetään hyvin, ettei ole mielihyvää ilman tuskaa. Kärsimyksen aiheuttavat epäonnistuneet yritykset ja turha ponnistelu ennenkuin päästään tuloksiin, jotka lopulta tuottavat ilon. Vaikka muut saattoivat toisinaan ratkaista hänen esittämänsä ongelman, niin tämäkin ilahdutti Kahanea.

Nykyisin matemaatikot ponnistelevat tehdäkseen alansa tunnetuksi ja myös suuren yleisön arvostamaksi. Enemmän tai myöhemmin median esteet murretaan. Kahaneen kokemus on, että vanhuudessa on matematiikasta paljon apua henkisten kykyjen säilyttämiselle. Matematiikan miettiminen, esimerkiksi kävellessä, ylläpitää fyysistäkin terveyttä. Kahaneen mielestä koulumatematiikka on opiskelua ja sääntöjen noudattamista. Se tehdään kuitenkin paremmin, jos matematiikka on hauskaa. Monet lapset nauttivat tavalla tai toisella matematiikasta; matemaattisista peleistä, kilpailuista, erilaisista aktiviteeteista. Matematiikkalaboratoriot olisivat ehkä keino yhdistää hauska ja luova toiminta luokkahuoneessa tarpeelliseen määrätietoiseen ja hallittuun työskentelyyn. Jokaisen matemaatikon kokemus on, että matematiikka on sekä vaikeaa että hauskaa. Myös epäonnistuminen voi luoda yrittämisen halua ja onnistumista. Kahane ei tiedä, voiko tätä soveltaa kaikkiin lapsiin – ehkä se onkin testi kyvystä harjoittaa matemaatikon ammattia.

## Kiinnostuksen lisääminen matematiikkaa kohtaan

Keskusteluun osallistui myös *Alexei Sossinsky* Moskovasta. Hän kertoi kahdesta tavasta lisätä koululaisten kiinnostusta matematiikkaan. Ensimmäinen on matematiikan tajoama älyllinen haaste, jota saadaan esimerkiksi kilpailujen muodossa. Matematiikkakilpailuja Venäjällä onkin paljon, sekä paikallisella tasolla että kansainvälisiä. Toinen tapa on tutustuttaa oppilaat matematiikan aiheuttamaan mielihyvään koulu-

tuntien ulkopuolisella toiminnalla, jonka järjestävät joko matemaatikot tai korkeatasoiset opettajat. Kilpailuja järjestetään myös matematiikan opettajille ja parhaat palkitaan.

## Matematiikan osuus tietotekniikan opiskelussa

Tietotekniikan professori *Roberto Di Cosmo* aloitti selvittämällä, miten olennaista yhteiskuntamme informaatioinfrastruktuurille on hyvien ohjelmoiden ja systeemi-insinöörien saaminen. Hän jatkoi huomauttamalla, ettei ole yhtä hyvin tiedossa, kuinka vaikeaa tämä on, vaikkakin aina silloin tällöin jokin vakava ohjelmointivirhe muistuttaa tästä suurta yleisöä. Tämän jälkeen hän kertoi, miksi matematiikka on keskeinen osa tällaisten henkilöiden koulutuksessa.

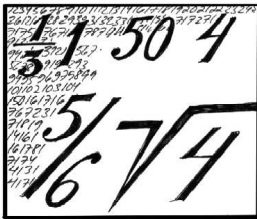
Di Cosmo oli myös ehdottomasti sitä mieltä, että tietokoneiden tuominen peruskouluun ja erikoistuneiden teknisten aineiden ottaminen opinto-ohjelmaan ilman perusteiden opettamista on väärä lähestymistapa.

Di Cosmo kertoi myös omista koneellisen äänestämisen kokemuksistaan. Tietokonealan asiantuntijana häntä vaivaavat kysymykset siitä, miten hyvä äänestystapa tämä on: Äänestäjä painaa nappia tai jotain ruudun kohtaa, eikä hänellä ole mitään mahdollisuutta tarkistaa, mitä sen jälkeen tapahtuu. Onko kenelläkään mitään tarkistusmahdollisuutta? Hän oli kysellyt äänestysjonossa Pariisissa muiden mielipiteitä ja oli järkyttynyt siitä, ettei kenelläkään ollut mitään ongelmaa pelkän napin painamisen hyväksymisessä.

## Matematiikan opetus tilastotieteilijän näkökulmasta

Tilastotieteilijä *Jean-Pierre Raoult* käsitteli matematiikan opetusta tilastotieteilijän näkökulmasta. Ranskan traditio matematiikan opetuksessa on ollut hyvin voimakas pyrkimys abstraktiin. Noim 25 vuotta sitten todettiin, että pitäisi päästä eroon iluusiosta koskien lasten abstraktiokykyjä. Valitettavasti ei kuitenkaan saatu aikaan yhtenäistä ja tasapainoista uutta käsitystä matematiikan perussisällöstä koulua varten, vaan seurasi tiheitä, matematiikalle epäsuotuisia muutoksia sekä oppisisällöissä että koulutusjärjestelmässä. Raoult ehdottaa, että satunnaisen käsite tulisi saada osaksi kaikkien kulttuuria. Matematiikan kauneutta voisi perustella sen universaaliudella, ehkä tämä viehättäisi nuoria. Oppisisällöissä voitaisiin tuoda esiin tätä näkökohtaa ja tilastotiede voisi olla eräs esimerkkiala. Tästä syystä tilastotiedettä tulisi opettaa nimenomaan matematiikan yhteydessä, ei erikseen taloustieteessä, maantieteessä, tieteissä, jotka tekevät havaintoja, koska niissä ei tilastotieteestä tulisi yhtenäistä käsitystä, vaikkakin yhteistyö eri aineiden opettajien välillä olisi suositeltavaa. Teoreettinen tilastotiede ei ole helppoa ja opettajien tulisi saada tukea esimerkiksi hyvien esimerkkien ja tutkimusaiheiden muodossa, niitä voisi kerätä verkkosivuille.

*Jean-Pierre Ferrier* puolestaan oli eri mieltä, vedoten *Adrian Smithin* tutkimukseen Englannissa hän esitti, että suuri osa tilastotieteen ja aineiston käsittelyn opetusta yli 14-vuotiaille voitaisiin siirtää matematiikasta muihin aineisiin, kuten biologiaan ja maantieteeseen. Matematiikassa tulisi löytää ydinsisällöt, joiden parempaan oppimiseen säästynyt aika tarvittaisiin.



# Oppimäärien muutokset ja niiden vaikutukset matematiikan osaamiseen Suomessa

*Olli Martio*

Professori

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

olli.martio@helsinki.fi

Koulujen matematiikan opetusohjelmat Suomessa ovat kokeneet muutoksia 8–10 vuoden välein. Viralliset oppimäärät löytyvät Opetushallituksen arkistoista, mutta kokonaiskuvan saaminen muutoksista on vaikeaa. Syy tähän on, että oppimäärät on kirjoitettu varsin yleisin termein ja koulut voivat lisäksi valita vapaasti oppikirjansa. Suomessa ei ole käytössä oppikirjojen virallista hyväksymisjärjestelmää kuten useissa muissa maissa. Systemi perustuu markkinatalouden lakeihin, jotka näyttävät kuitenkin toimivan tyydyttävästi. Siten matematiikan kouluopetuksen muutosten ymmärtäminen edellyttää opetusohjelmien lisäksi oppikirjojen ja koulujen opetuskäytännön tuntemusta. Opettajien aineenhallinnassa tapahtuneet muutokset eivät myöskään ole olleet merkityksellisiä.

Ylioppilastutkinto on suomalaisen koulusysteemin päätepysäkki ja se tarjoaa mahdollisuuden koulutuksen tehokkuuden arviointiin. Lukion suorittaneista melkein jokainen osallistuu ylioppilastutkintoon 18 vuoden ikäisenä. Matematiikan koe ylioppilastutkinnossa ei ole pakollinen. Matematiikan tutkinto on säilynyt samankaltaisena yli sadan vuoden ajan. Oppilaat voivat valita

joko lyhyen tai pitkän matematiikan riippumatta siitä, kumpaa oppimäärää he ovat lukiossa opiskelleet. Lyhyt matematiikka on suositumpi kuin pitkä matematiikka. Nykyisin molemmat kokeet käsittävät 15 kysymystä kirjoitettuna kaksipuolisesti A4-arkille. Tehtävistä kokelas valitsee enintään kymmenen. Ratkaisemalla kaksi tehtävää oikein, tai vähän vähemmän, kokelas suorittaa kokeen hyväksyttävästi. Käytännössä kahdeksan tehtävän oikea suoritus riittää korkeimpaan arvosanaan. Arvosanoja on yhteensä seitsemän. Arvosanojen prosenttiosuudet ovat vuosittain samat. Matematiikassa on kuitenkin perinteisesti suurempi hylkäysprosentti kuin muissa aineissa. Koska arvosanojen jakauma on käytännössä muuttumaton vuodesta toiseen, ei matematiikan kokeen arvosanoja voida käyttää matematiikan osaamisen tason arviointiin. Matematiikan kokeiden tehtävät noudattavat virallisia oppisuunnitelmia.

Suomalaisen ylioppilastutkinnon rakennetta on kuvailtu viitteessä [L] yksityiskohtaisesti.

Matematiikan oppisisällöt ovat kokeneet useita muutoksia 1970-luvulta lähtien. Ensimmäinen niistä tuli

”uuden matematiikan” mukana. Muutos herätti runsaasti keskustelua, mutta sen vaikutukset eivät olleet merkittäviä. Seuraavilla oppisisältöihin kohdistuneilla muutoksilla oli huomattavasti suurempi merkitys. Päämoottorina näissä oli matematiikan sovellusten korostaminen – matematiikalla katsottiin olevan vain välinearvo. Laskimien tulo opetukseen muutti myös opetuskäytäntöjä. Useissa Euroopan maissa kehitys oli samansuuntainen.

Suomessa oppisuunnitelmien muutokset johtivat seuraavaan:

- Koulumatematiikka kehittyi kuvailevaan suuntaan – tarkat määritelmät ja todistukset ohitettiin.
- Geometrian osuus supistui.
- Laskut suoritettiin laskimilla ja luvuilla. Algebraalisten kirjainlaskujen harjoittelu väheni huomattavasti.

Matemaattisen koulutuksen sauma lukioon siirryttäessä on myös osoittautunut hankalaksi. Tätä ei ole pystytty riittävästi tasoittamaan oppimääriä uudistettaessa. Kuvaava on syksyn ylioppilaskirjoitusten lyhyen matematiikan kysymys: Miksi kolmion kulmain summa on 180 astetta? Käytännössä kukaan kokeeseen osallistunut ei pystynyt tarjoamaan mitään selitystä. Opettajat ovat tyytyneet opettamaan tämän tosiasian saksien ja paperin avulla.

L. Näveri [N] on äskettäin tutkinut matematiikan osaamistason muutoksia. Tutkimus perustuu kahteen identtiseen testiin, jotka on tehty vuosina 1981/87 ja 2003. Testin osallistujat kuuluivat ikäluokkaan 15–16 (9. luokka); tämä vastaa PISA-tutkimuksen ikäluokkaa, sillä koulunkäynti aloitetaan Suomessa vuotta myöhemmin kuin Euroopassa nykyisin on tavallista. Kumpaankin testiin osallistui yli 350 oppilasta. Testikysymykset oli tarkoitettu ratkaistaviksi ilman laskimia. Seuraavassa esitellään joitakin tuloksia L. Näverin tutkimuksesta.

Ensimmäisessä taulukossa on esitetty kertolaskua koskevia väitteitä ja niiden oikeiden vastausten prosenttiosuuksia.

Kertolasku/väite	1981	2003
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$	95,2 %	90,1 %
$(-3)^2 = 9$	67,8 %	47,5 %
$18 \cdot 4 \cdot 32 \cdot 15 = 15 \cdot 32 \cdot 4 \cdot 18$	93,2 %	85,9 %
$0,015 \cdot 248 = 0,15 \cdot 24,8$	66,8 %	62,3 %
$0 \cdot 8436 = 0 \cdot 0,536$	79,0 %	65,6 %

Oikeiden vastausten prosenttiosuuden pudotus oli suurin, noin 20 %, murtolukulaskuja koskevilla kysymyksissä.

Rationaaliluvut	1981	2003
$26 + 17 =$	98,5 %	89,8 %
$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} =$	56,4 %	36,9 %
$\frac{4}{5} \cdot 5 =$	66,3 %	44,4 %
$\frac{1}{6} : \frac{1}{2} =$	56,5 %	28,3 %
$\frac{1}{5} : 3 =$	49,2 %	27,5 %
$\frac{1278}{2} =$	55,1 %	36,8 %

Alkeisalgebran osaaminen ei myöskään antanut hyvää kuvaa nykyisestä osaamistasosta. On ilmeistä, että tähän osioon oppisuunnitelmien muutoksilla on ollut varsin suuri vaikutus.

Algebra	1981	2003
$10^3 \cdot 10^2 =$	72,5 %	43,3 %
$x^4 x^5 =$	71,7 %	47,3 %
$(59^2)^3 = (59^3)^2$	61,1 %	31,7 %

Jos laskimet olisivat olleet sallittuja testissä, niin ainakin numerolaskut olisivat todennäköisesti antaneet parempia tuloksia vuonna 2003 kuin mitä yllä olevista taulukoista ilmenee.

Vuoden 2003 tutkimuksessa kysyttiin lisäksi: Selitä omin sanoin, mitä tarkoitetaan lausekkeella  $\frac{4}{5} \cdot 5$ . Tulokset olivat seuraavat:

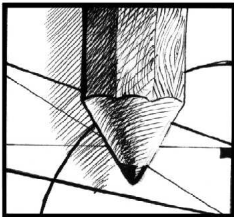
Oikea selitys	6,5 %
Melkein oikea selitys	5,4 %
Tulos oikein, mutta selitys väärin	8,8 %
Tulos oikein, ei selitystä	31,5 %
Tulos väärin, ei selitystä	31,0 %
Ei vastausta	16,8 %

Varsin harvoja luotettavia tutkimuksia on tehty ikäluokkien 7–15 oppilaiden matematiikan osaamisesta tapahtuneista muutoksista 10–30 vuoden aikaskaalassa. Tämän takia on vaikeaa eristää tekijöitä, jotka johtuvat oppisisältöjen muutoksista. L. Näverin tutkimus kuitenkin osoittaa, että oppimäärien muutoksilla on ollut tietyillä osaamisalueilla varsin suuria vaikutuksia. Suomen ja muiden maiden oppimäärien, oppikirjojen ja osaamistason vertailu antaisi varmasti lisävalaistusta asiaan.

## Viitteet

[L] Lahtinen, A., The Finnish Matriculation Examination in Mathematics. In: Nordic Presentations (eds. E. Pehkonen, G. Brandell & C. Winsløw), 2005, 64–68. University of Helsinki. Department of Applied Sciences of Education. Research Report 262.

[N] Näveri, L., Lasketun ymmärtäminen, *Dimensio* 3/2005, 49–52.



# PISA:n kattavuus matematiikan oppisisällöistä Ranskassa

Koonnut *Marjatta Näätänen*  
Taulukon käännös *Jouni Luukkainen*

*Antoine Bodin* (IREM de Franche-Comté) on tutkinut, mitä PISA mittaa. Hänen taulukoistaan näkyy matematiikan oppisisällöt Ranskassa luokilla 6–9. Taulukoihin on merkitty lihavoidulla tekstillä ne osat oppisisällöistä, jotka esiintyivät toisaalta PISA:n, toisaal-

ta v. 2005 Etelä-Ranskan matematiikkakokeen kysymyksissä. Bodin laski myös, kuinka suuren osan oppisisällöistä lihavoidut kohdat kattoivat. Tulos oli, että **PISA:n matematiikan kysymykset kattoivat n. 15 % oppisisällöistä**, Etelä-Ranskan koe n. 35 %.

**Vuosiluokittaiset matematiikan tutkintovaatimukset peruskoulun yläluokilla Ranskassa**  
**Lihavoitu kirjasin:** PISA-tutkimuksen matematiikan kysymysten koskettamat aihepiirit

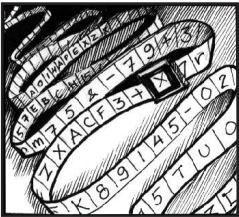
	Luokka 6	Luokka 7	Luokka 8	Luokka 9
<b>Muodot, konstruktiot ja muunnokset.</b>	Ympyrä. Kolmiot, erityiset kolmiot. Suorakulmio, vinoneliö. Kuvioiden muuntaminen peilauksella suoran suhteen. <b>Suorakulmainen suuntaissärmiö.</b>	<b>Suunnikas.</b> Kolmioiden konstruktio (geometriset välineet ja/tai ohjelmistot). Kolmion keskinormaalien leikkaus. Kuvioiden muuntaminen peilauksella pisteen suhteen. Suorat särmiöt, pyörähdyslieriöt.	<b>Kolmio: kahta sivua koskevat lauseet.</b> Kolmiot, jotka määntyvät kahden yhdensuuntaisen suoran leikatessa kahta toisiaan leikkaavaa suoraa: pituuksien suhteet. Kolmion erityiset suorat ja niiden leikkaaminen. Suorakulmainen kolmio ja sen ympäröity ympyrä. Kuvioiden muuntaminen siirrolla. <b>Pyramidit</b> , pyörähdyskartio.	Säännölliset monikulmiot. Thaleen lause ja sen käänteislause. Kuvioiden muuntaminen kierrolla; keskusprojektioiden ja siirtojen yhdistäminen. Vektorit, kahden vektorin summa. Pallo. Kappaleiden tasoleikkaukset.

	Luokka 6	Luokka 7	Luokka 8	Luokka 9
<b>Paikka, etäisyydet ja kulmat.</b>	Lukusuoran positiiviset pisteet. Kokonaislukujen paikannus lukusuoralla ja tasossa (koordinaatit).	Paikannus lukusuoralla, kahden pisteen etäisyys. Paikannus tasossa (koordinaatit). Kolmioepäyhtälö.	Verrannollisuuden graafinen esitys. Pythagoraan lause ja sen käänteislause. Pisteiden etäisyys suorasta. Ympyrän tangentti. Terävän kulman kosini.	Lineaarisen tai affiinin funktion graafinen esitys. Janan keskipisteen koordinaatit. Vektorin koordinaatit. Kahden pisteen etäisyys. Trigonometria suorakulmaisessa kolmiossa.
<b>Suuruudet ja mitat.</b>	<b>Suorakulmion piiri ja ala, suorakulmaisen kolmion ala.</b> Ympyrän piirin pituus. Suorakulmaisen suuntaissärmiön tilavuus kuutio- jaosta lähtemällä.	Kolmion kulmien summa. Suunnikkaan, kolmion, kiekon ala. <b>Ajan mittaaminen.</b> Suoran särmiön ja pyörähdyksierion vaipan ala ja tilavuus.	<b>Tavanomaiset murtoluvut.</b> Pyramidin tilavuus, pyörähdykskartion vaipan ala ja tilavuus.	Sekaluvut. Pallon ala, kuulan tilavuus.
<b>Luvut ja numeerinen laskenta.</b>	<b>Desimaaliesitys ja laskutoimitukset</b> +, −, ·. <b>Kokonaisluvulla jakaminen:</b> osamäärä ja jakojäännös euklidisessa jaossa, <b>likimääräinen jakolasku.</b> Katkaisu ja pyöristys. Kahden kokonaisluvun osamäärän esitys murtolausekkeena; yksinkertaistaminen.	Peräkkäiset laskut, laskutoimitusten järjestys. Murtolukujen tulo. Murtolukujen, joiden nimittäjät ovat samat tai kerrannaiset, vertailu, summa ja erotus. Desimaalilukujen vertailu, summa ja erotus.	Laskutoimitukset +, −, ·, : luvuille, jotka on annettu desimaaliesityksenä tai (ei välttämättä supistettuina) murtolukuina. Kokonaislukupotenssit. Lukujen tieteellinen esitys. Laskimen neliöjuuri- ja kosininäppäimet; käänteisluvut.	Juuria sisältävien lausekkeiden käsittely. Supistetut murtoluvut. Yksinkertaisia tietokone-esimerkkejä algoritmeista ja numeerisista sovelluksista.
<b>Symbolinen laskenta.</b>	<b>Numeeristen arvojen sijoittaminen kirjainten paikalle kaavoissa.</b>	Yhtälöt $k(a + b) = ka + kb$ ja $k(a - b) = ka - kb$ . Yhtä- tai erisuuruuden tutkiminen sijoitettaessa numeerisia arvoja yhteen tai useaan muuttujaan.	Lausekkeiden kehittäminen. Yhteen- tai kertolaskun vaikutus järjestykseen. <b>Yhden tuntemattoman ensimmäisen asteen yhtälö.</b>	Tekijöihinjako (identiteettejä). <b>Ensimmäisen asteen yhtälöihin palautuvat ongelmat.</b> Epäyhtälöt. Kahden tuntemattoman kahden ensimmäisen asteen yhtälön ryhmä.
<b>Numeeriset funktiot.</b>	<b>Korkoprosentin sovelluksia.</b> Pituuden ja alan yksiköiden muunnokset. <b>Enemmän tai vähemmän tärkeiden verrannollisuutta koskevien esimerkkien tutkiminen.</b>	Tasainen liike. Prosenttilasku ja frekvenssit. <b>Ajan ja tilavuuden yksiköiden muunnokset.</b> Verrannollisuuskertoimet.	Keskinopeus. Prosentteihin liittyviä laskuja. <b>Tavalliset yksikkömuunnokset.</b> Verrannollisuuden sovelluksia.	Kutistamisen ja venyttämisen vaikutus aloihin ja tilavuuksiin: yleinen tutkimus. Yhdistettyjen suureiden yksiköiden muunnosten ongelmia. Lineaariset ja affiinit funktiot.
<b>Aineiston esitys ja järjestäminen.</b>	<b>Taulukoiden ja graafisten esitysten lukemiseen ja laatimiseen johtavia esimerkkejä.</b>	Luokat, tilastollisen jakauman lukumääräosuudet. Frekvenssit. <b>Pylväsdiagrammit, kiekko-diagrammit.</b>	Kumuloiduneet vaikutukset. Kumuloiduneet frekvenssit. <b>Keskiarvo.</b> Taulukointi- ja piirrosohjelmistojen käyttöön perehtyminen.	Tilastollisten sarjojen vertailun alkeita.

<b>Vuosiluokittaiset matematiikan tutkintovaatimukset peruskoulun yläluokilla Ranskassa</b> <b>Lihavoitu kirjasin:</b> Tavallisen 9. luokan matematiikan loppukokeen koskettamat aihepiirit (Päättökoe 2005 – Etelä-Ranska)				
	Luokka 6	Luokka 7	Luokka 8	Luokka 9
<b>Muodot, konstruktiot ja muunnokset.</b>	Ympyrä. <b>Kolmiot, erityiset kolmiot. Suorakulmio,</b> vinoneliö. Kuvioiden muuntaminen peilauksella suoran suhteen. <b>Suorakulmainen suuntaissärmiö.</b>	Suunnikas. <b>Kolmioiden konstruktio (geometriset välineet ja/tai ohjelmistot).</b> Kolmion keskinormaalien leikkaus. Kuvioiden muuntaminen peilauksella pisteen suhteen. Suorat särmiöt, pyörähdyslieriöt.	<b>Kolmio:</b> kahta sivua koskevat lauseet. <b>Kolmiot, jotka määräytyvät kahden yhdensuuntaisen suoran leikatessa kahta toisiaan leikkaavaa suoraa: pituuksien suhteet.</b> Kolmion erityiset suorat ja niiden leikkaaminen. Suorakulmainen kolmio ja sen ympäripiirretty ympyrä. Kuvioiden muuntaminen siirrolla. Pyramidit, pyörähdyskartio.	Säännölliset monikulmiot. <b>Thaleen lause ja sen käänteislause.</b> Kuvioiden muuntaminen kierrolla; keskusprojektioiden ja siirtojen yhdistäminen. Vektorit, kahden vektorin summa. Pallo. Kappaleiden tasoleikkaukset.
<b>Paikka, etäisyydet ja kulmat.</b>	Lukusuoran positiiviset pisteet. Kokonaislukujen paikannus lukusuoralla ja tasossa (koordinaatit).	Paikannus lukusuoralla, kahden pisteen etäisyys. Paikannus tasossa (koordinaatit). Kolmioepäyhtälö.	Verrannollisuuden graafinen esitys. <b>Pythagoraan lause ja sen käänteislause.</b> Pisteen etäisyys suorasta. Ympyrän tangentti. <b>Terävän kulman kosini.</b>	<b>Lineaarisen tai affiinin funktion graafinen esitys.</b> Janan keskipisteen koordinaatit. Vektorin koordinaatit. Kahden pisteen etäisyys. <b>Trigonometria suorakulmaisessa kolmiossa.</b>
<b>Suuruudet ja mitat.</b>	<b>Suorakulmion piiri ja ala, suorakulmaisen kolmion ala.</b> Ympyrän piirin pituus. <b>Suorakulmaisen suuntaissärmiön tilavuus</b> kuutiojaosta lähtemällä.	<b>Kolmion kulmien summa.</b> Suunnikkaan, kolmion, kiekon ala. <b>Ajan mittaaminen.</b> Suoran särmiön ja pyörähdyslieriön vaipan ala ja tilavuus.	Tavanomaiset murtoluvut. Pyramidin tilavuus, pyörähdyskartion vaipan ala ja tilavuus.	Sekaluvut. Pallon ala, kuulan tilavuus.
<b>Luvut ja numeerinen laskenta.</b>	<b>Desimaaliesitys ja laskutoimitukset</b> +, −, ·. Kokonaisluvulla jakaminen: osamäärä ja jakojäännös euklidisessa jaossa, likimääräinen jakolasku. Katkaisu ja pyöristys. <b>Kahden kokonaisluvun osamäärän esitys murtolausekkeena; yksinkertaistaminen.</b>	<b>Peräkkäiset laskut, laskutoimitusten järjestys. Murtolukujen tulo. Murtolukujen, joiden nimittäjät ovat samat tai kerannaiset, vertailu, summa ja erotus.</b> Desimaalilukujen vertailu, summa ja erotus.	Laskutoimitukset +, −, ·, : luvuille, jotka on annettu desimaaliesityksenä tai (ei välttämättä murtolukuina) murtolukuina. <b>Kokonaislukupotenssit. Lukujen tieteellinen esitys. Laskimen neliöjuuri- ja kosininäppäimet; käänteisluvut.</b>	<b>Juuria sisältävien lausekkeiden käsittely. Supistetut murtoluvut.</b> Yksinkertaisia tietokone-esimerkkejä algoritmeista ja numeerisista sovelluksista.



	Luokka 6	Luokka 7	Luokka 8	Luokka 9
<b>Symbolinen laskenta.</b>	<b>Numeeristen arvojen sijoittaminen kirjainten paikalle kaavoissa.</b>	Yhtälöt $k(a + b) = ka + kb$ ja $k(a - b) = ka - kb$ . Yhtä- tai erisuuruuden tutkiminen sijoitet- taessa numeerisia arvoja yhteen tai useaan muuttujaan.	<b>Lausekkeiden kehittäminen.</b> Yhteen- tai kerto- laskun vaikutus järjestykseen. <b>Yhden tuntemat- toman ensim- mäisen asteen yhtälö.</b>	Tekijöihinjako (iden- titeettejä). <b>Ensimmäisen asteen yhtälöihin palau- tuvat ongelmat.</b> <b>Epäyhtälöt.</b> Kahden tuntemattoman kah- den ensimmäisen as- teen yhtälön ryhmä.
<b>Numeeriset funktiot.</b>	Korkoprosentin so- velluksia. <b>Pituu- den ja alan yksi- köiden muun- nokset.</b> Enem- män tai vähem- män tärkeiden verrannollisuutta koskevien esi- merkkien tutki- minen.	Tasainen liike. Prosenttilasku ja frekvenssit. <b>Ajan ja tilavuun- den yksiköiden muunnokset.</b> Verrannollisuus- kertoimet.	Keskinopeus. Prosentteihin liit- tyviä laskuja. Tavalliset yksikkö- muunnokset. Verrannollisuuden sovelluksia.	<b>Kutistamisen ja venyttämisen vai- kutus aloihin ja tilavuuksiin: yleinen tutkimus.</b> Yhdistettyjen suurei- den yksiköiden muun- nosten ongelmia. <b>Lineaariset ja affiinit funktiot.</b>
<b>Aineiston esitys ja järjes- täminen.</b>	<b>Taulukoiden ja graafisten esitys- ten lukemiseen ja laatimiseen johtavia esi- merkkejä.</b>	Luokat, <b>tilastol- lisen jakauman lukumäärä- osuudet.</b> <b>Frek- venssit.</b> <b>Pylväs- diagrammit,</b> kiekkodiagrammit.	<b>Kumuloituneet vaikutukset.</b> Kumuloituneet frek- venssit. <b>Keskiarvo.</b> Taulukointi- ja piirrosohjelmis- tojen käyttöön perehtyminen.	Tilastollisten sarjojen vertailun alkeita.



# Matematiikkaa tietoliikenneinsinööreille ammattikorkeakouluissa – tavoitteita ja haasteita Suomessa

*Pertti Toivonen*

Yliopettaja

Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

pertti.toivonen@stadia.fi

## Insinöörikoulutuksen laajuus Suomessa

Suomessa on asetettu tavoitteeksi kouluttaa varsin suuri osa ikäluokasta insinööreiksi:

- Ikäluokan koko on noin 64 000.
- Vuosittain noin 12 000 opiskelijaa aloittaa insinööriopinnot:
  - a) 4 000 opiskelijaa yliopistoissa,
  - b) 8 000 opiskelijaa ammattikorkeakouluissa.
- Ammattikorkeakouluissa opiskelevista noin 2 000 aloittaa opintonsa tietotekniikan koulutusohjelmassa ja heistä 25% – 30% valitsee tietoliikennetekniikan suuntautumisvaihtoehdon.

## Pieni tutkielma matematiikan opetuksen tavoitteista

Insinöörit soveltavat matematiikkaa monipuolisesti. Matematiikan opetuksen tavoitteena on vastata tekniikan

parissa työskentelevien tarpeisiin.

Tietoliikenneinsinöörille yksi peruskäsite on signaalin spektri – amplitudi- ja vaihespektri. Puhe signaalin harmonisista komponenteista tai ”signaalin sisältämistä taajuuksista” on tietoliikenneinsinöörin arkipäivää. Insinöörit analysoivat, suodattavat ja muokkaavat monenlaisia signaaleja. Minkälaisia matemaattisia valmiuksia he siihen tarvitsevat?

Olkoon  $f_T$  (ei liian monimutkainen) jaksollinen signaali, jonka jakso on  $T$ . Tiedetään, että jokaisessa pisteessä  $t$ , missä  $f_T$  on jatkuva, on

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \cos(k\omega t + \varphi_k), \end{aligned}$$

missä

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f_T(t) e^{-ik\omega t} dt \quad \text{ja} \quad \varphi_k = \arg c_k$$

ja missä on merkitty  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Jos  $f$  on jaksoton, tunnetun rajaprosessin avulla päädytään  $f$ :n integraaliesitykseen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

missä

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

on  $f(t)$ :n Fourier-muunnos.

Pelkkä silmäys yllä oleviin lausekkeisiin paljastaa, että jos haluaa ymmärtää jaksollisen signaalin amplitudispektrin

$$\{\dots, |c_{-1}|, |c_0|, |c_1|, |c_2|, \dots\}$$

ja vaihespektrin

$$\{\dots, \arg(c_{-1}), \arg(c_0), \arg(c_1), \arg(c_2), \dots\}$$

sisältämän informaation tai jos haluaa ymmärtää jatkuvan spektrin  $F(\omega)$  sisältämän informaation, on opiskeltava aika tavalla matematiikkaa. Ei ehkä ole tarpeen tutustua kaikkiin matemaattisesti syvällisimpiin todistuksiin, mutta käytettyjen käsitteiden ja ideoiden ymmärtäminen on kuitenkin välttämätöntä.

Edellä oleva on vain yksi esimerkki, joka kuvaa tekniikkaan läheisesti kytkeytyvän matematiikan laajuutta. Esimerkki paljastaa heti, että tietoliikenneinsinöörin matematiikan opintojen aihepiirien on sisällettävä ainakin kompleksiluvut ja vankka annos reaaliuuttujan funktioiden differentiaali- ja integraalilaskentaa.

Kun analysoidaan tietoliikenneinsinöörin tarvitsemia matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä, havaitaan, että vektorit, differentiaaliyhtälöt, usean muuttujan funktioiden analyysi, kompleksifunktiot, Fourier-, Laplace- ja  $z$ -muunnokset, matriisilaskenta, todennäköisyyslaskenta, tilastomatematiikka ja eräät diskreetin matematiikan osa-alueet ovat myös aihepiirejä, joiden tulee sisältyä – ainakin jossain laajuudessa – tietoliikenneinsinöörin matematiikan opintoihin. Insinöörin matematiikan opintojen tavoitteet ovat vaativat.

## Haasteita

Niin ylioppilas- kuin ammattioppilaitospohjalta opintonsa aloittavalla on pitkä tie edessään ennen kuin hänellä on minkäänlaista mahdollisuutta ymmärtää esimerkiksi signaalin spektrin käsite. Monille opintonsa aloittaville haaste saattaa nykyisin olla liian vaativa, koska ammattikorkeakouluissa tekniikan ja liikenteen alalla noin puolet keskeyttävät opintonsa. Tekniikan opintoihin sisältyvät, luonteeltaan matemaattiset opinnot ovat yksi merkittävä tekijä keskeyttämisten

taustalla. Matematiikan opintojen lisäksi tällaisia ovat myös kaikki matematiikkaa soveltavien ammattiaineiden opinnot.

Ensimmäisen vuosikursin opiskelijoissa on paljon sellaisia, joilla on suuria vaikeuksia aivan alkeellisessa matematiikassa. Esimerkiksi yksinkertaisten algebralisten lausekkeiden käsittely näyttää olevan vaikeaa. Ei myöskään ole harvinaista, että ensimmäisen vuosikursin (ylioppilas)opiskelija lukee lausekkeen  $\sin x$  ”sin kertaa  $x$ ”. Toisin sanoen opiskelija luulee ko. lauseketta kertolaskuksi.

Tällaiset vaikeudet kielivät melko syvällisistä ongelmista. Kysymys ei ole siitä, että koulussa on joitakin yksityiskohtia jäänyt oppimatta. Ongelmat perustuvat siihen, että liian monella on kovin vähän tai ei ollenkaan kokemusta matematiikasta ajatusrakennelmana, jossa ymmärrettävällä päättelyllä on keskeinen asema. Insinööriopinnoissa tämä on kohtalokasta, koska opintojen tavoitteita on mahdotonta saavuttaa yrittämällä opiskella ulkoa mystillisiä merkintöjä, sääntöjä jne.

Matematiikka on myös kieli. Tämä näkökulma näyttää olevan täysin tuntematon ammattikorkeakouluissa insinööriopintonsa aloittaville.

Monille on hyvin vaikeaa tarttua opintoihin mielekkäällä ja tuloksia tuottavalla tavalla. Samoin opettajille asetelma on haasteellinen. Joskus opettaja tuntee, että hänellä ja opiskelijalla ei matematiikan ongelmassa ole lainkaan yhteistä kieltä.

## PISA-tutkimuksen nostattamia kysymyksiä

Suomalaisten menestyminen matematiikan PISA-tutkimuksessa ilmaistaan usein julkisuudessa toteamalla, että Suomen koululaiset ovat hyviä matematiikassa.

PISA-tutkimus toki osoittaa, että koulussa on opittu joitakin arvokkaita taitoja. Tällä on varmasti positiivinen vaikutus yhteiskuntaamme. Ammattikorkeakoulun matematiikan opettajan näkökulmasta tilanne ei kuitenkaan ole niin valoisa kuin saattaisi luulla. Edellä kuvatut vaikeudet ovat todellisia ja vakavia.

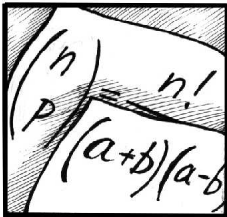
Peruskoululla on kaksi tavoitetta: antaa eväät jokapäiväiseen elämään ja toisaalta luoda riittävät valmiudet jatko-opinnoille. PISA-tutkimus keskittyy tavoitteista ensin mainittuun. Eikö julkisessa keskustelussa pitäisi sanoa, että PISA-tutkimus mittaa ”kykyä selviytyä arkipäivän tilanteista, joihin liittyy matemaattisia näkökulmia” eikä sanoa sen mittaavan ”matematiikan osaamista”?

PISA-tutkimuksen kysymyksiin vastaaminen edellyttää jossain määrin päättelytaitoja. Kykyä matemaattiseen päättelyyn tehtävät eivät kuitenkaan juu-

rikaan mittaa. (Tässä en tarkoita formaaleja matemaattisia todistuksia, vaan matematiikan käsitteiden, tulosten ja ideoiden keskinäisiä suhteita jäsentävää päättelyä, jossa tullaan toimeen tavallisella talonpoikaisjärjellä.)

Jos hyväksytään, että peruskoulun yksi tavoite on antaa opiskelijoille riittävät jatko-opintovalmiudet, ei ole

itsestään selvää minkälaista opetusta peruskoulussa olisi annettava. Olisiko realistista odottaa, että matematiikan opiskelu peruskoulussa antaisi kuvan matematiikasta ajatusrakennelmana, jossa ymmärrettävällä päättelyllä on keskeinen asema? Ja olisiko realistista odottaa, että matematiikan opiskelu peruskoulussa opastaisi ymmärtämään, että matematiikka on myös kieli?



## Matematiikkakerhotoimintaa

*George Malaty* esittelee artikkelissaan (s. 23) Joensuun matematiikkakerhotoimintaa.

Oulussa alkoi *Alli Huovisen* aloitteesta koulutuutorointi vuonna 1997. Lukiotuutoroinnin rinnalle on syntynyt peruskoulun ja lukion yhdistäviä niveltämiskursseja sekä Apua abeille ajoissa -kursseja. *Alli Huovinen* ehdotti matematiikkakerhojen pitoa Oulun kaupungin opetusvirastolle keväällä 2002. Syksyllä ryhmä Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitoksen opiskelijoita aloitti *Huovisen* johdolla yhteistyössä kahdeksan oululaisen luokkia 0–6 opettavan peruskoulun kanssa kerhot. Sittemmin toimintaan on tullut lisää kouluja ja ohjaajia. Kesällä 2003 suosittujen matikkakerhojen pohjalta sama työryhmä toteutti Matikkaraketti-leirejä neljällä Oulun koululla, viime kesänä leirejä oli jo monta kymmentä.

Suuren suosion saaneet matematiikkakerhot saivat syksyllä 2003 uuden tulokkaan, kun kerhoa alettiin ohjata videoneuvotteluna Vaalaan. Siihen kuuluu olennaisena osana tietotekninen puoli, jonka toteutuksesta vastaa opettaja Vaalassa. Tarkoitus olisi huomata, että matematiikka on paljon muutakin kuin laskemista. Koska tällaista toimintaa ei voi olla kaikilla kouluilla eivätkä kaikki lapsetkaan löydä matematiikkakerhoja, myös matematiikan tuntien monipuolisuus on tärkeää. Kerhoissa käytetäänkin useita ideoita, joita voitaisiin käyttää perusopetuksessa kaikilla luokka-asteilla, lukioissakin. Matematiikkakerhoissa suunnittelun ja opetuksen päävastuu oli alusta alkaen matematiikan opiskelijoilla.

*Marjatta Näätänen*

Turun matematiikkakerhotoiminta syntyi Oulun esimerkin innoittamana v. 2004 *Matti Vuorisen* aloitteesta. Tavoitteena on elävöittää matematiikkaa ja tarjota uusia virikkeitä matematiikan maailmaan. Turun kerhon nimi on Origo ja sillä on www-sivu [www.math.utu.fi/origo/](http://www.math.utu.fi/origo/). Kerhoaiheita löytyy osoitteesta [www.math.utu.fi/origo/testi.html](http://www.math.utu.fi/origo/testi.html).

Helsingin yliopistossa LUMA-keskuksen matematiikan kouluyhteistyö on käsittänyt matematiikkapäivien järjestämistä, koululaisvierailuja, opettajien koulutusta, matematiikkakerhoja, matematiikan kesäleirejä, erilaisiin tapahtumiin osallistumista ja toiminnallisen matematiikan kehittämistä; *Saara Leh-to* on LUMA-keskuksen matematiikan kouluyhteistyöhenkilö, *Juha Oikkonen* toimii neuvonantajana. Syksyllä 2005 perustettiin Summamutikkakeskus, joka on matematiikan opetuksen resurssikeskus. Keskukseen kirjasto sijaitsee Kumpulankampuksella (Exactum, huone D347), ideavaraston verkko-osoite on [www.helsinki.fi/summamutikka](http://www.helsinki.fi/summamutikka). Keskeisessä osassa matematiikan LUMA-toiminnan toteutuksessa ovat laitoksen opiskelijat. He toimivat ohjaajina ja saavat työstään joko palkkaa tai opintosuorituksia.

*Marjatta Näätänen* on LUMA-keskuksen toimintansa lisäksi järjestänyt Maunulan matematiikkalukiassa matematiikkaviikonloppuja vuodesta 2004. Osallistujia on ollut useista pääkaupunkiseudun koulusta. Unkarin kesäleirille on osallistunut suomalaisryhmä jo useita vuosia. Matematiikkalehti Solmua on julkaistu kymmenkunta vuotta.



# Tietokoneet ja matematiikan opetus: Erään PISA-aineiston pohjalta tehdyn tutkimuksen tuloksia

**Marjatta Näätänen**

Dosentti

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Selvyden vuoksi: Tässä kirjoituksessa kerron erään tutkimuksen tuloksista, enkä ota henkilökohtaisesti kantaa siihen, vaikuttaako – ja millä tavalla – tietokoneiden käyttömahdollisuus matematiikan oppimistuloksiin.

Nykykoululaiset kohtaavat tietokoneita sekä koulussa että kotona. Hallitukset esittävät melkein maailmanlaajuisesti ohjelmia koulujen varustamisesta tietokoneilla ja internetyhteyksillä.

Tietokoneiden vaikutusta oppimistuloksiin ovat hiljattain tutkineet *Thomas Fuchs* ja *Ludger Woessmann* (München, Saksa). Heidän tutkimuksensa analysoi, vaikuttaako tietokoneiden käyttömahdollisuus ja käyttö oppimistuloksiin. Käytetty aineisto on PISA 2000 -aineistoa, joten se on kyselyaineistoa, ei kokeellista (toisin sanoen aineisto ei perustu satunnaisesti valittuun koeryhmään ja kontrolliryhmään).

Ensiksikin: Korrelaatioanalyysi, jossa käytetään vain kahta muuttujaa on erittäin harhaanjohtava tutkittaessa mahdollista yhteyttä tietokoneiden ja oppilaiden oppimistulosten välillä. Tietokoneiden käyttömahdollisuus kotona korreloi voimakkaasti mui-

den perheen taustaominaisuuksien kanssa (perheen taustatekijät – taloudelliset, sosiaaliset ja koulutukselliset ominaisuudet, kuten vanhempien koulutus, työ, mahdollinen maahanmuuttaja-asema). Tietokoneiden käyttömahdollisuus koulussa taas korreloi voimakkaasti muiden positiivisten koulun ominaisuuksien kanssa (käytettävissä olevat varat, sosio-ekonomiset ominaisuudet).

Fuchs ja Woessmann huomauttavat, että tästä huolimatta kahden muuttujan korrelaatioon vedotaan usein, näin tekee jopa OECD (2001, s. 118). OECD esittää samojen PISA-aineistojen perusteella, että on tilastollisesti merkittävä positiivinen korrelaatio koululaisten oppimistulosten ja tietokoneiden käyttömahdollisuuden välillä. Kuitenkin Fuchs ja Woessmann näyttävät, että jos perhetausta ja koulun ominaisuudet kontrolloidaan, kodin tietokoneiden vaikutus tulee negatiiviseksi ja koulutietokoneiden merkityksettömäksi. Tutkijat esittävät, että monimuuttujanalyysi osoittaa, kuinka huoleton kahden muuttujan korrelaation käyttö voi johtaa virheellisiin johtopäätöksiin.

Toiseksi Fuchs ja Woessmann väittävät, että tieto-

koneiden ja oppilaiden oppimistulosten suhde riippuu suuresti koneiden käyttötavasta – pelkkä koneiden käyttömahdollisuus on liian suppea käsite

**Kotikäyttö:** Tietokoneiden käyttömahdollisuus voi johdattaa oppilaan muihin puuhiin kuin opiskeluun – luultavasti tällöin konetta käytetään lähinnä tietokonepeleihin. Vain koneen konstruktiiivisella käytöllä (kuten sähköposti, tiedonhaku verkosta, opiskeluohjelmien käyttö) voidaan edellämainittu negatiivinen vaikutus ainakin osittain kompensoida.

**Koulukäyttö:** Matematiikan oppimistulosten ja tietokoneiden sekä internetin koulukäytön välinen riippuvuus on ylösalaisen U:n muotoinen. Koululaiset, jotka eivät käytä koskaan konetta koulussa osoittavat huonompaa suoritustasoa kuin oppilaat, jotka käyttävät joskus tietokonetta tai internetiä koulussa. Oppilaat, jotka käyttävät niitä useita kertoja viikossa suoriutuvat heikommin. Fuchs and Woessmann antavat kaksi mahdollista selitystä:

– Opettajat voivat välttää tietokoneiden käyttöä huonosti menestyvien oppilaiden kanssa, ja tietokoneiden käyttö on saattanut myös alentaa oppilaiden suoritustasoa. Konetta käyttävä opetus on voinut korvata, tehokkaampia opetusmuotoja. Samanlaisia tuloksia saivat myös Angrist ja Lavy 2002.

Fuchs ja Woessmann esittävät, että kenties on olemassa optimaalinen tietokoneen ja internetin koulukäytön taso, se on selvästi alle useita kertoja viikossa.

Tietokoneen käyttömahdollisuus kotona ja koulussa kehittää jokseenkin varmasti joitain koneenkäyttötaitoja. Fuchs ja Woessmannin tulokset viittaavat siihen, että tämä saattaa tapahtua muiden taitojen – kuten matematiikan ja kirjoittamisen – kustannuksella. Tutkijat esittävät seuraavia hypoteeseja:

Tietokoneita käytetään usein kotona pelkästään leikkikalujen tapaan. Myös internet tarjoaa viihdettä chatien ja pelien muodossa, vähentäen näin kotitehtäviin ja opiskeluun käytettävää aikaa. Näin tietokoneiden ja internetin käytön vaikutus oppimiseen riippuu suuresti siitä, miten ja mihin tarkoitukseen niitä käytetään. Tietokoneen käyttö opetuksessa aiheuttaa resurssien käytön uudelleenjaon ja korvaa vaihtoehtoisia, mahdollisesti tehokkaampia opetustapoja. Kokonaistuntimäärä on kuitenkin vakio, joten tämä saattaa alentaa oppimistuloksia. Koulujen budjetit ovat myös melko kiinteitä, joten koneet voivat aiheuttaa taloudellisten resurssien käytön uudelleenjakoa koneiden hyväksi, mahdollisesti näin korvaten tehokkaampien opetusmateriaalien ja tapojen käyttöä.

Tietokoneavusteinen opetus voi myös rajoittaa oppilaiden luovuutta. Koneohjelmat sallivat yleensä vain vähän interaktiivisia mahdollisuuksia ja edellyttävät

tietyllä tavalla toimimista. Tämä saattaa rajoittaa oppilaiden ongelmanratkaisua ja luovuutta, he joutuvat ajattelemaan enneltämäärätyllä tavalla eivätkä voi käyttää omia luovia ratkaisujaan.

## Muita tutkimuksia tietokoneiden taloudellisesta ja koulutuksellisesta vaikutuksesta

*Borghams ja ter Weel* (2004) saivat tulokseksi, ettei kyky käyttää tehokkaasti tietokonetta vaikuta merkittävästi tulotasoon, sen sijaan matematiikka ja kirjalliset kyvyt parantavat palkkatasoa (parempi palkka tietokoneiden käyttäjien hyväksi selittyy jokseenkin kokonaan sillä, että tietokoneita käyttävissä ammateissa tarvitaan osaavia henkilöitä).

*Angrist ja Lavy* (2002) raportoivat, että tietokoneavusteisen opetuksen käyttöönotto israelilaisissa kouluissa vaikutti tilastollisesti merkittävästi negatiivisesti matematiikan osaamistasoon 4. luokan oppilailla ja muissa aineissa korkeammilla luokilla vaikutus oli negatiivinen, mutta tilastollisesti merkityksetön. Nämä tutkimukset eivät tue oletusta, että tietokoneilla olisi merkittävä taloudellinen ja koulutuksellinen vaikutus. Huolimatta poliitikkojen ja ohjelmistojen myyjien lukuisista päinvastaisista väitteistä tähänastinen tutkimus viittaa siihen, ettei tietokoneiden koulukäyttö edesauta merkittävästi oppilaiden perustaitojen, kuten matematiikan ja lukemisen oppimista.

Viimeisen PISA-tutkimuksen tuloksia on käytetty tietokoneiden käytön ja matematiikan oppimistulosten selvittelyyn. OECD on julkaissut tuloksiaan osoitteessa [www.pisa.oecd.org](http://www.pisa.oecd.org). He ovat saaneet tietokoneita paljon käyttäville samansuuntaisia tuloksia kuin Woessmannin ylösalaisen U:n epälineaarisuus.

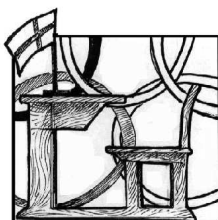
## Lähteet

Angrist, Joshua, Victor Lavy (2002). New evidence on Classroom computers and Pupil learning. *Economic Journal* 112 (4829): 735–765.

Borghams, Lex, Bas ter Weel (2004). Are Computer Skills the Basic Skills? The returns to Computer, Writing and Math Skills in Britain. *Labor economics* 11 (1): 85–98.

Fuchs, Thomas, Ludger Woessmann (Munich, Germany) CESifo Working Paper No. 1321 [www.CESifo.de](http://www.CESifo.de), November 2004.

OECD (2001) Knowledge and Skills for Life: First results from the OECD Programme for International Student assessment (PISA) 2000 Paris: OECD.



# Mitkä ovat Suomen PISA-menestyksen taustalla olevat syyt?

*George Malaty*

Professori

Joensuun yliopisto

george.malaty@joensuu.fi

Suomen PISA-menetyks on yllättänyt matemaatikot ja matematiikan opetuksen asiantuntijat niin Suomessa kuin sen ulkopuolellakin, itseni mukaanlukien. Taustani ja kokemukseni vuoksi minun oli kuitenkin helppo ymmärtää tämän menestyksen taustalla olevat syyt.

Mielestäni viisi tärkeintä syytä Suomen PISA-menestykseen ovat:

- (1) onnistuminen opettajankoulutuksessa,
- (2) ammatillinen opetuskulttuuri,
- (3) onnistuminen opettajien täydennyskoulutuksessa,
- (4) matematiikan opetuksen kehittämisen eteen tehdyt erilaiset panostukset,
- (5) koulunkäynnin traditiot Suomessa.

Ainakin osittain nämä syyt voivat näyttää suomalaisesta lukijasta itsestäänselviltä, kuitenkin ne ovat vahvuutemme, jotka erottavat meitä muista maista. Toisaalta pitäisi korostaa, että onnistuminen opettajankoulutuksessa on suhteellista verrattuna muihin maihin, eikä opettajankoulutus meillä ole ongelmatonta. Olen

riittävän yksityiskohtaisesti käsitellyt opettajankoulutuksen ongelmia meillä toisessa kirjoituksessa (Malaty 2004).

## Onnistuminen opettajankoulutuksessa

Opettajankoulutuksen onnistumisessa Suomessa on kaksi tärkeää näkökohtaa:

- opettajankoulutuksen tutkintovaatimusten säilyminen korkeana,
- motivoituneiden opiskelijoiden rekrytoimisen onnistuminen.

Jokaisella pätevällä opettajalla on maisterin tutkinto: kasvatustieteiden maisteri luokanopettajilla (peruskoulun alaluokat 1–6) ja filosofian maisteri aineenopettajilla (peruskoulun yläluokat 7–9 ja lukio). Aineenopettajien rekrytointi onnistuu tyydyttävällä tasolla, sen sijaan luokanopettajan opinnot ovat yksi suosituimmista korkeakoulutuksen aloista Suomessa. Matematiikan aineenopettajan opintoihin pystytään rekrytoimaan riittävästi opiskelijoita, mutta luokanopet-

tajan opintoihin hakijoita on 5–6-kertainen määrä aloituspaikkojen lukumäärään verrattuna. Valitsematta jääneet pyrkivät yleensä uudestaan kerran tai useammin seuraavina vuosina. Alakoulujen opettajat tunnetaan Suomessa luokanopettajina, sillä heidän tulee opettaa kaikkia oppiaineita luokalleen.

Yksi tärkeimmistä syistä luokanopettajaopintojen suosioon on luokanopettajien erityisasema suomalaisessa yhteiskunnassa. Lukemisen ja kirjoittamisen opettaminen on ollut luokanopettajien vastuulla noin 150 vuoden ajan, aikaisemmin tehtävää hoiti pyhä organisaatio – kirkko. Vuoden 1921 kansakouluasetuksen mukaan jokaiseen kylään pyrittiin perustamaan kansakoulu, jonka opettajasta tuli kyläyhteisön ”kansankynttilä”. Tämän jälkeen kuntiin saatiin Kirkkokadun viereen Koulukatu. Vuoteen 1974 mennessä luokanopettajakoulutus oli täysin siirtynyt yliopistoihin, josta aiheutui kiinnostuksen lisääntyminen luokanopettajaopintojen kohtaan.

Suomalaiset nuoret muistavat peruskoulussa vietetyn ajan, erityisesti sen ensimmäiset kaksi vuotta, suurella lämmöllä. Näiden vuosien aikana on melko yleistä, että koulupäivä päätetään käsiä taputtamalla, eikä ole lainkaan harvinaista halata opettajaa.

Tärkeimmät syyt aineenopettajakoulutuksen suhteellisen hyvään suosioon ovat yhteydessä muihin yleisiin tekijöihin peruskouluissa ja lukioissa. Nämä tekijät voidaan jakaa neljään ryhmään:

- (a) koulujen hyvinvointi,
- (b) myönteinen työskentely-ympäristö kouluissa,
- (c) koulunkäyntiin liittyvät tavat,
- (d) huolehtimisen, mukavuuden ja tasa-arvon periaatteet kouluissa.

## Ammatillinen opetuskulttuuri

Valtaosalle suomalaisista opettajista opettaminen on kutsumus, jossa on mukana pitkät perinteet opettajien kiinnostuksesta oppilaiden oppimiseen. Tämän voi havaita kahdesta seikasta: yksi on opettajien kiinnostus kehittää itseään, ja toinen on heidän halunsa auttaa yksittäisiä oppilaita esimerkiksi matematiikan tehtävien ratkaisemisessa. Opettajan istuminen polvillaan pulpetin edessä oppilaan kanssa kasvot vastatusten hiljaa keskustellen on tavallinen näky.

Suomalaisissa kouluissa ei pidetä systemaattisia tarkastuksia. Tämä ei ainoastaan säästä rahaa vaan saa jokaisen opettajan tuntemaan itsensä vapaaksi ja vastuulliseksi. Kukin opettaja voi luoda oman opetussuunnitelmansa, jonka pohjana ovat Opetushallituksen julkaisemat valtakunnalliset opetussuunnitelman

perusteet sekä paikallinen oman koulun hyväksymä täsmällisempi opetussuunnitelma, jonka kehittämiseen opettajat ovat itse osallistuneet. Opettajat ovat mukana myös valtakunnallisen opetussuunnitelman laadinnassa. Lisäksi jokaisella opettajalla on vapaus valita luokalleen käyttämänsä oppikirjat eri kustantajien valikoimista. Tällainen vapaus antaa opettajille aktiivisen roolin ammatissaan, mikä tekee heistä työstään kiinnostuneita ja tarjoaa heille mahdollisuuden kokemuksen kehittymiselle.

## Onnistuminen opettajien täydennyskoulutuksessa

Opettajien täydennyskoulutus on Suomessa järjestetty hyvin eri organisaatioiden tarjotessa erityyppisiä kursseja. Esimerkiksi Opetushallitus järjestää monenlaista matematiikan opetuksen täydennyskoulutusta ja paikalliset opetusviranomaiset tarjoavat täydennyskoulutuskursseja luokan- ja aineenopettajille. Myös opettajien ammattijärjestöt järjestävät matematiikan opetuksen täydennyskoulutusta sekä paikallisesti että kansallisesti. Tärkeimmät järjestöt ovat Matemaattisten aineiden opettajien liitto, Luokanopettajien liitto ja Suomen erityisopettajien liitto.

Kaikissa yliopistoissa on täydennyskoulutuskeskus ja jokaisessa maakunnassa on kesäyliopisto. Nämä tarjoavat monenlaista koulutusta, mukaanlukien opettajien täydennyskoulutusta. Myös avoimet yliopistot ja kansanopistot voivat järjestää opettajien täydennyskoulutusta.

Tässä koosteessa on mainittu tärkeimmät opettajien täydennyskoulutusta tarjoavat organisaatiot, mutta tämä ei ole täydellinen luettelo. Täydennyskoulutus on toisinaan ilmaista, mutta yleensä opettajilla on oltava omaa rahoitusta esimerkiksi kouluiltaan. On merkille pantavaa, että joissakin tapauksissa opettajat itse maksavat osallistumisensa heitä kiinnostaville kursseille – osoitus siitä kuinka kiinnostuneita opettajat Suomessa ovat ammatistaan ja siinä kehittämisessä. Joskus opettajat voivat vaikuttaa täydennyskoulutuskurssien sisältöön, mikä lisää opettajien motivaatiota osallistua koulutukseen.

## Matematiikan opetuksen kehittämiseksi tehtyjä toimenpiteitä

Matematiikan opetuksen kehittämiseksi on Suomessa tehty monia toimenpiteitä, erityisesti 1990-luvulla, jolloin mukana oli useita organisaatioita.

Yksi merkittävä ongelma matematiikan opetuksessa oli puute luokanopettajista, jotka olivat erikoistuneet matematiikkaan. Vaikka puolet luokanopettajakoulutuksen opinnoista on varattu kasvatustieteelle, niin



matematiikalla ja matematiikan opetuksella on vaatimatonta pakollinen osuus. Luokanopettajan koulutusohjelma sisälsi 160 opintoviikkoa, joista kasvatustieteen osuus oli vähintään 75 opintoviikkoa. Matematiikan ja matematiikan opetuksen yhteinen pakollinen osuus oli 3–4 opintoviikkoa. Opintoviikko vastaa 20 luentotuntia ja yksi luentotunti on 45 minuuttia (Malaty 2004). Bologna julistuksen seurauksena opettajankoulutuksen ohjelmaan on tullut muutoksia vuodesta 2005 alkaen, mutta nämä eivät ole vaikuttaneet opintojen rakentamiseen eivätkä sisältöön, joten matematiikan ja matematiikan opetuksen ohjelmat ovat säilyneet ennallaan.

On aina ollut mahdollista erikoistua yhteen tai kahteen oppiaineeseen tai valinnaisiin kasvatustieteen opintoihin, mutta matematiikka ei ole ollut suosittu valinta. Vähemmän kuin 2 % opiskelijoista erikoistui matematiikkaan, ja tämä oli tilanne aina vuoteen 1992, jolloin Joensuun yliopistossa tehty työ johti jyrkkiin muutoksiin. Tänä päivänä matematiikka on yksi suosituimmista erikoistumisaineista Joensuun yliopiston luokanopettajien koulutuksessa, jopa yli 80 % opiskelijoista erikoistuu matematiikkaan (15 opintoviikkoa) ja puolet heistä jatkaa opintoja 35 opintoviikkoon, joka antaa aineenopettajan pätevyuden.

## Toimia Joensuun yliopistossa

Suomessa kaikilla opettajankoulutuslaitoksilla on harjoittelukoulu, joka yleensä sijaitsee yliopiston kampuksella. Näitä kouluja kutsutaan normaalikouluiksi. Opetusharjoittelua ohjaavat normaalikoulun lehtori ja matematiikan opetuksen asiantuntija yliopistosta. Omat ponnistuksemme Joensuussa alkoivat matematiikan opetuksen ohjauksen parantamisesta.

Vuosina 1986–87 seurasin 135 neljänkymmenenviiden opiskelijan pitämää oppituntia. Ohjaukseen sisältyi oppituntien suunnittelu neuvonta. Pyysin opiskelijoitani opettamaan matematiikkaa systemaattisemmin kuin oppikirjoissa. Lisäksi pyysin, että he panostavat matematiikan ymmärtämiseen ja käyttävät erilaisia keksimisstrategioita. Nämä ohjeet kuvastavat tärkeimpiä opetusperiaatteitamme. Avustaakseni opiskelijoitani oppituntien suunnittelussa osallistuin oppitunneille. Menestyksemme syntyi tästä työstä, joka johti ehdotukseen normaalikoulun matematiikkakerhojen perustamisesta. Niistä ensimmäinen perustettiin syksyllä 1988. Viisi normaalikoulun opettajaa liittyi näiden kerhojen työhön.

Vastauksena opiskelijoiden pyyntöön perustin vuonna 1989 heille iltamatematiikkakerhon. Yli 50 opiskelijaa osallistui kerhoon, joka pidettiin kerran viikossa klo 18.00–19.30. Seuraavana vuonna 1990 kerho muutettiin valinnaiseksi kurssiksi Matemaattinen ajattelu (2 ov). Vuodesta 1993 lähtien kurssi on jaettu kahteen osaan,

Geometrinen ajattelu (1 ov) ja Algebrallinen ajattelu (1 ov).

Vuonna 1993 yli 50 opiskelijaa valitsi erikoistumisaineekseen matematiikan. Tämä luku vastasi yli puolta luokanopettajaopiskelijoiden vuosittaisesta määrästä, ja se oli yli kolminkertainen määrä verrattuna kaikkiin muihin Suomen 10 opettajankoulutuslaitokseen. Menestys on jatkunut ja matematiikkaan erikoistuneiden osuus opiskelijoista on noussut jopa yli 80 prosenttiin.

Vuonna 1994 Korkeakoulujen arviointineuvosto nimitti Joensuun yliopiston matematiikan opettajankoulutuksen huippuyksiköksi. Samana vuonna Helsingin, Joensuun ja Oulun yliopistojen kasvatustieteelliset tiedekunnat arvioivat kansainvälinen komitea kirjoitti raportissaan, että "... Joensuun yliopisto on menestyksellisesti kehittänyt matematiikan opetukseen erikoistuvien opettajien koulutusohjelmaa, joka voi toimia mallina muille tiedekunnille ja sisältöalueille. ... ohjelma näyttää vähentävän tulevilla opettajilla yleiseksi havaittua matematiikan (opetuksen) aiheuttamaa ahdistusta".

Vuonna 1990 Joensuun kouluvirasto pyysi minua järjestämään matematiikkakerhon opettajille, jotka olivat kiinnostuneet perustamaan oman matematiikkakerhon. Kerhoon osallistui 39 opettajaa. Useimmat heistä olivat luokanopettajia tai erityisopettajia, mutta muutamat olivat peruskoulun yläluokkien 7–9 tai lukion aineenopettajia. Näiden opettajien ansiosta matematiikkakerhot levisivät Joensuun peruskouluhin ja joihinkin lukioihin.

Vuosien 1990–95 aikana matematiikkakerhot levisivät koko maahan opettajien täydennyskoulutuksen kautta. Opettajien työn tueksi julkaistiin kerhojen materiaalia ja opettajille oppikirja (Malaty 1992, Malaty 1993, Malaty 1994).

1990-luvun aikana olin mukana yli 300 täydennyskoulutusohjelmassa yli 75 kunnassa mukaanlukien kaikki suurimmat kaupungit saavuttaen näin yli 12000 opettajaa päiväkodeista lukioihin. Täydennyskoulutusohjelmien sisältö ei aina liittynyt matematiikkakerhoihin, mutta matematiikkakerhojen menestys toi koulutukseen uskottavuutta. Vuodesta 1992 lähtien sisällöltään ja menetelmiltään samantyyppistä kerhotoimintaa on ollut matematiikan opetuksen tuomiseksi päiväkodeihin. Tämä antoi perustan vuoden 1998 varhaiskasvatusasetukselle.

Monet henkilöt – mm. poliitikot ja median edustajat – huomasivat tekemämme työn. Matematiikkakerhoista kerrottiin sanoma- ja viikkolehdistä. Yksi lehdistä jaettiin Suomen jokaiseen kotitalouteen vuonna 1989. Myös televisiokanavilla esitettiin uutisia ja ohjelmia matematiikkakerhojen toiminnasta. Tämän julkisuus tuki muita virallisia toimenpiteitä, mukaanlukien LUMA-talkoot (opetusministeriö 1999).

Yhtenä tärkeimmistä saavutuksistamme Itä-Suomen alueella on nyt entistä parempia matematiikan opettajia. Tämä voidaan havaita PISA:n ja myös kansallisten arviointien tuloksista. Ponnistelumme opettajankoulutuksen kehittämisessä eivät rajoitu ainoastaan luokanopettajien koulutukseen, sillä vastaavia toimenpiteitä on tehty erityisopettajien koulutuksessa. Joensuun yliopistossa on erityiskasvatuksen laitos, jossa matematiikan ja sen opetuksen sisältö on sama kuin luokanopettajien koulutuksessa. Matematiikan ja sen opetuksen kurssit ovat yhteisiä molempien laitosten opiskelijoille. Tämä antoi erityiskasvatuksen opiskelijoille mahdollisuuden osallistua luokanopettajakoulutuksen matematiikkakerhoihin vuonna 1989. Vuodesta 1993 lähtien pääosa Joensuun yliopiston erityiskasvatuksen opiskelijoista on osallistunut samaan matematiikan erikoistumisohjelmaan kuin luokanopettajaopiskelijatkin (15/35 ov). Tämä koulutus on tarjonnut Itä-Suomen peruskouluihin sekä sen ala- että yläluokille parempia matematiikan erityisopettajia. Lisäksi muutamat lastentarhanopettajiksi opiskelevat ovat saaneet saman matematiikan ja sen opetuksen koulutuksen kuin luokanopettajiksi ja erityisopettajiksi opiskelevat.

## Koulujen hyvinvointi ja myönteinen työskentely-ympäristö

Suomalaisessa yhteiskunnassa lapsilla ja nuorilla on perinteisesti erityinen asema. Hyvinvointiyhteiskuntana Suomi tarjoaa – yleensä ilmaiseksi – monenlaisia palveluja erityisesti lapsille ja nuorille.

Kiinnostus lasten ja nuorten kehitystä kohtaan tuo mukanaan huomattavaa arvostusta opettajille. Suomessa koulutus ei ole ainoastaan ilmaista vaan myös hyvin tuettua: koulut tarjoavat ilmaisen terveydenhuollon, oppilaat saavat ilmaisen lämpimän lounaan, internet-yhteydellä varustettuja tietokoneita voi käyttää vapaasti, peruskoululaiset saavat oppikirjat, vihkot, kynät, jne. ilmaiseksi, ja yli viiden kilometrin koulumatkoilla on ilmainen taksikyty.

Suomessa koulut ovat hyvin kalustettuja ja varustettuja. Koulut ovat sekä fyysisesti että sosiaalisesti avoimia paikkoja. Vierailijat voivat koska tahansa astua sisään koulujen ovista. Opettajien työ ei ole minkäänlaisten säännöllisten tarkastusten kohteena. Suomen kouluissa ei ole muodollisuuksia pukeutumisessa eikä oppilaiden ja opettajien välisessä kommunikaatiossa. Lisäksi erityisesti peruskoulujen alakouluissa opettajien kunnioitus on itsestään selvää.

Aamuisin koulujen taulut on puhtaaksi pyyhitty, suomalaiset koulut ovat verrattain hiljaisia, erityisesti opetustilojen sisällä. Tämä antaa opettajille mahdollisuuden huolehtia oppilaistaan ja heidän oppimisestaan, ja vastavuoroisesti se lisää opettajien kiinnostusta työtään kohtaan. Oppimateriaaleista oppilaille

otettavien kopioiden määrässä ei ole rajoituksia, ja oppilaat saavat ne ilmaiseksi. Luokissa on pesualtaat ja paperipyyhkeet mm. käsien pesua varten. Luokat, käytävät, auditoriot, juhlasalit ja pesutilat ovat aina siistejä ja lämpimiä, jonka vuoksi oppilaat kulkevat koulujen sisätiloissa sukkasillaan tai tohveleissa, mikä tuo kodikkaan olon.

## Huolehtiminen, mukavuus ja tasa-arvo

Oppilaista huolehtiminen on itsestään selvää, joka näkyy mm. luokkien melko pieninä oppilasmäärinä, yleensä 15 ja 25 välillä. Tällä on merkitystä oppilaiden sosiaalisuuteen ja oppimiseen. Se takaa myös oppilaiden ja opettajan välisen tuttavallisen kanssakäymisen. Oppimisen kannalta luokkien riittävän pieni oppilasmäärä mahdollistaa sen, että opettaja pystyy huolehtimaan kaikista oppilaista. Jos oppilaalla on vaikeuksia esimerkiksi matematiikassa, niin opettaja tavallisesti puuttuu asiaan heti ja niin myös erityisopettaja voi ottaa hänet opetettavakseen. Tällaisen huolenpidon seuraukset näkyvät PISA-tuloksissa.

Kouluissa järjestetään vanhempainiltoja, joissa keskustellaan koulunkäyntiin liittyvistä asioista. Oppilaiden vanhemmille annetaan myös tilaisuus yksityisiin keskusteluihin opettajien kanssa. Suomessa kouluissa ei ole pelkoa rangaistuksista, fyysinen rankaiseminen ei tule kuuloonkaan, eikä edes huutamista tarvita. Rankaiseminen ja kontrollointi eivät ole tyypillisiä piirteitä kouluissa, opettajien tehtävä on tukea oppilaiden kehitystä.

Oppilaiden hajanaisuus on Suomessa vähäisempää kuin muissa maissa, joka on tullut esille sekä PISA- että muissa vertailututkimuksissa. Tämän voi nähdä tulokseksi peruskoulujen tasapuolisuudesta kaikkia oppilaita kohtaan, joka on heijastumaa suomalaisen yhteiskunnan perinteistä. PISA-tutkimus osoittaa, että oppilaiden erilaisilla sosio-ekonomisilla taustoilla ei ole merkitystä oppimistuloksiin. Tämä ei ole yllättävä tulos, sillä Suomessa ei ole kiinnostusta yksityiskouluihin ja yksityisopetus on tuntematonta.

Vanhemmat lähettävät lapsensa kouluun ei pelkästään oppimaan vaan myös saamaan tukea kasvatukseen. Kotitehtävät eivät aiheuta stressiä, eikä niitä ole lomilla eikä viikonloppuisin. Kotitehtävien rajoitettu määrä merkitsee sitä, että oppilailla on koulupäivän jälkeen aikaa myös harrastuksille.

Koulut eivät ainoastaan valmistu oppilaitaan tulevaisuutta varten, vaan ne takaavat viihtymisen myös tämänhetkessä elämässä. Asioiden oppiminen ei ole koulunkäynnin tärkein päämäärä, mikä on yksi syy siihen, että oppilaat eivät ”lunntaa” kokeissa. Vanhemmat luottavat opettajien kykyyn huolehtia lapsistaan, ja toisaalta opettajat ovat kiinnostuneita oppilaidensa kasvatuksesta, erityisesti niiden joilla on vaikeuksia.

Tämän vuoksi suomalaisten oppilaiden erot oppimistuloksissa ovat pienempiä kuin muissa maissa. Toisaalta tämä osoittaa yhden suuren ongelman matematiikan opetuksessa, tarpeen huolehtia enemmän myös lahjakkaista oppilaistamme.

## Viitteet

Buchberger, F. et al. 1994. Educational studies and teacher education in Finnish universities. Helsinki. Ministry of Education, Department for Higher Education and Research.

Malaty, G. 1992. Geometrinen ajattelu I. Porvoo: Weilin+Göös.

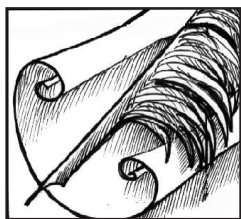
Malaty, G. 1993. Geometrinen ajattelu I. Didaktiikka. Porvoo: Weilin+Göös.

Malaty, G. 1994. Algebrallinen ajattelu I. Didaktiikka. Porvoo: Weilin+Göös.

Malaty, G. 2004. Mathematics Teacher Training in Finland. In: Series of International Monographs on Mathematics Teaching Worldwide. Monograph 2. Teacher Training. Budapest: Müszaki Könyvkiadó, A WoltersKluwer Company. (Uudempi versio on saatavissa 'La Société Mathématique de France':n sivuilla <http://smf.emath.fr/en/VieSociete/Rencontres/France-Finlande-2005/ResumeConferences.html>)

Ministry of Education 1999. Finnish Knowledge in Mathematics and Sciences in 2002. Revision of the National Joint Programme (LUMA). Helsinki: Ministry of Education.

Käännös *Mika Koskenoja*

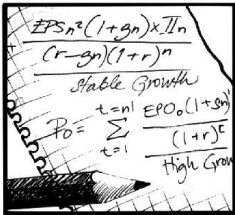


# Päätoimittajan kommentti

Kuultuaan prof. Malatyn esityksen Suomen kouluista ranskalaiset kyselivät, miten tähän ihmeelliseen maahan voi muuttaa – mutta seuraavissa esityksissä (Marto, Toivonen) tuli jo selville, ettei Suomikaan valitettavasti enää ole ennallaan. Ainakin joillain alueilla ovat ongelmat alkaneet kasaantua ja Malatyn kirjoituksen tarkoitus onkin, että suomalaiset osaisivat arvostaa sitä, mikä heillä on ollut hyvää, eivätkä luopuisi siitä.

Opettaja-lehdessä 7/2006 (17.2.2006) on kerrottu Porissa tehdystä selvityksestä opettajien joutumisesta vanhempien kiusaamisen uhriksi. Tällainen ongelma näyttää olevan kasvamassa ja opettajia jopa uhkailaan. Suomen koulujen tilanne tuntuu ainakin paikoitain olevan nopeasti muuttumassa huonompaan suuntaan. Kunpa olisimme osanneet pitää kiinni niistä hyvistä puolista, joita Malaty tuo kirjoituksessaan esiin.

*Marjatta Näätänen*



## Tilanne Ranskan ”suurissa kouluissa”

Lyhennelmä ja käännös: *Marjatta Näätänen*

Laurent Decreusefond kertoi matematiikan tilanteesta Ranskan ”suurissa kouluissa”. Decreusefond toimii Ranskan Kansallisessa Tietoliikennekorkeakoulussa (École Nationale Supérieure des Télécommunications) ja kertoi lukioista tulevien oppilaiden heterogeenisen matemaattisen tason ns. suurille insinöörikorkeakouluille eli Grandes Écoles -korkeakouluille aiheuttamista ongelmista (tunnetuimpia näistä ”suurista kouluista” lienevät École Polytechnique, École des Mines ja École des Ponts et Chaussées).

Ranskan vuoden 1997 koulureformissa matematiikan tuntimäärää vähennettiin 20 % lukioiden suuriin kouluihin valmistavilla luokilla, lisäksi eri linjojen vaatimustasot muodostuivat hyvin erilaisiksi. Tarkoituksena oli keskittyä opetuksessa ensisijaisesti kunkin koulutusohjelman tarvitsemiin matemaattisiin työvälineisiin samalla kuitenkin säilyttäen matematiikan aseman itsenäisenä oppiaineena. Tässä ei onnistuttu, vaan valmistavien luokkien useilla linjoilla on jääty huomattavasti jälkeen aiemmin saavutetusta, suurinpiirtein suomalaisen yliopiston matematiikan cum laude -oppimäärää vastanneesta tasosta.

Ennen v. 1997 reformia suurien insinöörikoulujen pääsykokeisiin valmistavilla luokilla opitut äärellisulotteiset vektoriavaruuksien ja Riemannin integraalin antoivat pohjan Hilbertin avaruuksien ja Lebesguen integraalin teorialle, minkä lisäksi valmistavilla luokilla pehdyttiin myös ryhmäteoriaan ja äärellisiin kuntiin kuten myös lineaarisiin samoin kuin epälineaarisiinkin

differentiaaliyhtälöihin. Reformin jälkeen tästä on Decreusefondin mukaan lähinnä jäänyt jäljelle vain lineaaristen differentiaaliyhtälöiden alkeet. Opiskelijoiden abstrakti päättelytaito on myös heikentynyt, eikä sellaisiakaan käsitteitä kuin Cauchyn jonot ja tasainen suppeneminen enää tunneta, monista keskeisistä tuloksista kuten esim. Cayley-Hamiltonin lauseesta puhumattakaan.

Koska teknologiset innovaatiot perustuvat nykyään yhä suuremmissa määrin matematiikan ja fysiikan tutkimuksen viimeisiin läpimurtoihin, Decreusefond toteaa, että insinöörikorkeakoulujen tulisi pystyä pehdyttämään ainakin osa tulevasta insinööreistä tieteen uusimpiinkin saavutuksiin.

Niinpä tulevan insinöörin olisi hallittava modernin matemaattisen fysiikan kuten kvanttifysiikan, optiikan, mekaniikan ja elektroniikan lisäksi myös signaalinkäsittelyä, informaatioteoriaa ja kryptografiaa, mikä puolestaan edellyttää varsin monien matematiikan osa-alueiden kuten todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen, Fourier-analyysin, funktionaalianalyysin, kompleksianalyysin, tavallisten ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden, ryhmäteorian ja äärellisten kuntien tuntemusta. Insinöörikorkeakouluihin tulevan oppilasaineksen heterogeenisuuden takia tähän on nykyään kuitenkin vaikea päästä.

Decreusefond kuvailee työelämän nuoren insinöörin koulutukselle asettamia vaatimuksia Bloomin tunnetun luokittelun avulla, yhdistäen tasoja niin, että jää neljä

luokkaa: toiselle tasolle hän ottaa käsittämisen ja soveltamisen, kolmannelle tason, jolla pystytään analysoimaan, neljännelle synteisiin, jolloin pystytään suunnittelemaan, yleistämään, kehittämään. Hänen mielestään nykyaikana tarvittava laadukas koulutus edellyttäisi, että tuleva insinööri saavuttaa kolmannen tason insinöörityeiden perustana olevissa matematiikassa ja fysiikassa sen sijaan, että jäisi toiselle tasolle; vain oppisi soveltamaan usean suppean erikoisalan mahdollisesti piankin vanhenevia erityistekniikkoja. Koska osa oppilaista ei ole enää tottunut asioiden loogiseen esittämiseen, abstraktista päättelykyvystä puhumattakaan, niin tämän Bloomin kolmannen tason saavuttaminen on nykyään varsin vaativa tehtävä myös näissä ns. suurissa kouluissa. Esityksensä kuluessa Decreusefond spontaanisti puuskahti: ”Tämä on kauheaa!” Decreusefondin mukaan jopa äidinkielen opettajat ovat kiinnittäneet huomiota viime vuosina tapahtuneeseen kielteiseen kehitykseen.

Hän toteaa edelleen, että pelkän ”yleisjohtajuuden” si-

jasta ranskalaiset suuryritykset ovat huomanneet tarvitsevansa insinööreiltään modernin teknologian todellista hallintaa. Todetun huipputeknologian tarpeen tyydyttämiseksi Ranskan suurten koulujen tulisikin kohentaa perustieteiden asemaa opetusohjelmassa samalla painottaen oppilaiden henkilökohtaisen tutkimustyön merkitystä. Tähän ei kuitenkaan päästä, ellei Ranskan lukioihin samalla perusteta todellista matemaattis-fysikaalista linjaa. Decreusefondin mielestä näihin hänen esitettämiinsä opetusohjelmien tarkistuksiin olisi syytä ryhtyä ripeästi niin lukioissa kuin kaikissa suurissa insinöörikorkeakouluissakin.

Selityksenä suomalaisille lukijoille mainittakoon, että lukion päättämisen jälkeen ”todellisilla” insinöörikokelailla on vielä 2 vuotta valmistavia luokkia ennen ”suuren korkeakoulun” pääsykoetta. On tietysti myös alemman tason insinöörikouluja, joihin voi pyrkiä aikaisemmin. Ranskalaisille luokkajako ”suuret koulut” verrattuna muihin (yli)opistoihin on hyvin oleellinen.



# Tytöt ja matematiikka PISA:n valossa

*Marjatta Näätänen*

Dosentti

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

PISA-vertailussa tyttöjen ja poikien erot matematiikan osaamisessa olivat poikien hyväksi kaikissa maissa paitsi Islannissa. Monissa maissa, esimerkiksi Suomessa ja Japanissa, erot olivat pieniä.

Erot tyttöjen ja poikien käsityksissä omista akateemisista kyvyistään ja kyvystään voittaa vaikeuksia opiskelussa sekä emotionaaliset vaikeudet matematiikan opiskelun suhteen ovat kuitenkin huomattavia.

Merkittävästi poikia suurempaa matematiikka-ahdistusta on OECD-maiden tytöillä Itävallassa, Kanadassa, Tanskassa, Suomessa, Ranskassa, Saksassa, Luxemburgissa, Hollannissa, Norjassa ja Sveitsissä. Vaikka Suomessa tyttöjen ja poikien suoritukset eivät eronneet paljoa, oli Suomessa – samoin kuin Hollannissa ja Sveitsissä – tytöillä erityisen huono käsitys kyvystään matematiikan oppimisen ongelmien ratkaisussa.

Tytöillä on siis yleinen ongelma, ettei ole kylliksi luottamusta omaan kykyihinkin. Mistä tytöt oppivat tällaisen asenteen? Jos tytöille ennakoidaan vaikeuksia matema-

tiikan opiskelussa, tytöt vaistoavat sen ja menettävät itseluottamuksensa silloin, kun pitäisi ratkoa matematiikan ongelmia.

Yksilöiden kannalta olisi toivottavaa, etteivät stereotyyppiat olisi kovin rajoittavia. Näin kukin voisi kehittää omia lahjakkuustaipumuksiaan riippumatta siitä, mikä hänen sukupuolensa sattuu olemaan.

PISA-tutkimuksessa esitetään, että poikien korkeampi motivaatio oppia matematiikkaa voi olla yhteydessä siihen, että he uskovat siitä olevan hyötyä heidän tulevaisuudessa ammatissaan. Matematiikka onkin nykyisin melkein joka alalla tarpeellinen työkalu. Puutteelliset pohjatiedot ovat myöhemmin vaikeasti ylitettävä este.

Median, perheen, yhteiskunnan odotukset ja käsitykset ovat verhotut tai avoimet, nämä käsitykset opitaan huomaamatta. Millaista naiskuvaa media tarjoaa? On aika tehdä muutakin kuin selvityksiä, raportteja, tutkimuksia, erillisiä projekteja – tiedostahan ei ole puutetta.